MSU Fen Bil. Dergi., Cilt 6, Sayı 1 , s 493-500 *Araştırma Makalesi/ Research Article*
MSU J. of Sci., Volume 6 , Issue 1 , p 493-500 DOI : 10.18586/msufbd.398376

Diferansiyel Fark Özelliklerinin Korunması ile Çok Katlı Değişkenlere Bağımlı $f \in B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ Fonksiyonların $G \subset E_n$ Bölgesi Dışına Genişletilmesi

Gülizar ALİSOY, Sadiye AKTAŞ
Matematik Bölümü, Fen Edebiyat Fakültesi, Namık Kemal Üniversitesi Üniversitesi, Tekirdağ, Türkiye
✉: galisoy@nku.edu.tr

Geliş (Received):24.02.2018 Düzeltme (Revision):26.03.2018 Kabul (Accepted):24.04.2018

ÖZ

Bu çalışmada, $G \subset E_n$ bölgesinde tanımlanmış *"σ -yarım boynuz"* ve *"kuvvetli σ -yarım boynuz"* koşulunu sağlayan $f \in B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla $G \subset E_n$ bölgesinin dışına genişletilmesine ilişkin gömülme teoremleri biçiminde yeni sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Besov tipli uzay, gömülme eşitsizlikleri, integral ayrılış

Extension of Functions $f \in B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ Dependent on the Multi Package Variables Outside the $G \subset E_n$ Region with Preservation of the Class

ABSTRACT

In the present paper, in the case when the domain $G \subset E_n$ satisfies the *"**σ** - half-horn condition"* and the *" **σ** - strong half-horn condition"*, we extend the functions from the spaces $f \in B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ outside the domain $G \subset E_n$ to the preservation of the class.

Keywords: Besov space, embedding inequalities, integral representation

GİRİŞ

Fonksiyon uzayları teorisinin gelişimi ve onların matematiksel fiziğin denklemlerine uygulamaları, bu teorilerin birleştirilmesi ve de genelleştirilmesi doğrultusunda yeni problemler ortaya koymaktadır. Matematiksel fizikte fonksiyonel analizin bazı uygulamalarını kapsayan bu teori ilk olarak, S. L. Sobolev tarafından ortaya atılmıştır [1]. Sonraki aşamalarda, teorinin gelişmesinde, S.L.Sobolev, L.N.Slobodetskii ($W^{\,r}_{\,p}$ − Sobolev -Slobodetskii uzayı); S.M. Nikol'skii ($H^{\,r}_{\,p}(G)$ - Nikol'skii uzayı); L.D. Kudryavtsev ($W^{\,r}_{\,p,\alpha}(G)$ - Sobolev – Kudryavtsev ağırlıklı fonksiyon uzayı), P.V. İlyin, P.İ. Lizorkin ($S^{\,l}_{\,p}W(G)$ - Nikol'skii- Lizorkin-Dzhabrailov uzayı), O.B. Besov ($B^{\,r}_{\,p,\theta}(G)$ - Nikol'skii-Besov uzayı), S.M. Nikol'skii A.D. Dzhabrailov, T.M. Amanov ($S^{\,l}_{\,p,\theta}B(G)$ - Nikol'skii-Dzhabrailov-Amanov uzayı), V.I. Burenkov, Y.S Bugrov,Grisvard P, Gagliardo E, Benedek A, Panzone R, Garding L , Lions J.L , Kalderon A.P, Zygmund A , Nirenberg L gibi görkemli matematikçiler çok büyük katkılarda bulunmuşlardır [2-6].

Ref.[7-12]'de $G \subset E_n$ bölgesinde belirlenmiş çok değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonlar için yeni $B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ fonksiyon uzayları oluşturulmuş ve elde edilen yeni integral gösterimlerinin yardımıyla, bu fonksiyon uzayları için yeni gömülme (embedding) teoremleri ispatlanmıştır. Bu teoremlerin sonuçları olarak, verilmiş uzaylarda farklı normların eşdeğerliliği gösterilmiştir [9].
Ref.[11-16] elde edilen sonuçlar, matematiksel analizin "fonksiyon uzayları teorisi 'ne veya çok değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonların gömülme teoremlerine (Theory of Embedding Theorems) ilişkin yeni orijinal sonuçlar içermektedir. Çok değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonlar için oluşturulmuş yeni fonksiyon uzayları $B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ (Dzhabrailov-Alisoy) özel durumlarda s=1 için Nikol'skii–Besov ve s=n için

Gülizar ALİSOY orcid.org/0000-0003-2114-6669
Sadiye AKTAŞ orcid.org/0000-0001-8670-5180

ise Nikol'skii-Dzhabrailov-Amanov fonksiyon uzaylarına dönüşmektedir [5,6,8,12].

Bu çalışmada, $G \subset E_n$ bölgesinde tanımlanmış "σ - yarım boynuz" ve "kuvvetli σ - yarım boynuz" koşulunu sağlayan $B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla $G \subset E_n$ bölgesi dışına genişletilmesine ilişkin yeni sonuçlar verilmiştir. Başka bir deyişle tüm E_n'de tanımlı ve $G \subset E_n$ bölgesinde $B^{<r>}_{p,\theta}(G,s)$ fonksiyonu ile çakışan bir $\tilde{f}_\nu = \tilde{f}_\nu(x)$ inşa edilir ve bu fonksiyon için

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{B^{<r>}_{p,\theta}(E_n,\ s)} \leq c\|f\|_{B^{<r>}_{p,\theta}(G,\ s)}$$

gömülme teoremleri biçimindeki integral eşitsizlikleri ispatlanır. Çalışmada elde edilen sonuçlar ilk kez alınan sonuçlar olup daha önce Besov- Il'yin [3] ve Besov-Dzhabrailov [5] tarafından elde edilmiş sonuçları genelleştirir.

1.Ön Bilgiler

Bu bölüm, makale kapsamında bilinmesi gerekli olan bazı temel kavram, tanım ve teoremler hakkındaki bilgileri kapsamaktadır.

1.1. Sobolev Anlamında Genelleştirilmiş Türev

Tanım 1.1. *Varsayalım ki f ve χ fonksiyonları $G \subset E^n$ açık kümesinde yerel toplanabilir fonksiyonlardır. Eğer G - açık kümesinde keyfi sonsuz diferansiyellenen ve sonlu φ- fonksiyonu için*

$$\int_G \chi(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|k|}\int_G \chi(x)\varphi^{(k)}(x)dx \quad (1)$$

eşitliği doğru ise o halde χ – fonksiyonuna G - açık kümesinde f- fonksiyonunun genelleştirilmiş türevi denir ve aşağıdaki ifade ile belirlenir [1-3].

$$f^{(k)} = D^k f = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1},\dots,\partial x_n^{k_n}} \quad (2)$$

$m = (m_1,\cdots,m_s)$ vektörünün bileşenleri $m_k = (m_{k,1},\cdots,m_{k,n_k})$ biçiminde tanımlanan ve negatif olmayan tamsayılar olsun. Başka bir değişle her $k = 1,2,\cdots,s$ ve $j = 1,2,\cdots,n_k$ için $m_{k,j} \geq 0$ olsun.

Bu durumda $f(x)$ fonksiyonunun Sobolev anlamında genelleştirilmiş türevi aşağıdaki gibi olacaktır

$$D^m f(x) := D_1^{m_1}\cdots D_s^{m_s} f(x) \quad (3)$$

Burada

$$D_k^{m_k} f(\cdots;x_k;\cdots) = D_{k,1}^{m_{k,1}}\cdots D_{k,n_k}^{m_{k,n_k}} f(\cdots;x_k;\cdots) =$$

$$= \frac{\partial^{|m_k|}}{\partial x_{k,1}^{m_{k,1}}\dots\partial x_{k,n_k}^{m_{k,n_k}}} f(\cdots;x_k;\cdots) \quad (4)$$

1.2. Bölge Koşulları

Bu bölümde *"$\sigma -$ yarım boynuz"* ve *"kuvvetli $\sigma -$ yarım boynuz"* koşulunu sağlayan bölgeler sınıfı açıklanmıştır.

Tanım1.2.1. *Varsayalım ki, her $k = 1,\cdots,s$ ve $j = 1,\cdots,n_k$ için;*

i) *Bileşenleri sırasıyla,* $H_k > 0$ ve $\sigma_k = (\sigma_{k,1},\cdots,\sigma_{k,n_k})$, $\sigma_{k,j} > 0$ *şeklinde olan* $\mathbf{H}=(\mathbf{H}_1,\dots,\mathbf{H}_s)$, ve $\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{\sigma}_1,\dots,\boldsymbol{\sigma}_s)$ *vektörleri ve*

ii) *Bileşenleri sırasıyla,* $H_k^{\sigma_k} = \left(H_k^{\sigma_{k,1}},\dots,H_k^{\sigma_{k,n_k}}\right)$ ve $\delta_k = (\delta_{k,1},\cdots,\delta_{k,n_k})$ *şeklinde olan* $\mathbf{H}^{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\mathbf{H}_1^{\boldsymbol{\sigma}_1},\dots,\mathbf{H}_s^{\boldsymbol{\sigma}_s}\right)$ ve $\boldsymbol{\delta} = (\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_s)$ *vektörleri verilmiş olsun.*

Bu durumda c_k ve c_k^* *birer sabitler olmak üzere her* $0 < h_k \leq H_k$ için $c_k \leq \frac{y_k\delta_k}{h_k^{\sigma_k}} \leq c_k^*$ *koşulunu sağlayan* $y = (y_1,\cdots,y_s) \in E_n$ $(y_k \in E_{n_k})$ *multi-indisli noktalar kümesi*

$$R_{\delta_k}\left(H_k^{\sigma_k}\right) = \bigcup_{0<v_k\leq H_k}\left\{y \in E_n; c_k \leq \frac{y_{k,j}\delta_{k,j}}{H_k^{\sigma_{k,j}}} \leq c_k^*\right\} \quad (5)$$

şeklinde tanımlanır **[**9,11,12**].**

Burada

$$\frac{y_k\delta_k}{h_k^{\sigma_k}} = \left(\frac{y_{k,1}\delta_{k,1}}{h_k^{\sigma_{k,1}}},\cdots,\frac{y_{k,n_k}\delta_{k,n_k}}{h_k^{\sigma_{k,n_k}}}\right)$$

ve

$$R_\delta(H_k^{\sigma_k}) = R_{\delta_1}(H_i^{\sigma_1}) \times \cdots \times R_{\delta_s}(H_s^{\sigma_s})$$

olmak üzere $x + R_\delta(\boldsymbol{H}^\sigma)$ kümesine tepe noktası $x \in E_n$'de bulunan "$\sigma -$*yarım boynuz*"denir **[**9,11,12**].**

Tanım 1.2.2. *Her bir $x \in \Omega$ için öyle bir $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1,\cdots,\delta_s)$ vektörü vardır ki, tüm $x + R_\delta(\boldsymbol{H}^\sigma) \subset G$ olur. O takdirde $\Omega \subset G \subset E_n$ alt bölgesi "$\boldsymbol{\sigma} -$yarım boynuz" koşulunu sağlayacaktır* [11].

$$\bigcup_{j=1}^{M} \Omega_j = G \quad (6)$$

Not: "$\sigma -$*yarım boynuz*" koşulunu sağlayan $G \subset E_n$ bölgeler sınıfı $C(H^\theta) = C(\sigma,H)$ ile gösterilmiştir.

Tanım 1.2.3. *Eğer,* $\bigcup_{j=1}^{M}\Omega_j = G$ *koşuluna ek olarak* $\bigcup_{j=1}^{N}\Omega_{j,\varepsilon} = G$ *koşulu da sağlanıyorsa, o takdirde* $G \in C(\boldsymbol{\sigma}, H)$ *bölgesi "kuvvetli* σ *–yarım boynuz" koşulunu sağlar denir* [8,9].

Burada $\Omega_{j,\varepsilon} = \left\{ y \in \Omega_j ;\ \rho\left(y; G \setminus \Omega_j\right) > \varepsilon \right\} \quad (\varepsilon > 0)$ (7)

Not: *"kuvvetli* σ *- yarım boynuz"* koşulunu sağlayan $G \subset E_n$ bölgeler sınıfı $C_\varepsilon(\sigma; H)$ ile gösterilmiştir.

1.3. Fonksiyonların İntegral Temsilinin Fark Denklemleri Cinsinden Gösterilmesi

Tanım 1.3.1. *Her* $k = 1,2,\cdots,s$ *için* $x_k = \left(x_{k,1},\cdots,x_{k,n_k}\right) \in E_{n_k}$ *ve* $x = (x_1,\cdots,x_s) \in E_n$ *olmak üzere* $G \subset E_n$ *bölgesinde tanımlı çok değişkenli* $f(x)$ *fonksiyonunun* $L_p(G)$*- normu*

$$\|f\|_{p,G} = \begin{cases} \left[\int_G |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \underset{x\in G}{ess\,sup}|f(x)|, & p = \infty \end{cases} \tag{8}$$

şeklinde tanımlanır [1-3].

Tanım 1.3.2. *Her* $k = 1,2,\ldots,s$ *ve* $j = 1,\ldots,n_k$ *için,* $m_k = \left(m_{k,1},\cdots,m_{k,n_k}\right)$ *biçiminde bileşenlere sahip* $\boldsymbol{m} = (m_1,\cdots,m_s)$ *vektörü negatif olmayan tamsayı bir vektör olsun, yani* $m_{k,j} \ge 0$ *olsun. Bu durumda,* $t = (t_1,\cdots t_s) \in E_n$ *bir vektör adımı olmak üzere her* $k = 1,2,\cdots,s$ *için* $f(x)$ *fonksiyonunun* $\boldsymbol{m}$ *mertebeden sonlu farkı aşağıdaki ifade ile tanımlanır* [3,8,9,12].

$$\Delta^{\boldsymbol{m}}(t)f = \Delta_1^{m_1}(t_1)\cdots\Delta_s^{m_s}(t_s)f(x) \tag{9}$$

Bu eşitlikte $f(x)$ fonksiyonunun $x_{k,j}$ yönünde $t_{k,j}$ adımlı $m_{k,j}$ mertebeden sonlu farkı $\Delta_{k,j}^{m_{k,j}}(t_{k,j})f$ şeklinde gösterilir ve her $k \in \{1,\cdots,s\} = e_s$ için aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$\Delta_k^{m_k}(t_k)f(\cdots;x_k;\cdots) =$$

$$\Delta_{k,1}^{m_{k,1}}(t_{k,1})\cdots\Delta_{k,n_k}^{m_{k,n_k}}(t_{k,n_k})f(\cdots;x_k;\cdots) \tag{10}$$

Bu durumda

$$\Delta_{k,j}^{m_{k,j}}(t_{k,j})f(\cdots;x_{k,j};\cdots) =$$

$$= \Delta_{k,j}^{m_{k,j}-1}(t_{k,j})\cdots\Delta_{k,j}^{1}(t_{k,j})f(\cdots;x_{k,j};\cdots) \tag{11}$$

Bu eşitlikten aşağıdaki ifadeler yazıla bilir.

$$\Delta_{k,j}^{0}(t_{k,j})f(\cdots;x_{k,j};\cdots) = f(\cdots;x_{k,j};\cdots) \tag{12}$$

$$\Delta_{k,j}^{1}(t_{k,j})f(\cdots;x_{k,j};\cdots) =$$

$$= f(\cdots;x_{k,j}+t_{k,j};\cdots) - f(\cdots;x_{k,j};\cdots) \tag{13}$$

Hatırlayalım ki (11) ifadesi $f(\cdots;x_{k,j};\cdots)$ fonksiyonunun tüm $k \in \{1,2,\cdots,s\} = e_s$ için $x_{k,j}$ yönünde $t_{k,j}$ adımlı $(j = 1,2,\cdots,n_k)$, $m_{k,j}$ mertebeden sonlu farkını ifade etmektedir. Eğer fark tamamen G-bölgesinde bulunan çokgenin tepe noktalarına göre oluşturulursa o halde

$$\Delta^m(t,G)f = \Delta^m(t)f(x), \tag{14}$$

farklı durumlarda ise

$$\Delta^m(t,G)f(x) = 0 \tag{15}$$

olduğunu kabul edeceğiz. Bu varsayımlar doğrultusunda

$$\psi(t) = \prod_{k\in e_\alpha}\prod_{j\in e_{\alpha_k}}\left|t_{k,j}\right|^{\alpha_{k,j}} \tag{16}$$

işaretlemesi yapılarak, $f(\boldsymbol{x})$ fonksiyonunun yarı-normu $1 \le \theta < \infty$ durumu için,

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<m+\alpha;\,\beta>}(G,s)} = \left[\int_{E_{|e_\alpha|}}\left\|\frac{\Delta^\beta(t;G)D^m f(x)}{\psi(t)}\right\|_{p,G}^{\theta}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{\theta}} \tag{17}$$

ve $\theta = \infty$ durumu için ise

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<m+\alpha;\,\beta>}(G,s)} = \underset{t\in E_{|e_\alpha|}}{ess\,sup}\left\|\frac{\Delta^\beta(t;G)D^m f(x)}{\psi(t)}\right\|_{p,G} \tag{18}$$

şeklinde tanımlanır. Hatırlayalım ki (17) ve (18) ifadelerinde yer alan $m = (m_1,\cdots,m_s)$ ve $\beta = (\beta_1,\cdots,\beta_s)$ vektörleri, her $k = 1,2,\ldots,s$ için, bileşenleri uygun olarak $m_k = \left(m_{k,1},\cdots,m_{k,n_k}\right)$ ve $\beta_k = \left(\beta_{k,1},\cdots,\beta_{k,n_k}\right)$ biçiminde tanımlanan ve negatif olmayan tamsayı birer vektörlerdir. Ayrıca bu ifadelerde yer alan $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$ vektörü, her $k = 1,2,\ldots,s$ için, bileşenleri $\alpha_k = \left(\alpha_{k,1},\cdots,\alpha_{k,n_k}\right)$ olan negatif olmayan ve $e_{\alpha_k} = supp\alpha_k = supp\beta_k$ taşıyıcılarına (destekleyicilerine) sahip bir vektördür. Başka bir deyişle $\alpha_k = \left(\alpha_{k,1},\cdots,\alpha_{k,n_k}\right)$ vektörünün ikinci indislerinin sıfırdan farklı kümesi $e_\alpha = \{k \in e_s\,; supp\alpha_k \ne \emptyset\}$ 'dir. Bu varsayımlar doğrultusunda her $k \in e_\alpha$ için

$$E_{\left|e_{\alpha_k}\right|} = \left\{t_k \in E_{n_k};\ t_{k,j} = 0 \ \ (\forall j \in e_{\alpha_k})\right\} \tag{19}$$

kümesinin kartezyen çarpımı aşağıdaki biçimde belirlenecektir.

$$E_{|e_\alpha|} = E_{\alpha_1}\times\cdots\times E_{\alpha_s} = \prod_{k\in e_\alpha}E_{\left|e_{\alpha_k}\right|} \tag{20}$$

Hatırlayalım ki (17) ifadesiyle tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun yarı-normunun geçerli olması durumunda (19) ifadesi ile tanımlanan küme için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$\frac{dt}{t} = \prod_{k\in e_\alpha} \prod_{j\in e_{\alpha_k}} \frac{dt_{k,j}}{t_{k,j}} \tag{21}$$

Her k=1,2,…,s ve j = 1,2,…,n_k için, sabit ve negatif olmayan $r = (r_1, \cdots, r_s)$ vektörünün bileşenleri $r_k = (r_{k,1}, \cdots, r_{k,n_k})$ olsun. Bu vektör için iki özel duruma bakalım. i) $r_{k,j} > 0$ durumunda en büyük tam sayı $\bar{r}_{k,j} < r_{k,j}$; ve ii) $r_{k,j} = 0$ durumunda ise $\bar{r}_{k,j} = 0$ olsun. Bu varsayımlar doğrultusunda tüm $k=1,2,…,s$ için her bir $r = (r_1, ..., r_s)$ vektörü, bileşenleri $\bar{r}_k = (\bar{r}_{k,1}, ..., \bar{r}_{k,n_k})$ olan $\bar{r} = (\bar{r}_1, ..., \bar{r}_s)$ vektörünü belirleyecektir. O takdirde her $k = 1, \cdots, s$ ve tüm $j \in e_{r_k} = supp\, r_k$ için $0 < r_{k,j} - \overline{r_{k,j}} \le 1$ olacaktır.

Her $k = 1,2, \dots, s$ ve $j = 1,2, \dots, n_k$ için $\omega = (\omega_1, ..., \omega_s)$ vektörünün bileşenleri $\omega_k = \left(\omega_{k,1}, ..., \omega_{k,n_k}\right)$ olsun. $\omega_{k,j} = 1$ veya $\omega_{k,j} = 0$ olduğunu kabul ederek, $\omega = (\omega_1, ..., \omega_s)$ vektörleri arasından öyle bir ω_r vektörü seçelim ki $supp\, \omega_k = supp\, r_k$ olsun. Yukarıdaki varsayımlar doğrultusunda (17) ve (18) denklemiyle tanımlanan yarı- norm ifadelerinde

$$\begin{cases} m = \bar{r} \\ \alpha = r - \bar{r} \\ \beta = 2\omega_r \end{cases} \tag{22}$$

alınırsa $f(\boldsymbol{x})$ fonksiyonunun yarı- normu için aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<\bar{r}+(r-\bar{r});\, 2\omega_r>}(G,\ s)} = \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<r>}(G,\ s)} \tag{23}$$

2. $B_{p,\theta}^{\langle r \rangle}(G,s)$ - Fonksiyon Uzayı

Her k=1,2,…,s için bileşen vektörleri $i_k = (0,1, \dots, n_k)$ değerlerini almak üzere $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$ olsun. O takdirde, Q kümesinin eleman sayısı aşağıdaki ifade ile belirlenecektir

.

$$mesQ = |Q| = \prod_{k=1}^{s} (1 + n_k) \tag{24}$$

Öyle ki

$$|Q| = \begin{cases} n+1 & eğer \quad s = 1 \\ 2^n & eğer \quad s = n \end{cases} \tag{25}$$

genel durumda ise Q kümesinin eleman sayısı $(n+1) \le |Q| \le 2^n$ olacaktır.

Varsayalım ki, $r = (r_1, \dots, r_s)$ tüm (k=1,2,…,s) için bileşenleri $r_k = (r_{k,1}, ..., r_{k,n_k})$ olan pozitif bir vektördür. Başka bir deyişle tüm $(k = 1,2, \dots, s; j = 1,2, \dots, n_k)$ için $r_{k,j} > 0$. Her bir $r = (r_1, \dots, r_s)$ pozitif vektörüne karşılık, $i \in \mathrm{Q}$ olmak üzere, $r^i = \left(r_1^{i_1}, \dots, r_s^{i_s}\right)$ vektörlerinin bir kümesi oluşturulur. Oluşturulmuş bu vektörler kümesi için aşağıdaki önermeler geçerlidir.

i)$\forall k \in supp(i_1, \cdots, i_s)$ için $i_k \ne 0$ yani $r_k^{i_k} = (0,...,0, r_{k,i_k}, 0,...,0)$ ve

ii)$\forall k \in \{1,2, \cdots, s\} \setminus supp(i_1, \cdots, i_s)$ için ise, $i_k = 0$ yani $r_k^0 = (0, \dots, 0)$ olacaktır.

Bu varsayımlar doğrultusunda, $1 \le p \le \theta < \infty$ olmak üzere f fonksiyonu için aşağıdaki norm tanımlanmıştır.

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,\ s)} = \sum_{i=(i_1,\cdots,i_s)\in Q} \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<r^i>}(G,s)} < \infty \tag{26}$$

Tanım 2.1.

$G \subset E_n$ bölgesinde Sobolev anlamında tüm $i \in Q$ için genelleştirilmiş $D^{\bar{r}^i} f \in L_p(G)$ türevleri mevcut ve (2.3) ifadesiyle tanımlanan norma sahip sonlu ölçülebilir fonksiyonlar kümesine, $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyon uzayı denir.

$B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyon uzayı tam normlu uzaydır [9].

Not: $B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ uzayının $G \subset E_n$ bölgesinde yeterince düzgün fonksiyonların kapanışı $\tilde{B}_{p,\theta}^{\langle r \rangle}(G,s)$ biçiminde gösterilecektir.

3. Esas Sonuçlar

Çalışmanın temel sonuçları, B –fonksiyon uzay tipine ait çok değişkenli $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$ fonksiyonların diferansiyel fark özelliklerinin (fonksiyon sınıfının) korunması şartıyla $G \subset E_n$ bölgesinin dışına genişletilebilir olması aşağıda tanımlanan iki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 3.1

1. *Varsayalım ki* , $1 \le p \le \theta < \infty$,

$$f \in B_{p,\theta}^{\langle \mathbf{r} \rangle}(G,s) \tag{27}$$

ve tüm (k=1,2,…,s) için $r=(r_1,\dots,r_s)$, *bileşenleri* $r_k=(r_{k,1},\dots,r_{k,n_k})$ *olan pozitif bir vektördür. Başka bir deyişle, tüm (k=1,2,…,s)* $r_{k,j}>0 \quad (j=1,2,\dots,n_k)$ *olsun.*

2. *Varsayalım ki* $G\in C(\sigma;H)$ (28)

Burada $\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{H_1},\dots,\boldsymbol{H_s})$, $H_k>0 \quad (k=1,\cdots,s)$. *Tüm* $k=1,\cdots,s$ *ve* $j=1,\cdots,n_k$ *için* $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_1;\cdots;\sigma_s)$ *pozitif sabit bir vektör olmak üzere* $\sigma_k=(\sigma_{k,1},\dots,\sigma_{k,n_k})$ *bileşenlerine sahip olsun. Başka bir deyişle tüm* $k=1,\cdots,s$ *ve* $j=1,\cdots,n_k$ *için* $\sigma_{k,j}>0$ *olsun.*

3. *Tüm* $k=1,\cdots,s$ *ve* $j=1,\cdots,n_k$ *için* $\nu=(\nu_1,\dots,\nu_s)$ *vektörü* , $\nu_k=(\nu_{k,1},\dots,\nu_{k,n_k})$ *bileşenlerine sahip ve* $\nu_{k,j}\ge 0$ *koşulunu sağlayan tam sayı bir vektör olsun.*

Eğer, $1\le p\le q<\infty$ *için*

$$\chi_{k,i_k}=r_{k,i_k}\sigma_{k,i_k}-(\nu_k,\sigma_k)-\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)|\sigma_k|>0, \qquad (29)$$

ve ayrıca

$$(\nu_k,\sigma_k)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_k}\nu_{k,j}\sigma_{k,j}\ ,\ |\sigma_k|=|\sigma_{k,1}|+\cdots+|\sigma_{k,n_k}| \qquad (30)$$

olduğunu düşünürsek, o halde

$$D^\nu f\in L_q(G;s) \qquad (31)$$

olmak üzere tüm E_n*'de tanımlı ve* $G\subset E_n$ *bölgesinde* $D^\nu f(x)$ *fonksiyonu ile çakışan bir* $\tilde{f}_\nu=\tilde{f}_\nu(x)$ *inşa edilir ve bu fonksiyon için*

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{L_q(E_n,\ s)}\le c\,\|f\|_{B^{<r>}_{p,\theta}(G,\ s)} \qquad (32)$$

integral eşitsizliği doğrudur.
Burada c, $f(x)$ fonksiyonundan bağımsız bir sabittir

Teorem 3.2

1. *Varsayalım ki Teorem 3.1'in tüm koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca,* $\varepsilon>0$ *olmak üzere* $G\in C_\varepsilon(\sigma;H)$ *olsun. Yani,* $G\subset E_n$ *bölgesi " kuvvetli* $\sigma-$ *yarım boynuz koşulunu sağlamış olsun.*

2. *Tüm* $k=1,\dots,s$ *için,* $\rho=(\rho_1;\dots;\rho_s)$ *vektörünün bileşenleri* $\rho_k=(\rho_{k,1},\dots,\rho_{k,n_k})$ *olsun ve tüm* $i_k=1,2,\dots,n_k$ *için*

$$(\rho_k,\sigma_k)=\sum_{j=1}^{n_k}\rho_{k,j}\sigma_{k,j}\ \le\chi_{k,i_k} \qquad (33)$$

olsun.

Bu durumda

$$D^\nu f\in\mathcal{L}^{<\rho>}_{q,\theta^*}(G;s) \qquad (34)$$

olmak üzere tüm E_n*'de tanımlı ve* $G\subset E_n$ *bölgesinde* $D^\nu f(x)$ *fonksiyonu ile çakışan bir* $\tilde{f}_\nu=\tilde{f}_\nu(x)$ *inşa edilir ve bu fonksiyon için*

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{\mathcal{L}^{<\rho>}_{q,\ \theta^*}(E_n;s)}\le c\|f\|_{B^{<r>}_{p,\theta}(G,\ s)} \qquad (35)$$

integral eşitsizliği doğrudur.
Burada c, $f(x)$ fonksiyonundan bağımsız bir sabittir.

4. Teoremlerin İspatı

Burada çalışmada sözü edilen ilgili bölgeler sınıfına ait düzgün fonksiyonların integral gösterimi verilerek, yardımcı fonksiyonların kümesi inşa edilir ve daha sonra ise gömülme teoremleri biçimindeki eşitsizlikler ispatlanmıştır.

4.1. Düzgün fonksiyonların integral gösterimi

$1<p\le\theta<\infty$ olmak üzere

$$f(x)\in B^{<r>}_{p,\theta}(G;s) \qquad (36)$$

ve her $k=1,2,\cdots,s$ için pozitif $r_k=(r_{k,1},\dots r_{k,n_k})$ bileşenlerine sahip $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r_1};\dots;\boldsymbol{r_s})$ vektörü verilmiş olsun. Bir başka deyişle $\forall k=1,\cdots,s$ ve $\forall j=1,\cdots,n_k$ için $r_{k,j}>0$ olsun. Genelliği bozmadan $f(x)$ fonksiyonunun $x\in E_n$ noktasında düzgün olduğu varsayılarak, özel durumda fonksiyonun $x\in E_n$ noktasındaki integral gösterimi aşağıdaki biçimde belirlenmiştir [7,8,11]

$$D^\nu f(x)=\sum_{i=(i_1,\dots,i_s)\in Q}A_{i,\delta}f(x) \qquad (37)$$

Bu eşitliğinin sağ tarafındaki integral operatörü aşağıdaki ifade ile belirlenir [7,9,11]

$$A_{i,\delta}f(x)=c_i\left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i}h_k^{-\beta_{k,0}}\right)\int_{\vec{0}}^{\vec{h}}\prod_{k\in e^i}\frac{dv_k}{v_k^{1+\beta_{k,i_k}}}\times$$

$$\times\int_{E_{|\omega^i|}}dz\int_{E_n}\left\{\Delta^{2\omega^i}\left(\frac{z}{2\omega^i}\right)D^{\bar{r}^{\ i}}f(x+y)\right\}\phi_{i,\delta}(\cdot\cdot)dy \qquad (38)$$

Burada $\vec{0}=(0,\dots,0)$, $\vec{h}=(h_1,\dots,h_s)$ ve tüm $k=1,\dots,s$ için $h_k>0$. Yukarıdaki (38) ifadesinde tüm $k=1,\dots,s$ için negatif olmayan $\boldsymbol{\nu}=(\boldsymbol{\nu_1};\dots;\boldsymbol{\nu_s})$ tam sayı vektörünün bileşenleri $\nu_k=(\nu_{k,1},\dots\nu_{k,n_k})$ ve tüm $i=(i_1,\dots,i_s)\in Q$ için $\bar{\boldsymbol{r}}^{\ i}=(\bar{\boldsymbol{r}}_1^{i_1};\dots;\bar{\boldsymbol{r}}_s^{i_s})$ vektörünün bileşenleri $\bar{r}_k^{\ i_k}=(0,\dots,0,\ \bar{r}_{k,i_k},\ 0,\dots,0)$, aşağıda tanımlı uzlaşma koşulunu sağlamaktadır.

$$\begin{cases}\nu_{k,j}\ge\bar{r}^{\ i_k}_{k,j}-2 & (j\ne i_k)\\ \nu_{k,i_k}<\bar{r}^{\ i_k}_{k,j}+2 & (j=i_k)\end{cases}$$

Yukarıda (4.1.3) ile verilen integral operatör ifadesinde tüm $i=(i_1,\dots,i_s)\in Q$ için $\omega^i=\omega_{r^i}$ ve her $i_k=0,1,\dots,n_k$ için, β_{k,i_k} sayıları aşağıdaki eşitliklerden belirlenir

$$\begin{cases} \beta_{k,0} = |\sigma_k| + (\nu_k,\sigma_k), & (i_k = 0) \\ \beta_{k,i_k} = |\sigma_k| + (\nu_k,\sigma_k) - \bar{r}_{k,i_k}\sigma_{k,i_k} + \sigma_{k,i_k} & (j = i_k) \end{cases} \tag{39}$$

Burada

$|\sigma_k| = \sigma_{k,1} + \cdots + \sigma_{k,n_k}$, $(k = 1, \dots, s)$
ve
$(\nu_k,\sigma_k) = \sum_{j=1}^{n_k} \nu_{k,j}\sigma_{k,j}$.

Hatırlayalım ki $(i \in Q)$ olmak üzere $e^i = supp\ i$ ifadesi $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$ vektörünün taşıyıcısıdır. Başka bir deyişle $e^i = supp\ i$, $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$ vektörünün sıfırdan farklı koordinatlarının indis kümesidir. e^s- ise $\{1,2, \dots, s\}$ kümesini ifade etmektedir.
Her bir $i = (i_1, \dots, i_s) \in Q$ için $E_n \times E_{|\omega^i|}$ 'de yeterince düzgün ve sonlu olan çekirdek aşağıdaki ifade ile belirlenir

$$\Phi_{i,\delta}(\cdots) =$$

$$= \prod_{k\in e^i} \Phi_{k,\delta_k}\left(\frac{y_k}{v_k^{\sigma_k}}; \frac{z_{k,i_k}}{v_k^{\sigma_{k,i_k}}}\right) \prod_{k\in e_s\setminus e^i} \Phi\left(\frac{y_k}{v_k^{\sigma_k}}\right) \tag{40}$$

Bu durumda, $supp\Phi_{k,i_k}(y_k; z_{k,i_k})$ taşıyıcılarına sahip her bir $\Phi_{k,\delta_k} = \Phi_{k,\delta}(y_k; z_{k,i_k})$ $(k \in e^i)$ fonksiyonunun $E_{n_k} \times E_1$'de yeterince düzgün ve sonlu bir fonksiyon olduğu ve $(n_k + 1)$ ölçülü

$$\left\{(y_k; z_{k,i_k}); \begin{matrix} 0 < y_k\delta_k \le 1 \\ 0 < z_{k,i_k}\delta_{k,i_k} \le 1 \end{matrix}\right\}$$

dikdörtgen prizma bölgesinden olduğu varsayılır.
Ayrıca $\Phi_{k,i_k} = \Phi_{k,i_k}(y_k)$ $(k \in e_s \setminus e^i)$ fonksiyonunun E_{n_k}'de yeterince düzgün ve sonlu bir fonksiyon olduğu ve (n_k) - ölçülü $\{y_k \in E_{n_k}\ ; 0 < y_k\delta_k \le 1\}$ dikdörtgen prizma bölgesinden olan $supp\Phi_{k,i_k}(y_k)$ taşıyıcılarına sahip olduğu varsayılır.
(37) ifadesi ile tanımlanan integral gösteriminin $G \subset E_n$ bölgesindeki taşıyıcıları, tepesi $x \in G$ noktasında bulunan $x + R_\delta(\vec{\sigma}; \boldsymbol{H})$ "$\sigma -$ *yarım boynuz*" olarak adlandırılır.

4.2. Yardımcı Fonksiyonların Bir Kümesinin İnşası.

Varsayalım ki $G \subset E_n$, $C(\sigma; H)$ bölgeler sınıfına aittir. Bu durumda tanıma göre "$\sigma -$ *yarım boynuz*" koşulunu sağlayan alt $G_1, G_2, \dots, G_N \subset G$ bölgeleri mevcuttur. Başka bir değişle

$$G = \bigcup_{\mu=1}^{N} G_\mu \tag{41}$$

Bu durumda tüm $(\mu = 1,2, \dots, N)$ için bileşenleri $\delta_{k,j}^\mu = \left(\delta_{k,1}^\mu; \dots; \delta_{k,n_k}^\mu\right)$ olan

$$\boldsymbol{\delta^\mu} = \left(\boldsymbol{\delta_1^\mu}; \dots; \boldsymbol{\delta^\mu}\right) \tag{42}$$

vektörler seti vardır. Öyle ki tüm $(j = 1,2, \dots, n_k)$ için $\delta_{k,j}^\mu = 1$ veya $\delta_{k,j}^\mu = -1$. Bu varsayımlarda tüm $\mu = 1,2, \dots, N$ için

$$G_\mu + R_{\delta^\mu}(\sigma; H) \subset G \tag{43}$$

olacaktır.
Şimdi ise (43) ifadesi ile tanımlanan bölgede $D^\nu f(x)$ fonksiyonu ile çakışan $\tilde{f}_{\nu,\mu} = \tilde{f}_{\nu,\mu}(x)$ yardımcı fonksiyonlar setini belirleyelim. Buna göre tüm $(\mu = 1,2, \dots, N\ )$ için

$$\tilde{f}_{\nu,\mu}(x) = \sum_{i=(i_1,\dots,i_s)\in Q} A_{i,\delta^\mu}^* f(x) \tag{44}$$

doğrudur. Burada integral operatörleri aşağıdaki biçimde belirlenir.

$$A_{i,\delta^\mu}^* f(x) = c_i \left(\prod_{k\in e_s\setminus e^i} h_k^{-\beta_{k,0}}\right) \int_{\vec{0}}^{\vec{h}} \prod_{k\in e^i} \frac{dv_k}{v_k^{1+\beta_{k,i_k}}} \times$$

$$\times \int_{E_{|\omega^i|}} dz \int_{E_n} \left\{\Delta^{2\omega^i}\left(z; G_\mu + R_{\delta^\mu}\right) D^{\bar{r}\ \ i} f(x + y)\right\} \times$$

$$\times\ \phi_{i,\delta^\mu}(\cdots)dy \tag{45}$$

Hatırlayalım ki (45) ifadesinde $i = (0, \dots, 0)$ sıfır vektör olursa o halde,
$D^{\bar{r}\ \ i} f(x + y) = f(x + y)$ olacağından dolayı integral altı fonksiyon $\mathrm{K}\left(\mathrm{G}_\mu + \mathrm{R}_{\delta^\mu}\right) \mathrm{f}(\mathrm{x} + \mathrm{y})$ biçiminde olacaktır. Burada $K\left(G_\mu + R_{\delta^\mu}\right)$ işaretlemesi $G_\mu + R_{\delta^\mu}$ karakteristik fonksiyonunu ifade etmektedir.

4.3.Teorem 3.1'in İspatı.

Varsayalım ki $G \subset E_n$ bölgesinin $\{G_{\mu,\varepsilon}\}$ örtüsü boyunca birim ayrılışı $\eta_\mu = \eta_\mu(x)$ $(\mu = 1,2, \dots, N)$ sonsuz diferansiyellenebilen fonksiyonlar sınıfı ile tanımlanır. Başka bir deyişle,

$$\begin{aligned} &0 \le \eta_\mu(x) \le 1, && x \epsilon E_n \\ &\textstyle\sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu(x) = 1\,, && x \epsilon G \\ &\eta_\mu x = 0, && G_{\mu,\varepsilon}\ bölgesinin\ \varepsilon\ civarı\ dışınd \end{aligned} \tag{46}$$

Ayrıca, varsayalım ki

$$\left|D^\alpha \eta_\mu(x)\right| \le Const \tag{47}$$

Burada $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha_1}; \dots; \boldsymbol{\alpha_s})$ her $(k = 1,2, \dots, s)$ için bileşenleri $\alpha_k = \left(\alpha_{k,1}, \dots, \alpha_{k,n_k}\right)$ olan negatif olmayan tam sayı vektörüdür. Bu durumda

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_s| \le |\bar{r}| + 2\omega$$

$\tilde{f} = \tilde{f}_\nu(x)$ devam fonksiyonu için aşağıdaki ifade doğrudur.

$$\tilde{f}_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu(x) \tilde{f}_{\nu,\mu}(x) \tag{48}$$

Bu ifade de $\tilde{f}_{\nu,\mu}(x)$ fonksiyonu (44) ifadesiyle belirlenir ve tüm E_n' de tanımlı olup, $G \subset E_n$ bölgesinde $D^\nu f(x)$ fonksiyonu ile çakışır.
(47) ifadesinden

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{L_q(E_n)} \leq c \sum_{\mu=1}^{N} \|\tilde{f}_{\nu,\mu}\|_{q,\,E_n} \tag{49}$$

yazıla bilir.
(44) eşitliği ve (49) eşitsizliğinden, $0 < h_i \leq H_k$ $(k = 1,2,\ldots, s)$ için aşağıdaki eşitsizlik ifadesi elde edilir.

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{L_q(E_n;\; s)} \leq$$

$$\leq c \sum_{\mu=1}^{N} \sum\nolimits_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} \left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}} \right) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<r^i>}(G_\mu + R_{\delta^\mu};\; s)} \tag{50}$$

Böylece sonuç olarak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{L_q(E_n\,,s)} \leq c \sum\nolimits_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} \left(\prod_{k=1}^{s} h_k^{\chi_{k,i_k}} \right) \|f\|_{L_{p,\theta}^{<r^i>}(G;\; s)} \tag{51}$$

Bu eşitsizlik ise

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{L_q(E_n\,,s)} \leq c\|f\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,\; s)} \tag{52}$$

ifadesinin ve dolayısıyla Teorem 3.1'in doğruluğunu ispatlar.

4.4.Teorem 3.2'in İspatı

Teorem 3.2'de (35) ifadesi ile verilen

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{\mathcal{L}_{q,\;\theta^*}^{<\rho>}(E_n;s)} \leq c\|f\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,\; s)}$$

eşitsizlikte, her $k = 1,\ldots,s$ için, bileşenleri $\rho_k = (\rho_{k,1},\ldots,\rho_{k,n_k})$ olan $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1;\ldots;\rho_s)$ vektörünün bir sıfır vektör olmasını durumuna bakalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{L_q(E_n;s)} \leq c\|f\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,\; s)} \tag{53}$$

Bu eşitsizliğin doğruluğu Teorem 3.1'de kanıtlanmıştır.
İnşa edilen

$$\tilde{f}_\nu(x) = \sum_{\mu=1}^{N} \eta_\mu(x) \tilde{f}_{\nu,\mu}(x)$$

devam fonksiyonunun fark özellikleri aşağıdaki eşitlikle verilir

$$\tilde{f}_{\nu,\mu}(x) = \sum\nolimits_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} A_{i,\delta^\mu}^{*} f(x)$$

Bu ifadedeki $A_{i,\delta^\mu}^{*} f(x)$ integral operatörü (45) ifadesiyle belirlenir. Böylece belirlenen $\tilde{f}_\nu = \tilde{f}_\nu(x)$ fonksiyonu tüm E_n'de ve G bölgesinde $D^\nu f(x)$ fonksiyonu ile çakışır. (44) ve (45) ifadelerinden hareketle

$$\|\tilde{f}\|_{\mathcal{L}_{q,\theta^*}^{<\rho>}(E_n;S)} \leq c \sum_{\mu=1}^{N} \|\eta_\mu \tilde{f}_{\nu,\mu}\|_{\mathcal{L}_{q,\theta^*}^{<\rho>}(E_n;S)} \leq$$

$$\leq c \sum_{\mu=1}^{N} \sum_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} \|\eta_\mu A_{i,\delta^\mu}^{*}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\theta^*}^{<\rho>}(E_n;S)} \tag{54}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu demektir ki Theorem 3.2'nin ispatı (54) eşitsizliğindeki

$\|\eta_\mu A_{i,\delta^\mu}^{*}(f)\|_{\mathcal{L}_{q,\theta^*}^{<\rho>}(E_n;S)}$ integral operatörlerinin her bir $i \in Q$ ve $\forall\mu = 1,\cdots,N$ için değerlendirilmesi ile verilecek. $\forall k = 1,2,\cdots,s$ için $0 < h_k \leq H_k$ olmak üzere Teorem 3.2'nin koşullarının geçerli olması durumunda aşağıdaki eşitsizlik doğrudur

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{\mathcal{L}_{q,\theta^*}^{<\rho>}(E_n;S)} \leq$$

$$c \sum_{\mu=1}^{N} \sum\nolimits_{i=(i_1,\ldots,i_s)\in Q} \left(\prod_{k=1}^{S} h_k^{\chi_{k,i_k} - (\rho_k,\sigma_k)} \right) \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\theta}^{<r^i>}(G_\mu + R_{\delta^\mu};S)} \tag{55}$$

Sonuç olarak, (52) ve (55) ifadeleri ile tanımlanan eşitsizlikler çalışmanın esas sonuçlarını ifade etmekte olup, $f \in B_{p,\theta}^{<r>}(G,s)$, fonksiyonunun diferansiyel fark özelliklerinin korunması şartıyla $G \in E_n$ bölgesinin dışına genişletilmesine olanak sağlar.

SONUÇ

Bu çalışmada tüm E_n'de tanımlı ve $G \subset E_n$ bölgesinde $f \in B_{p,\theta}^{\langle r \rangle}(G,s)$ fonksiyonu ile çakışan bir $\tilde{f}_\nu = \tilde{f}_\nu(x)$ inşa edilmiş ve bu fonksiyon için ilk kez

$$\|\tilde{f}_\nu\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(E_n,\; s)} \leq c\|f\|_{B_{p,\theta}^{<r>}(G,\; s)}$$

gömülme teoremleri biçimindeki integral eşitsizlikleri ispatlanmıştır

TEŞEKKÜR

Çok değerli katkılarından dolayı Prof. Dr. A.D. Dzhabrailov'a, Prof. Dr. Rabil Ayazoğlu'na ve Prof. Dr. Hafız Alisoy'a teşekkür ediyoruz.

KAYNAKÇA

[1] Sobolev S.L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics: Third Edition, American Mathematical Society, p. 286, 1991.

[2] Nikolskii S.M., Functions with dominant mixed derivative, satisfying a multiple Hölder condition, Sibirsk. Mat. Zh. 4, 1342-1364, 1963.

[3] Besov O.V., Ilyin V.P., Nikolskii S.M. Integral Representations of Functions and Embedding Theorems Nauka, Moscow. 1996.

[4] Burenkov V.I., Fayn B.L., Extension of functions from anisotropic spaces with preservation of class. Steklov Mathematical Institute, 150, 52-66, 1979.

[5] Besov O.V., Dzhabrailov A.D. Classes of functions with generalized mixed Hölder condition, Steklov Mathematical Institute, FTMN. 105, 15-20 1969.

[6] Amanov T.I., Representation and imbedding theorems for the function spaces S (r) p,θ B(Rn) and S (r)*p,θ B, (0 ≥ xj ≥ 2π, j = 1,..., n), Trudy Mat. Inst. Steklov. 77, 5-34, 1965.

[7] Dzhabrailov A.D., Kerimova G.T., On a new integral representation by multiple differential-difference characteristic. Proceedings news of the Academy of Sciences of Azerbaijan, SSR, FTMN. 4, 23-27, 1988.

[8] Maksudov F.T., Dzhabrailov A.D.,The method of integral representations in the theory of spaces, V.1 Baku “Elm”, p. 200, 2000.

[9] Kerimova G.T., Properties of differential functions with repeated difference- differential characteristic depending on multi-package variables. PhD Thesis , Baku, p. 127. 1997.

[10] Kerimova G.T., Dzhabrailov A.D., Alisoy H.Z., Doğushan Ş. Dahilolma (Gömme) teoremleri biçimindeki eşitsizlikler, CBÜ Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, Fen Bil. Seri (Matematik). 4, 31-37, 1998.

[11] Alisoy G.T., Alisoy H.Z. On integral representations of multi package variable functions, International Journal of Applied Mathematics, 11, 371-386, 2002.

[12] Alisoy G.T, Dzhabrailov A.D., Alisoy H.Z. Properties of functions in some weighted spaces, Applicable Analysis. 84, 405-417, 2005.

[13] Kudryavtsev S.N. Extension of functions from non-isotropic Nikol'skii-Besov spaces and the approximation of their derivatives, arXiv preprint arXiv:1703.09734, 2017.

[14] Mashiyev R.A., Cekic B., Avci M. Yucedag Z. Existence and multiplicity of weak solutions for nonuniformly elliptic equations with nonstandard growth condition, Complex Variables and Elliptic Equations. 57, 5, 579-595, 2012.

[15] Rabil M., Zehra Y., Sezgin O. Existence and multiplicity of solutions for a Dirichlet problem involving the discrete p(x)-Laplacian operatör Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 67, 1-10, 2011.

[16] Stasyuk S.A., Yanchenko, S.Y. Approximation of functions from Nikolskii–Besov type classes of generalized mixed smoothness, Analysis Mathematica. 41, 311-334, 2015.