Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi
Vol:48 No:1 Sayfa: 100-130
http://dergipark.gov.tr/cuefd

The Nature of Middle School In-Service Teachers' Engagements in Proving-Related Activities

Muhammed Fatih DOĞAN *

Adiyaman University, Faculty of Education, Adiyaman/Turkey

Article Info

DOI: 10.14812/cufej.442893

Article history:
Received 26.07.2018
Revised 15.11.2018
Accepted 16.01.2019

Keywords:
Mathematics teacher education,
Professional development,
Reasoning, justification and proof.

Abstract

Although reasoning and proof in learning and teaching mathematics is crucial and have gained more presence in school mathematics, both students and their teachers face great difficulties when engaging in proving activities. One potential cause for such difficulties might be due to teachers' conception of proof. However, to date, there are few, if any, studies that have examined how secondary school in-service mathematics teachers learn justification and proof. Thus, in order to fill this gap, this study examines secondary school in-service teachers' engagement in proving activities by providing observational data from a master's level professional development course that focuses on teaching reasoning and proof. The findings from this work show that teachers were very successful at engaging in exploration of the proving tasks, but they fail to produce complete-deductive arguments. Some reasons behind this failure were teachers' lack of a perceived need for justification and proof after exploring the task, and their lack of seeing algebraic symbolization as a viable means of expressing mathematical ideas.

Ortaokul Öğretmenlerinin İspatla İlişkili Etkinliklere Katılımlarının Doğasının İncelenmesi

Makale Bilgisi

DOI: 10.14812/cufej.442893

Makale Geçmişi:
Geliş 26.07.2018
Düzeltme 15.11.2018
Kabul 16.01.2019

Anahtar Kelimeler:
Matematik öğretmen eğitimi, Mesleki gelişim,
Akıl yürütme, gerekçelendirme ve ispat

Öz

Akıl yürütme ve ispat matematik öğrenmede ve öğretmede çok önemli olmasına ve okul matematiğinde daha fazla yer edinmiş olmasına rağmen, hem öğrenciler hem öğretmenler, ispatla ilgili etkinliklerde büyük zorluklarla karşılaşmaktadır. Bu tür zorluklara neden olan önemli potansiyel neden, öğretmenlerin ispat kavramı ile ilgili anlayışları olabilir. Buna rağmen ortaokulda görev yapan matematik öğretmenlerinin gerekçelendirme ve ispat kavramlarını nasıl öğrendiklerini araştıran çok az çalışma vardır. Bu nedenle, alan yazındaki boşluğu doldurmak için, bu çalışma ortaokul öğretmenlerinin akıl yürütme ve ispat ile ilgili etkinliklerle etkileşimlerine odaklanan yüksek lisans düzeyindeki bir mesleki gelişim dersinin gözlemsel verilerini incelemektedir. Bu çalışmadan elde edilen bulgular, ö ğretmenlerin ispat etkinliklerini çözmede oldukça başarılı olduklarını, ancak tümdengelimsel argümanlar üretmede zorlandıklarını göstermektedir. Bu başarısızlığın arkasındaki bazı nedenler, öğretmenlerin etkinliklere çözüm üretmeyi ispatı tamamlamak olarak görerek ispat yapma ihtiyacı duymamaları ve cebirsel ifadeleri (simgeleştirmeyi) matematiksel fikirleri ifade etmek için uygun bir araç olarak görmemeleri olabilir.

* **Author:** mfatihdogan@adiyaman.edu.tr
Acknowledgements: This research was completed to fulfill the dissertation requirement for a doctoral degree at the University of Wisconsin–Madison, under the advisement of Eric Knuth, in 2015.

Introduction

Proof is an essential aspect of mathematical activity given its roles in establishing the truth of mathematical statements (Tall andMejia-Ramos, 2006), explaining why such statements are true and convincing (e.g. Hersh, 1993; Hanna, 2000, 2018; Harel and Sowder, 1998), and promoting mathematical communication and development (Schoenfeld, 1994; Dogan, 2017). Proof can also be seen as a way of problem solving that removes doubt about the validity of mathematical statements (e.g. Selden and Selden, 2003; Weber, 2005; Harel and Sowder, 1998) and as a tool for learning mathematics (Knuth, 2002a; Dogan, 2015). Hence, proof is a crucial activity for mathematicians and an essential element of mathematical development because it both helps people establish mathematical truth and fosters mathematical learning (Stylianides, Stylianides, and Weber, 2017). Yet despite proof being viewed as a crucial mathematical activity, neither its various roles in mathematics nor its nature have permeated K-12 education or have been well understood by students (or in many cases, even their teachers) at all levels. Not surprisingly, policymakers (e.g., National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010; Mathematical Association of America [MAA], 2004) as well as mathematics education researchers (e.g., Ball, Hoyles, Jahnke, and Movshovitz-Hadar, 2002; Harel and Sowder, 1998; Hanna, 1990, 1995, 2000; Knuth, 2002a, 2002b) advocate for the increased prominence of proof and reasoning in the mathematics education of students at all levels. Thus, various stakeholders have suggested that proof should be a core activity in the curriculum at all levels, and that instructional practices should be developed to help students understand the nature of proof as well as its various roles (e.g. Martin, McCrone, Bower, and Dindyal, 2005; Stylianides and Stylianides, 2009; G. Stylianides, 2008; A. Stylianides, 2007; Dogan, 2015; Ozgur, Ellis, Vinsonhaler, Dogan, and Knuth, 2019). Both of the influential mathematics education documents the *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSO, 2010) and the *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) espouse similar messages about the importance of proof. CCSSO notes the abilities to justify and reason about mathematical statements as critical aspects of mathematical proficiency. NCTM advocates for proof as an essential part of mathematical reasoning, stating that instruction focused on reasoning and proof from prekindergarten through grade 12 should enable all students to learn and understand mathematical proof.

The foregoing roles of proof in mathematics education underscore the need to help students develop their competencies and understanding of mathematical reasoning and justification. As the main resource for their students, teachers need to be capable of integrating proof into their classrooms and have to be well prepared to help their students with learning proof. However, one important concern in teaching and learning reasoning and proof is whether teachers are well prepared to integrate proof related practices in their daily instructional practices. Indeed, Knuth (2002b) proposed “the greatest challenge facing secondary school mathematics teachers is changing both their conceptions about the appropriateness of proof for all students and their engagement of corresponding proving practices in their classroom instruction” (p. 83). The existing literature on not only students’ conceptions of proof but also their teachers’ conceptions of proof indicates significant deficiencies in their understanding and learning of proof at K-12 level. In order to make proof a meaningful practice for students in K-12 mathematics education, we need to first help teachers learn reasoning and proof, so that they can be well equipped to provide their students with meaningful experiences with proving at K-12 level. Given the importance of the role that teachers play in teaching and learning proof related practices, this study aims to shed light upon the process of in-service middle school mathematics teachers’ learning of proof in a graduate level professional development course. The results will directly contribute to the field’s understanding of how teachers learn and enact proof, which will in turn change the way proof-related professional development is conducted. These results will, at one step remove, improve students’ understanding of mathematical proof, through the teachers’ improved proof practices.

Proof and In-service Teachers

Proof has received significant attention in mathematics at all grade levels, and is expected to be an important part of every student's education. However, the corpus of existing literature on learning and teaching proof indicates that students at all grade levels (K-16) struggle to understand and construct proofs (e.g. Chazan, 1993; Harel and Sowder, 1998, 2007; Moore, 1994; Porteous, 1990; Weber, 2005), and that teachers often have difficulty effectively fostering students' learning to justify and prove (Knuth, 2002b; Bieda, 2010). A number of reasons students struggle with proof have been suggested, including that students (a) do not understand the importance of proof (Chazan and Lueke, 2009; Herbst and Brach, 2006), (b) are not able to articulate their mathematical knowledge (Moore, 1994; Tall and Vinner, 1981; Schoenfeld, 1994), and (c) do not feel comfortable with mathematical activities (Alibert, 1988). The bottom line is that proof is not an easy concept for students to grasp.

In addition to students' difficulties with learning proof, the research literature shows that many teachers find the teaching of proof difficult, often due to their beliefs about teaching proof and their perceptions that proof is not a mathematical practice that can be integrated into the curriculum at all grade levels (e.g., Knuth, 2002b, 2002c). As Bieda (2010) notes that teachers need to deepen their own knowledge of proof in order to foster students' understanding of proof and justification. Thus, the recent call to make reasoning and proof central to mathematics education at all levels introduces a new challenge for teachers. Many in-service K-8 teachers (even K-12 teachers) often lack (a) the content knowledge needed for teaching proof, (b) the ability to recognize and support proof practices, and (c) an adequate understanding of the purposes (roles) of proof in learning mathematics.

Teachers' Conceptions of Proof

Most of the literature has investigated teachers' conceptions of proof, (e.g., producing empirical vs deductive arguments), their notions of proof, and their beliefs about proof. Knuth (2002a, 2002b) used survey and interview data to investigate secondary school in-service mathematics teachers' conceptions of proof. He found that most teachers at the secondary level were more convinced by empirical arguments than deductive ones. Additionally, many teachers were not able to distinguish between proofs and non-proof arguments, as they frequently accepted invalid arguments as proof. Teachers mostly focused on surface features (such as correctness of algebraic manipulations), rather than deep features (such as nature of proof, logic, etc.) and found arguments convincing based on concrete features, specific examples, and visual representations. Teachers did not see proof as a central mathematical practice of school mathematics—except possibly for advanced students. And, they believed only informal proof should be a part of the mathematics curriculum; they did not favor an emphasis on formal (symbolic-algebraic) proof.

Martin and Harel (1989) investigated pre-service elementary school teachers' abilities to assess the validity of mathematical arguments by asking them to evaluate various arguments and rate each argument. Like Knuth (2002a, 2002b), they found that many teachers accepted empirically-based arguments as proof. The authors also found that the form of argument affected whether or not teachers accepted a given proof. For example, teachers were likely to accept algebraic-symbolic proofs as valid without focusing on the validity of the actual argument. These studies add to the evidence that many teachers neither understand the role of proof nor the importance of proof for learning and teaching mathematics because they do not have the adequate content knowledge of proof (e.g., Chazan, 1993; Simon and Blume, 1996; Harel and Sowder, 2007). Clearly, this is problematic for teaching proof. Thus, it is important that mathematics teachers have well-founded knowledge about proof in order to help their students develop an adequate understanding of proof.

Instructional Proof Practices

Ball and colleagues (Ball, Hoyles, Jahnke, and Movshovitz-Hadar, 2002) suggest that instructional practices that emphasize justification and proving as a means to develop mathematical understanding in school mathematics should be promoted. They note that teaching proof just as formal proof based on deductive reasoning may reinforce the view of proof as a ritual without meaning, and may cause students to misunderstand the meaning and purpose of learning proof. Ball and colleagues suggest that proof-related instructional practices require a teacher to: (1) select mathematical tasks that both meet students' needs and provide opportunities for students to develop mathematical reasoning, (2) make mathematical knowledge public and scaffold the use of mathematical knowledge and language, and (3) establish a classroom culture with norms that help students share their mathematical ideas and respect others. Enhancing these practices in the classroom requires substantial effort on the part of teachers, since they are responsible both for ensuring their students have the opportunities to engage in proving activities, and for fostering students' development of an adequate understanding of proof. However, there is a lack of research related to the instructional practices involved in teaching proof. Bieda (2010) states that the field of mathematics education still knows very little about how proof is taught in school mathematics and in supporting in-service teachers in their understanding of proof and proof practices. In particular, little is known about the kinds of instructional practices involved in justification and proving activities, and what students learn during their engagement in these various kinds of practices.

In summary, it is important to understand teachers' knowledge about proof in order to move the field forward in ways that will support teachers both in extending their own knowledge about teaching proof and in strengthening their ability to develop students' understanding of proof. To foster student understanding of and facility with proof, teachers first need to increase their own knowledge and understanding of proof. One way of increasing teachers' understanding of proof is to have them attend professional development courses that can help them develop adequate understanding and skills for teaching proof. A goal of this article is to describe the results of a study that examined in-service middle school teachers' learning of proof in the context of a professional development course.

Definition of Proof

The mathematics educators Alibert and Thomas (1991) define proof "as a means of convincing oneself whilst trying to convince others" (p. 215) and claim that the formulation of conjectures and development of proofs are the basis of mathematics. Similarly, Bell (1976) defines proof as "an essential public activity" (p. 24) in which a person convinces himself/herself or others, beyond doubt, about the truth of propositions. Stylianides (2007) provides a definition of proof that aligns with mathematicians' conception of proof and gives emphasis to the sociocultural aspects of students' proving activities in school mathematics.

Proof is a mathematical argument, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

> 1. It uses statements accepted by the classroom community (set of accepted statements) that are true and available without further justification;
>
> 2. It employs forms of reasoning (modes of argumentation) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
>
> 3. It is communicated with forms of expression (modes of argument representation) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community. (p. 291)

Proof is conceptualized here as a learning activity with social character (Alibert and Thomas, 1991) in mathematics classroom communities where learners communicate their reasoning, represent their arguments, and justify their arguments (Jones and Herbst, 2012). Thus, proof is seen as a mathematical argument that consists of a connected sequence of assertions about a mathematical claim and a norm for communicating mathematical arguments in ways that develop what counts as acceptable proof in a classroom community.

Research Purpose and Questions

Considering that a teacher's conception of proof has the potential to be very important in the kinds of argumentation that he or she might facilitate in their classroom, it is important that mathematics teachers have well-founded knowledge about proof in order to communicate an adequate understanding of mathematics to their students. However, to date very little, if any, focused how in-service mathematics teachers learn the required knowledge to teach justification and proof.

The research reported in this paper aims to fill this crucial gap and involves an observational study of a mathematics professional development course for in-service elementary and middle school teachers with a focus on the teaching and learning of proof. Thus, one important purpose of this study is to explore the nature of mathematical practices related to proof while in-service teachers engage with proving activities. The primary question the study seeks to address follows:

What is the nature of the teachers' engagement in proving-related activities?

In addressing the research question, the study considers various aspects related to the teaching and learning of proof, including: how teachers explore a given task, develop conjectures, and produce justifications.

Method

Case study methodology was used to investigate and document in detail the teachers' engagement in proving-related activities. Creswell (2007) describes case study as a methodology that involves "the study of an issue explored through one or more cases within a bounded system (a case)" and explores a case or cases over time through detailed, in-depth data collection that involves multiple sources of information and reports a case description and case-based themes (p. 73). Case study methodology is both useful and appropriate for addressing this research question as case study is both descriptive and explanatory (Yin, 2006).

Context

The context for this study is a university-based professional development (PD) course, titled "Mathematical Knowledge for Teaching: Reasoning, Justification and Proof," designed to engage in-service middle school teachers in proof-related activities as a means for developing the mathematical knowledge and skills needed for effectively teaching proof in middle school classrooms. The 14-week course was offered recently at a major research university in the Midwest, USA.

The course focused on in this study emphasized experimentation, conjecture, generalization, reasoning and justification. Throughout the course, the teachers were expected to engage in a variety of in-class and out-of-class activities to help them think through and make sense of the proof-based activities in multiple ways. The teachers had to complete a weekly two-part homework assignment outside of class that summarized and extended the content discussed during the previous class session, and prepared them to engage in the topics that were the focus of the next class session. Examples of the tasks used both in and outside of the class are given in the analysis section. Space constraints prevent more detailed description of the course activities.

Participants

The primary course instructor, Jane[*], was a mathematics teacher educator who was assisted by a middle school mathematics teacher leader from the participating school district, as well as by an instructor from the university's mathematics department (who served as a mathematics consultant). Prior to teaching this course, the primary course instructor, Jane had taught mathematics PD courses

[*] All subject names are pseudonyms.

focused on mathematical knowledge for teaching (MKT) for more than five years, including courses in another middle school math specialist program.

The twelve teachers (11 female, 1 male) enrolled in the course had been teaching for an average of nine years and had experience teaching mathematics at the secondary level.

Data Collection

The primary source of data was classroom observations, with additional sources of data consisting of classroom artifacts and tasks. The artifacts included teacher work in the class, instructor pre- and post-reflection of the class, and teachers' reflections of readings and class. All classroom meetings were observed for the entire 2014 Fall semester (a total number of 13 observations, each for three hours). During the observations, notes were taken about what was written on the board and by whom, how the instructor presented the content and the motivation offered for the content, what types of tasks were presented and how those tasks were used, and how the discussion around the content and the tasks happened. Observations consisted of taking field notes and video and audio-recordings of the classroom activity.

Data Analysis

An initial stage of analysis consisted of writing a reflection about the classroom observation after each session; these reflections highlighted interesting aspects of the session and linked practices occurring across multiple sessions. The bulk of the analysis process involved looking for themes in the classroom observations, field notes, and artifacts, including teachers' work, and reflections written by instructor and teachers. Glaser and Strauss's (1967) constant comparison method was used to analyze the classroom practices in terms of making sense of what happened in the classroom. The goal was to identify regularities or patterns in the PD instructors' and teachers' interactions.

This analytical process consisted of three main stages. During the first stage, the transcripts were enhanced, that is, all relevant activities including the participants' gestures during the discussions and written work on the board were incorporated into the video transcripts. In the second stage, the analytical process distinguished episodes based on the nature of teachers' engagement in the proving-related activities. This phase included classifying the classroom discussions into exploration phase and justification phase. During the final stage, utterances within classroom discussions were coded by using a constant comparative method (Glaser and Strauss, 1967), focusing on aspects of the teachers' and instructor's involvement in the discussion such as questioning designed to push teachers for justification and proof (e.g., asking teachers to give an example of their arguments during the proving activity). In addition to open coding, the definition of proof presented by Stylianides (2007) provided an analytical framework to decide what counts as valid justification and proof by applying the three characteristics of a valid mathematical proof (set of accepted statements, modes of argumentation, and modes of argument representation). After completing these analytic stages, main themes or patterns were identified in the data and created broad categories and/or combinations of categories which illustrated how the teachers learned to prove in the course by focusing on various aspects related to the teaching and learning of proof.

To check the reliability of the coding scheme, a second mathematics educator read and coded a 25% sample of the classroom observation data. The inter-rater reliability for the coding scheme was approximately 90%. The disagreements were discussed and resolved by comparing the codes, and data were re-coded as appropriate.

Results

Classroom observations of the PD course revealed how in-service teachers engaged in proving activities. This section presents the results of the study and is organized by the main guiding research question. Included in this section is a general representation of the teachers' engagement in proving activities, including frequency counts for the relevant themes as well as representative excerpts from the classroom discussions. In the reporting of these results, the themes are identified based on whole classroom discussions rather than individual teachers' contributions.

Nature of Teachers' Engagement in Proving Activities

In the following sub-sections, the two phases of proving-related activity (exploration, and justification and proof) are described and discussed. Although the analysis of each phase is written separately for clarity, it is important to note that in most cases, these phases of proving-related activity are interrelated and often did not occur as separate and linear activities.

Exploration of problem or conjecture. Teachers were given 11 different proving tasks to explore during the first seven weeks of the class: nine problems for which they were expected to develop conjectures and two conjectures that were provided by the instructor. After explaining the task, Jane typically asked teachers to work in their groups and come up with an argument to present to the whole class justifying their conjectures. As will be discussed in detail below, teachers often *searched for patterns*, *identified patterns*, *developed conjectures*, *made generalizations*, and *provided explanations and justifications* about their claims. They also often used examples to make sense of the tasks or conjectures, and used different types of representations while exploring the tasks.

To discuss the proving-related activity codes and nature of their engagement in exploration phase, a classroom excerpt is presented below. The task is chosen as representative of a typical example of the teachers' engagement in proving-related activities because it highlights not only the ways in which they explored the task and generated conjectures, but also exemplifies the general themes in their engagement. The teachers spent around 2 hours working on the task during the first week of class. Teachers were presented with the 'Weights Problem' task, used to motivate the binary number system, in their groups and were asked to develop conjectures about the task.

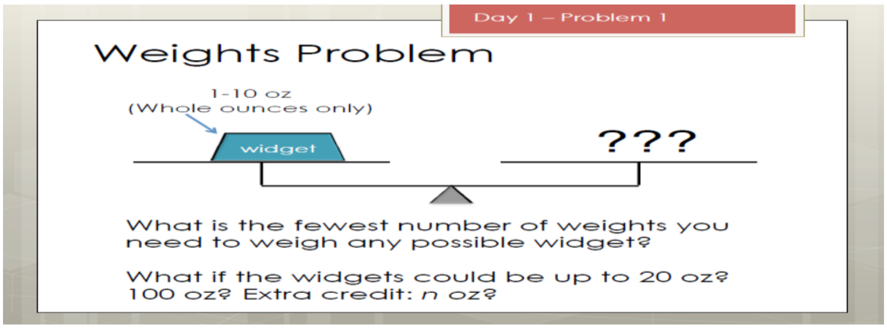

Figure 1. Weight Problem Tasks

In engaging with the task, each group identified potential combinations of weights that would work, and all of the groups used a trial and error approach in the case of weights up to 10 ounces. However, the groups did not focus on finding the least number of weights required (the question posed in the task). They quickly moved on to the cases of 20 ounces and 100 ounces, coming up with different combinations of 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, and 50 with every group using 1, 2, 3, and at least one multiple of 10. None of the groups, however, were close to uncovering the most efficient binary method (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64) or to generalizing the patterns they noticed, so Jane asked them to investigate whether they could use just 7 weights in order to determine the weight of any widget between 1-100 ounces. After working in their groups for a while, none of the groups arrived at the desired binary solution method and the teachers started asking clarification questions about the task.

In one group, Jane's pressing to use 7 weights did help Lora come up with a new combination for 1-100 ounce widgets (1, 2, 3, 7, 14, 28, 56). Jane then asked the class to discuss Lora's solution. The teachers noticed the doubling aspect of her method for weights after 7, but they could not explain the doubling pattern starting at 7 or how that combination worked; rather they tested her method for a number of examples to see if they could weigh all possible widgets for 1-100 oz. At this point, Jane asked Lora to explain her reasoning:

> Lora: Well I thought you know, are there any numbers in between those, are you wasting any numbers by going over I guess, so I started thinking, what can I make with what I've got so far, so with the 1, 2 and the 3, I started there, I can make 6, so I need a 7 so then I said…and with the 7 I can make a recombination adding all those together, so 7, 10, 12. I can add up to 13, so now I need a 14, so from 14 I can add all those combinations all together and get to 27, now I need a 28, and then 28 adding all those together I get to 55, now I'm close to that 100 right?, so I'm going to need one more number and that's going to be 56.

She had just provided an explanation about what she did, but did not provide a justification about how or why her method worked. Without asking for further justification, Jane asked the class to start from 1 by using the same reasoning and then led them to see that the method actually builds up the powers of 2.

> Kim: it'd be 2 then and then you can make a 3,
>
> Anne: We have 3, so we need a 4…now we can make 5…we can make 6, we can make 7
>
> Jane: so what we need next?
>
> Kim: so we need an 8
>
> Lora: 16, now we're doubling, we're almost doubling… 32

Lora recognized doubling aspect quickly here, which suggests she had developed an understanding of the importance of doubling in prior reasoning which served for class as a foundation for making this leap here. As a result of whole classroom discussion, the class came up with 1, 2, 4, 8, 16, 32, and 64 weights to get any widgets from 1-100 oz and they quickly recognized a doubling pattern and said "it is the same thing [meaning same as Lora's reasoning]; you are always doubling, except you don't need 3." Thus, by noticing the doubling aspect (*identifying a pattern*) of her method, they made a quick generalization (*make generalization*) for the binary method. During the seven weeks, teachers *searched for patterns* eight times (note that *searching for pattern* is only coded when the teachers specifically mentioned that they searched for pattern during the whole classroom discussion) and then *identified patterns* (20 times) while exploring the task and *identified a structure* (20 times) during the conjecture exploration. After identifying a pattern or structure, the teachers tried to *make generalizations* (29 times) during the exploration phase.

Although teachers made generalizations numerous times, justifications or proofs of these generalizations were infrequently developed. For example, Kim explained her generalization for the pattern, but did not provide any justification about why the generalization works or whether it will always work:

> Kim: I can see the pattern in what we did kind of right behind your head [pointing to 1,2,4,8,16,32,64], where we get into the exponential like notation of all of it, so that you start to see that it's like if n is the stage that you're looking for, that would be 2 to the n minus 1, to figure out all of those, so that would work to get you to 1000…

Generalizations such as Kim's were frequently accepted by the classroom community as justifications or proofs, despite the inability of the teachers to appropriately justify *why* such generalizations were mathematically legitimate. Jane would often follow up by asking the teachers questions whether such generalizations were sufficient as justifications or proofs. For example, Jane asked Kim to explain why the generalization works for 1000 by asking, “how would that work for, walk us through what that looks like for a thousand.” Kim claimed that for the 1000 oz widget “it would be 2 to the 1000 minus 1 power so it would be 2 to the 999.” Although the discussion of this generalization, and Jane's continued attempts to push for justifications and proofs, the teachers were only able identify various patterns and develop several conjectures, and they continued to not develop justifications or proofs.

Teachers focused on explaining how their conjecture worked in general with examples, however, their explanations were more sophisticated than previous explanations as seen in the excerpt below:

> Jane: so what's the maximum weight we can measure with those?
>
> Clara: …it's the number that everything prior to it, plus it, adds up to, and the next number, and the next number is the next power up, right? so if 2 to the 5th, if everything up to 2 to the 5th equals 63, including 2 to the 5th, then 2 to the 6th has to be 64, right? and so when you need to get to say 325, you need to get to the point where that power plus everything above it has to be equal or greater than 325, right?

As seen from the example above, teachers *used examples* as mean of explaining their ideas excessively (in total 58 times use of examples coded) during the exploration phase of proving activity.

During the exploration phase of proving activity, teachers *developed conjectures* (26 times) and further explored those conjectures. For example, while explaining why Anne’s answer would work, Carol identified a new pattern by stating: “2 to the third is where you get 10, 2 to the 6th is where you get a hundred, so I can see a pattern with the 3 6 and 9”. By extending Carol’s reasoning, Kim developed an explicit conjecture and provided a justification for it:

> Kim: and 2 to the 9th gives you a thousand…you need 3 additional weights to get to the next power of 10, so to get to a 1000, you need 3 additional weights to get to 10, so whatever the next well, after a thousand, 10,000 then you would need 3 additional weights

Kim’s justification relied on example-based reasoning from recognizing a pattern. The class did not further explore why the conjecture always works as the majority of the subsequent discussion revolved around obtaining powers of 10 and the corresponding patterns. Although this later discussion led to teachers making additional generalizations, it also drew the class away from the central idea that *any* positive integer can be represented as a sum of the patterns of 2. Moreover, the teachers did not produce justifications about why their generalizations should always work. Thus, as seen above, teachers quite often identified a pattern or structure, developed conjectures, and made generalizations, but less often produced justifications and proofs.

In summary, the excerpts presented above illustrate the nature of the teachers’ engagement in a task for which they were expected to produce justifications and proofs. The results show that teachers were often able to successfully engage in the exploration phase, and that the tasks used in the PD provided rich opportunities for them to identify patterns and the underlying structures, develop conjectures, make generalization and rarely produce justifications. Teachers also used examples to explore the tasks and to explain their reasoning. Frequently missing in their work, however, was the production of justifications or proofs for their claims. Specifically, after identifying a pattern or underlying structure and making a generalization, teachers did not seem to see a need to produce a justification and proof for their claims (except in cases in which the instructor pushed for it). The main reason why they did not see the need to produce a justification might be that they did not have the conceptual tools, such as lack of understanding the function of proofs and lack of understanding the mathematical content that may enable them to make deductive arguments.

Categorization of justification and proofs. The second phase of proving activity focuses on the justifications and proofs that teachers developed. Overall, teachers produced a variety of justifications, and they could be categorized into main three types. If a teacher's justification satisfied Stylianides' (2007) three aforementioned characteristics of a proof, it was coded as a *complete deductive argument;* if a justification had characteristics of a deductive argument, but was not complete in terms of the mode of argumentation or failed to account for all possibilities in the domain it was coded as an *incomplete-deductive argument*; or if the justification relied on empirical evidence to support the claim, it was coded as an *example-based argument*. In this last case, although teachers were aware of the limitation of examples (further discussed later), they still produced such justifications.

In the excerpts presented below, the three different types of justifications are illustrated as teachers worked on one particular task in which they explored the following conjecture:

Julie notices that $n^2 + n$ is even when n is 1, 2, and 5.
She wonders if this is true for all natural numbers, n, or if the pattern will break down. Is it true for all n? If so, why? If not when does it not work?

After exploring Julie's conjecture, teachers presented their arguments to the whole class, arguments that were mostly example-based. The following arguments are representative of the example-based arguments teachers produced.

> "Bess: Well just plugging the numbers in the formula, and noticing that every time, um. No matter if you add odds or even numbers you always end up with an even number…And we kinda just threw in some other random numbers, like 11, just try to, you know, just to see if it's still true or not…"
>
> "Jack: … I…kind of had the same idea [pointing Beth's argument]. Like, on my paper I also made a table of values and plugged in values for n and then noticed that n squared plus n was also always an even number…"

Here, Bess and Jack seemed to be convinced by testing a few examples and seemed to believe it will always work for any number, and neither explicitly acknowledged the limitation of their arguments.

The following excerpt is representative of an incomplete-deductive argument, but in this case the teacher relies on a generic example (a particular example that reveals the general structure of reasoning without relying on the properties of the particular example) in making her generalization.

> Kim: …Um, so what we did is we looked at all of, kind of like the groups of two that exist within, uh, the factored—that—or, with the number that we're squaring, so like with 5, that could be broken into 2+2+1 and like if you distribute that you'd get 10+10+5. So you have, you know, these groups of 2, with their—I don't—um, that. And then you have these two odd numbers and we know that when you take an odd number and add it to another odd number, you get an even number. So you're adding—
>
> Mandy: that five…
>
> Kim: That five to what you get—25—here. But, like, this is where those couples are. Is right there. And that works—I don't—it was—it took a long time.

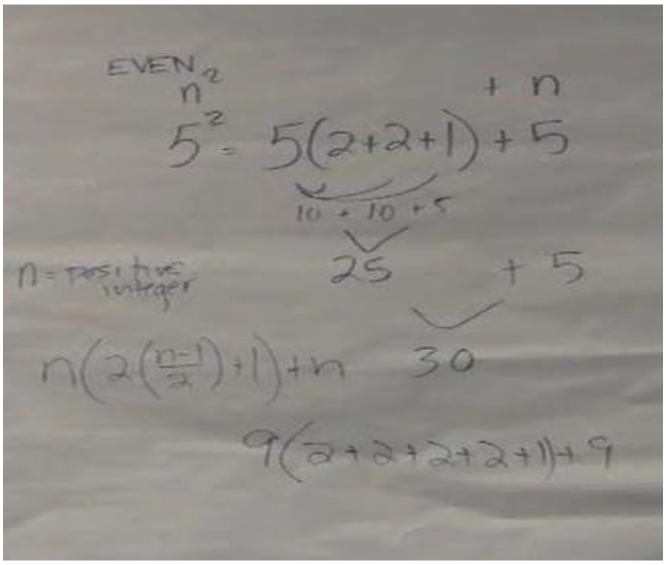

Figure 2. Kim's poster

Jane asked her to use nine as an example to explain her justification, and Kim provided a similar explanation to that used in her explanation of her initial example. Here, she used definition of odd numbers as "groups of two plus one more".

> Kim: Nine times, and then it would be 2 plus 2 plus 2 plus 2 plus 1. Plus a 9 [at the bottom of her poster]. So that's 2, 4, 6, 8, yeah, I think that'd be 18 plus 18 plus 18 plus 18 which are all divisible by 2, plus that 9, plus that 9.

Yet, both Jane and the class were not fully convinced with the argument. As a follow up, Jane asked Kim if her representation was general for all odd numbers. Kim said that "I worked this back and forth to get *n* squared plus *n* a couple of times and every number I checked, which has not been many—I checked just 5 and 7, just to make sure, um, it got me there." One important aspect of a generic example as a valid justification is that it must contain language that demonstrates that it applies to more than just the particular example. Kim generalized her example to all numbers by using algebraic-symbolic representation, but did not provide a valid justification about how and why her argument should work for all numbers. Instead, she relied on example-based reasoning in testing her representations for 2 numbers. Therefore, even though she had a general representation for all numbers, this argument did not involve a successful mode of argumentation because she did not produce a justification that was accepted by the classroom and sufficiently covered all cases. Thus, it is an incomplete-deductive argument. During the seven week period, teachers produced incomplete-deductive arguments nineteen times which was the most commonly produced argument type.

Finally, teachers produced complete deductive arguments six times during the seven weeks observed. Some of these arguments were proofs based on generic examples and some were algebraic proofs (based on symbolic representations). All deductive arguments involved some level of algebraic-symbolic representation. For example, teachers tried to use algebra, even if they had a valid generic example argument. The following excerpt is a representative of a complete-deductive argument.

> Lora: Okay. So...I—I guess I'm thinking of it as two equal pieces. Dividing it up into two. Um, so I took the *n* squared plus *n* and I let 2*n* represent my *n*, um, so will be an even number. So, *n* squared plus *n*—2*n* squared plus 2*n*—takes you down to, um, this, which can be factored out with another 2*n*. So, again, we're always going back to that two equal pieces. You're multiplying by 2, you can divide it into two parts, pair them up. Um, so an even times an odd will give you

an even. So here's an even, here's an odd, multiply those together you get an even. That make sense? ...Okay. Um, so then if it was an—*n* was an *odd* number, which is 2n *plus* 1, then n squared plus *n* takes you all the way into something that you can factor into two again. So that would be—also be an even number because, um, 2 is a factor of this.

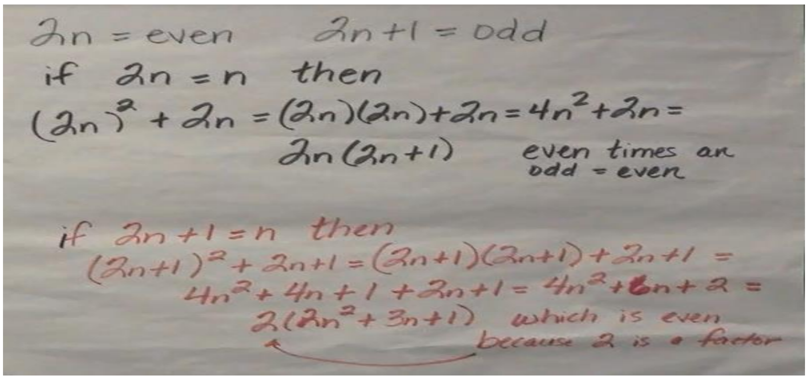

Figure 3. Lora's poster

Here, Lora first defines the terms (*set of accepted statements*), she then uses algebraic-symbolic representations to present her argument (*set of argument representations*), and finally explains her argument (*mode of argumentation*). Even though she had a flaw in her representations (i.e., she defined even numbers as 2n, and then said 2n=n), her argument was coded as a complete-deductive proof since it met the criteria for being a valid proof.

Discussion

To date, a number of researchers have provided insight about pre-service and in-service teachers' conceptions of proof, such as their inability to identify valid mathematical arguments, their lack of skills in producing valid justifications and proof, and their lack of content knowledge to teach proof at the K-12 level (e.g, Knuth, 2002b, 2002c; Bieda, 2010). This study contributes to this literature by providing insight into how in-service middle school teachers engaged in proving activities during a professional development course specially designed to improve their content knowledge of learning and teaching proof. The primary findings highlighted that teachers were meaningfully engaged in various aspects of proving-related activities (exploration, justification and proof)—a finding that suggests the kind of tasks used in this class may be productive for engaging teachers in proving-related activities and may potentially help them to engage their own students in such activities. All in all, although not provided in the presentation of the results, there was a modest improvement in teachers' proving competencies occurred during the course by engaging in all phases of proving activity. Considering the literature that shows teachers' difficulties in justification and proof, these improvements are important and promising because they show that a professional development course might actually help teachers and show that they are capable of overcoming these difficulties. The results also suggest, however, that there is plenty of room for improvement, especially in terms of teachers' understanding of what counts as a valid mathematical argument, how to construct a deductive argument, and how to evaluate arguments. The fact that teachers had difficulties engaging in the proving-related activities was not surprising considering the literature on teachers' conceptions of proof. It is also noteworthy that this latter result is reflective of teachers' own classroom practices related to proving—teachers provide students with the time and opportunity to engage in the exploration phase of proving-related activity, but tend not to push their students to produce deductive arguments or to evaluate arguments (Bieda, 2010).

The results of this study revealed several factors regarding teachers' engagement with proving-related activities that constrained their development of more mathematically sophisticated discussions of justifications and proof. As illustrated previously, these factors include lack of a perceived need for justification and proof (from exploration phase) and lack of seeing algebraic symbolization as a viable means of expressing mathematical ideas (from justification and proof phase).

Need for Justification and Proof

The final production of a justification or proof may involve a progression through several phases, including exploration of the task, identifying patterns and making generalizations (developing conjectures), and producing mathematical arguments to support one's claims. Polya (1954) identified the exploration phase as plausible reasoning, reasoning which is based on guessing and trying by gaining insight 'in the making' process. Although this process is not a proof in and of itself, it is a crucial part of producing a proof. Polya described proof as a result of this exploration phase and defined proof as "demonstrative reasoning." The whole process of exploration and proof making, 'proving activity,' is seen as a tool for learning mathematics. The nature of teachers' engagement in proving activity revealed a similar process; they explored tasks by identifying patterns, making generalizations, and developing conjectures. Interestingly, teachers sometimes believed that a pattern was enough of a justification and proof and did not see the need for producing further justification and proof. Thus, teachers were often successfully engaged in the exploration phase, but rarely finished the whole proving activity. Identifying patterns and making generalizations is certainly a starting place for proving activity, but teachers should also be expected to reason about why a generalization is true.

It is important to note that all of the middle school teachers attending the PD course were using the Connected Mathematics Project (CMP) curriculum with their own students. Stylianides (2005) found that 25% of tasks in CMP that are designed to engage students in proving activities involved pattern identification. Thus, pattern identification tasks are an important part of the teachers' curriculum and can be a way of learning to reason structurally. The point is that some researchers feel that CMP really over-emphasizes pattern identification in proof activities (e.g. Stylianides, 2008; Stylianides and Silver, 2009; Bieda, 2010), thus it's no surprise that these teachers are mainly focused on finding patterns and making generalizations and not progressing further into justification and proof. Moreover, it's also not surprising that their own students often develop the similar conceptions. In order to foster their students' abilities to reason structurally and explain why a pattern or generalization holds, teachers first need to experience such learning and develop this understanding for themselves. Another potential problem with pattern recognition and generalization without providing justification and proof is that students might solve problems correctly but not able to explain why their strategies work. In other words, they might be able to successfully engage with the exploration phase (plausible reasoning) of proving activity, but might not be able to produce justification and proof (demonstrative reasoning).

Since pattern recognition could be based on a few examples, this might cause students to rely on examples and to believe example-based arguments are proofs. For example, Jane often did not push teachers if their answers were correct, which may cause learners—students and in-service teachers— to think 'being right means you don't have to justify' your answers. In order to prevent this kind of situation, teachers should ask students to explain why they think their patterns and generalizations work regardless of whether their answers are right or wrong. Also, teachers should provide some tasks, such as false conjectures, where students can identify patterns that break down after a point.

Use of Algebra

Algebraic or symbolic representation is an important tool to express mathematical ideas and to present justifications and proofs. However, the literature shows that K-12 students do not use algebra to develop and present their arguments, even for valid mathematical arguments (e.g., Bell, 1976; Healy and Hoyles, 2000; Porteous, 1990; and Knuth, Choppin, and Beida, 2009). Porteous (1990) stated that it is "disappointing to find an almost total absence of algebra" in students' arguments (p. 595). Similarly, Knuth at al. (2009) found that just a few students attempted to use symbolic algebra as justification and proof. Healy and Hoyles (2000) found that students prefer to express their arguments informally (in a narrative style) rather than formally (in symbolic style) and rarely used algebra in their arguments. Some potential reasons behind not favoring algebraic symbols might be that the symbols offer students very little information about why something is true and they may find it difficult to follow the formal (algebraic) arguments (Healy and Hoyles, 2000), or they may not see algebra as a viable means of expressing their general arguments (Knuth et al. 2009). Similarly, the teachers in this study also did not find algebra very useful when engaging in proving activities. Even though they used algebra to represent their patterns and generalizations, they found arguments that included symbolic representations abstract and meaningless, especially if the same argument could be presented using visual representations.

Teachers' preferences to use more visual representations and less algebraic symbols while engaging in proving activity again reflect students' uses of visual and algebraic representations. The literature has suggested that students' lack of using algebra in their arguments is related to their limited understanding of algebra and not having the cognitive resources to use symbolic representations. In the case of the teachers in this study, they also preferred not to use algebra, which could be a contributing factor regarding students' limited use of algebra while engaging in proving activities.

Because of the abstract nature of algebraic representations, teachers might use visual representations to make proof more accessible to their students, but this does not imply that students develop an understanding of proof. Rather, it might cause a misconception in students' notion of proof. Therefore, teachers should emphasize the importance of using algebraic symbols in mathematical activities and need to reinforce that algebraic symbolizing is useful for developing justification and proof. One other suggestion would be that both teachers and researchers should work on figuring out ways to more carefully connect visuals and algebraic symbols. If teachers and students prefer visual representations in their proving activities, then telling them to do more algebra is probably insufficient, but mapping out how to shift from explanatory visuals to complete algebraic proofs would be more helpful in the classroom.

Conclusion

The research literature clearly shows that in-service teachers' conceptions of proof are not well aligned with both researchers' and policy documents' expectations that proof ought to be central to mathematics education and a learning tool at all grade levels, and that teachers must possess a sound understanding of justifications and proof. If teachers have a robust understanding of justification and proof, they might be able to help their students develop a better understanding of proof. However, one of the biggest challenges in learning and teaching of proof is how to help teachers develop their knowledge of proof so that their instruction supports their students to develop a better understanding of proof. Indeed, as Stylianides and Silver (2009) suggest, the existing literature does not support teachers to develop proficiency in proof-related activities and provides little guidance about "how to organize effective professional development for teachers" (p. 249). The success of the calls for proof to be one of the central practices of K-12 mathematics education may lie in teachers' hands. Specifically, teachers' views about reasoning and proof may greatly influence what they do with their student in the classroom while teaching proof, how they enact curricular tasks that might have potential to involve opportunities for their students to engage in proof related practices, and more importantly how they identify their students' difficulties in learning proof and help their students overcome those difficulties. The results of this study may assist mathematics educators and curriculum developers in developing a clearer sense of teachers' perceptions of proof and providing the kind of support teachers need to implement proof as a one of the crucial mathematical practices in their instruction.

At the very least, this study contributes to our understanding of middle school in-service teachers' competencies in justifying and proving, and the nature of their engagement in proving activities. The results of this study shows that in-service middle school mathematics teachers were engaged in the phases of proving activities, where they could successfully explore their task, but they struggled to produce deductive arguments. One of the new findings of this study was that the teachers believed that symbolic (algebraic) representations are too abstract to understand, yet, believed proofs always need to involve symbolic representations.

There is still great deal more to learn about how teachers learn proof-related content and how they engage their students in justification and proof in their classroom. An important next step for the field would be to examine the nature of teachers' engagement in their classroom and how they enact proving activities in their instructional practices. Examining both teachers and students conceptions of proof and conducting classroom observations of proof-related practices in their classroom would provide another important window into the nature of students' engagement in learning proof. Therefore, further research is needed to make justification and proof a meaningful mathematical practice for both teachers and their students by investigating both teachers' and students' conceptions of proof and how they engage in proving activity at K-12 level.

In conclusion, this study emphasizes the importance of the role that teachers play in teaching and learning proof related practices, and sheds light upon the process of in-service middle school mathematics teachers' learning of proof in a graduate level professional development course. The results directly contribute to the field's understanding of how teachers learn and enact proof, and how proof-related professional development should conducted.

Türkçe Sürümü

Giriş

İspat, matematiksel ifadelerin doğruluğunu araştırarak bu ifadelerin neden doğru ve inandırıcı olduğunu açıklamaya teşvik etmesi ve aynı zamanda matematiksel iletişim ve gelişmeyi desteklemesinden dolayı matematiksel çalışmaların temel bileşenlerinden biridir(Tall ve Mejia-Ramos, 2006; Hersh, 1993; Hanna, 2000, 2018; Harel ve Sowder, 1998) ve matematiksel iletişim ve gelişmeyi teşvik etmesinden (Schoenfeld, 1994; Dogan, 2017) dolayı matematiksel aktivitenin temel bir bileşenidir. Ayrıca ispat, matematiksel ifadelerin geçerliliği ile ilgili şüpheleri gideren bir problem çözme yolu (örn., Selden ve Selden, 2003; Weber, 2005; Harel ve Sowder, 1998) ve matematik öğrenmeye yönelik bir araç olarak da görülebilir (Knuth, 2002a; Dogan, 2015). Bu nedenle, ispat matematikçiler için çok önemli bir faaliyettir ve matematiksel gelişimin temel bir unsurudur. Çünkü hem insanların matematiksel gerçeği ortaya çıkarmasına yardımcı olur hem de matematiksel öğrenmeyi teşvik eder (Stylianides, Stylianides, ve Weber, 2017). İspatın çok önemli bir matematiksel aktivite olarak görülmesine rağmen, ne matematikteki rolü ne de doğasındaki rolü K-12 eğitiminde yer bulamamakta ya da ne düzeyde olurlarsa olsunlar öğrenciler (çoğu durumda öğretmenleri tarafından) tarafından yeterince anlaşılamamaktadır. Şaşırtıcı olmayan bir şekilde, politika yapıcılar (örn., National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Council of Chief State School Officers [CCSSO], 2010; Mathematical Association of America [MAA], 2004) ve matematik eğitimi araştırmacıları (örn., Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; Harel ve Sowder, 1998; Hanna, 1990, 1995, 2000; Knuth, 2002a, 2002b), tüm seviyedeki öğrencilerin matematik eğitiminde ispat ve matematiksel akıl yürütme becerilerinin artması gerektiğini savunmaktadır. Bu nedenle, çeşitli paydaşlar ispatın müfredatta her düzeyde temel bir etkinlik olması gerektiğini ve öğrencilerin ispatın niteliğini ve çeşitli rollerini anlamalarına yardımcı olmak için öğretim uygulamalarının geliştirilmesini önermiştir (örn., Martin, McCrone, Bower, ve Dindyal, 2005; Stylianides ve Stylianides, 2009; G. Stylianides, 2008; A. Stylianides, 2007; Dogan, 2015; Ozgur, Ellis, Vinsonhaler, Dogan, ve Knuth, 2019). Matematik eğitimi üzerinde etkili olan Common Core State Standards for Mathematics (CCSSO, 2010), Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2000) gibi kurumlar ispatın önemi hakkında benzer mesajlar ortaya koymaktadır. CCSSO, matematiksel ifadeler hakkında gerekçelendirme ve akıl yürütme becerilerinin matematiksel yeterliliğin kritik yönleri olarak görmektedir. NCTM, matematiksel akıl yürütmenin temel bir parçası olarak ispatı ön plana çıkarmakta ve birinci sınıftan 12. sınıfa kadar muhakkeme ve ispata odaklanan öğretimin tüm öğrencilerin matematiksel ispat öğrenmelerini ve anlamalarını sağlaması gerektiğini belirtmektedir.

Yukarıda belirtildiği gibi ispatın öğrencilerin yeterliklerini geliştirmelerine, matematiksel akıl yürütme ve gerekçelendirme anlayışlarının oluşmasına yardımcı olmasından dolayı matematik eğitimindeki ihtiyacı vurgulanmaktadır. Öğrenciler için temel bilgi kaynağı olan öğretmenler, ispat kavramını sınıflarına entegre edebilmeli ve öğrencilerinin ispatı öğrenebilmelerine yardımcı olabilmek için iyi hazırlanmalıdırlar. Bununla birlikte, öğretmenlerin ispatla ilgili uygulamaları günlük öğretim uygulamalarına entegre etmeye hazır olup olmamaları akıl yürütme ve ispat öğretiminde önemli bir endişe olarak görülmektedir. Öyle ki, Knuth (2002b) bu durumu "ortaokul matematik öğretmenlerinin karşılaştığı en büyük zorluk, ispatın tüm öğrenciler için uygun bir aktivite olduğu hakkındaki fikirlerini değiştirmek ve öğrencilerin sınıf içi ispat etkinliklerine katılımını sağlıyacak sınıf içi uygulamaları sağlamaktır" (s. 83) sözleriyle belirtmiştir. Sadece öğrencilerin ispat kavramlarına değil aynı zamanda öğretmenlerinin ispat kavramlarına ilişkin literatur, K-12 düzeyinde ispatı anlamada ve öğrenmede önemli eksikliklere işaret etmektedir. İspat kavramını K-12 matematik eğitimindeki öğrenciler için anlamlı kılmak için, öncelikle öğretmenlerin akıl yürütme ve ispatı öğrenmeleri sağlanmalıdır. Böylece öğretmenler öğrencilerine K-12 düzeyinde ispat ile anlamlı deneyimler yaşamalarını sağlayacak düzeyde donanımlı olabilirler. Öğretmenlerin ispatla ilgili uygulamaları, öğretme ve öğrenmede oynadıkları rolün önemi göz önüne alındığında, bu çalışma, ortaokul matematik öğretmenlerinin lisansüstü düzeyde bir mesleki gelişim kursunda ispatı öğrenme sürecini incelemeyi amaçlamaktadır. Bu çalışmanın sonuçları, öğretmenlerin ispatı nasıl öğrendiği konusundaki anlayışına doğrudan katkıda bulunacak ve bu da ispatla ilgili mesleki gelişimin yürütülme biçimini etkileyebilecektir. Bu sonuçlar, öğretmenlerin ispat kavramıyla ilgili gelişimlerinin öğrencilerin matematiksel ispatı anlamalarını geliştirecektir.

İspat ve Öğretmenler

İspat, tüm sınıf seviyelerinde araştırmacılar tarafından ilgi gösterilen bir konu olmuştur ve her öğrencinin eğitiminin önemli bir parçası olması beklenir. Bununla birlikte, ispatı öğrenme ve öğretme ile ilgili literatür, her sınıf düzeyinde, öğrencilerin (K-16) ispatı anlama ve oluşturmakta zorlandıklarını (örn., Chazan, 1993; Harel ve Sowder, 1998, 2007; Moore, 1994; Porteous, 1990; Weber, 2005); öğretmenlerin ise öğrencilerinin gerekçelendirme ve ispat yapmayı öğrenmelerini teşvik etmede sıklıkla zorluk yaşadıklarını göstermektedir (Knuth, 2002b; Bieda, 2010). Öğrencilerin ispatı anlamakta güçlük çekmeleriyle ilgili bir takım nedenler gösterilmektedir. Bunlardan bazıları öğrencilerin (a) ispatın önemini anlamadıklarını (Chazan ve Lueke, 2009; Herbst ve Brach, 2006), (b) matematiksel bilgilerini ifade edemediklerini (Moore, 1994; Tall ve Vinner, 1981; Schoenfeld, 1994) ve (c) matematiksel etkinliklerde kendilerini rahat hissetmedikleridir (Alibert, 1988). Sonuç olarak, ispatın öğrencilerin rahat kavrayabilecekleri kadar kolay bir kavram olmadığı aşikardır.

Öğrencilerin ispatı öğrenme ile ilgili zorluklarına ek olarak, ilgili literatür, çoğu öğretmenin ispat öğretimi hakkındaki inançları ve ispatı müfredata entegre edilebilecek matematiksel bir uygulama olmadığı yönündeki algıları nedeniyle ispatın öğretilmesini tüm sınıf seviyelerinde zor bulduklarını göstermektedir (örn., Knuth, 2002b, 2002c). Bieda'nın (2010) belirtiği gibi öğrencilerin ispat ve gerekçelendirme anlayışını geliştirmek için öğretmenler öncelikle kendi ispat bilgilerini derinleştirmek zorundadırlar. Bu nedenle, son zamanlarda matematik eğitiminde her seviyede akıl yürütme ve ispatı merkezi bir konuma yerleştirmek için yapılan çağrılar, öğretmenler için yeni zorluklar ortaya çıkarmaktadır. K-8 öğretmenlerinin çoğu (hatta K-12 öğretmenleri) (a) ispat öğretimi için gereken içerik bilgisine, (b) ispat uygulamalarını tanıma ve destekleme becerisine ve (c) ispatın amaçlarını (rollerini) yeterli bir şekilde anlama konusunda yetersiz kalmaktadırlar.

Öğretmenlerin İspat Kavramları

İlgili literatürde öğretmenlerin ispat anlayışları (örneğin, ampirik ve tümdengelimsel argümanlar üreterek), ispat kavramları ve ispat hakkındaki inançları ayrıntılı olarak araştırılmıştır. Knuth (2002a, 2002b), ortaokul öğretmenlerinin ispat kavramlarını araştırmak için anket ve görüşme verilerini kullanmıştır. Ortaokuldaki öğretmenlerin çoğunun, tümdengelimsel argümanlardan ziyade ampirik argümanlarla ikna olduklarını bulmuştur. Ek olarak, çoğu öğretmen ispat olarak geçersiz argümanlar kabul ettikleri için ispatlar ile ispat olmayan argümanlar arasında ayrım yapamamıştır. Öğretmenler daha çok derin özelliklerden (ispat, mantık vb.) ziyade yüzeysel özelliklere (cebirsel manipülasyonların doğruluğu gibi) odaklanmış ve somut özelliklere, özel örneklere ve görsel sunumlara dayanan argümanları daha çok ikna edici bulmuşlardır. Öğretmenler, ispat kavramını okul matematiğinin merkezi bir aktivitesi olarak değil; yanlızca matematik başarısı yüksek öğrenciler için muhtemel bir uygulama olarak görmüşlerdir. Ayrıca, öğretmenler sadece informal ispatın matematik müfredatının bir parçası olması gerektiğini belirtmiş ve biçimsel (sembolik-cebirsel) ispat üzerine vurgu yapacak herhangi bir değerlendirme yapmamışlardır.

Martin ve Harel (1989) öğretmenlerinden çeşitli argümanları değerlendirmelerini ve her bir argümanı derecelendirmelerini isteyerek onların matematiksel argümanları doğruluğunu belirleme yeterliliklerini araştırmıştır. Knuth gibi (2002a, 2002b), birçok öğretmenin ampirik temelli argümanları ispat olarak kabul ettiğini bulmuşlardır. Yazarlar ayrıca öğretmenlerin bir ispatı kabul edip etmemelerinde argümanın yapısının etkili olduğunu bulmuşlardır. Örneğin, öğretmenler asıl argümanın geçerliğine odaklanmadan cebirsel-sembolik ispatları geçerli kabul etmeyi mantıklı (yeterli) bulmuşlardır. Bu araştırmalar, birçok öğretmenin ispatın ne olduğunu ve matematiğin öğrenilmesi ve öğretilmesi için ne ifade ettiğini anlamadığına dair veriler ortaya koymaktadır. Bunun nedeni olarak öğretmenlerin yeterli ispat bilgisine sahip olmamaları gösterilebilir (örn., Chazan, 1993; Simon ve Blume, 1996; Harel ve Sowder, 2007). Açıkçası bu, ispat öğretmek için sorunlu bir durumdur. Bu nedenle, matematik öğretmenlerinin öğrencilerinin yeterli bir ispat anlayışı geliştirmelerine yardımcı olabilmeleri için kendilerinin de ispat ile ilgili köklü bilgilere sahip olmaları önemlidir.

İspat Öğretim Uygulamaları

Ball ve meslektaşları (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002), okul matematiğinde matematiksel anlayışı geliştirmenin bir aracı olarak gerekçelendirme ve ispatı vurgulayan öğretim uygulamalarının desteklenmesi gerektiğini önermektedir. İspatın sadece tümdengelimsel muhakemeye dayanan formal bir şekilde öğretilmesinin, öğrencilerin ispatı anlamsız bir ritüel olarak görmesini güçlendirebileceğini; ispat öğretiminin ise anlamını ve amacını yanlış anlamalarına neden olabileceğini ifade etmektedirler. Ball ve meslektaşları, ispatla ilgili öğretim uygulamalarında bir öğretmenin şunları yapması gerektiğini vurgulamaktadırlar: (1) hem öğrencilerin ihtiyaçlarını karşılayan hem de öğrencilerin matematiksel akıl yürütmeleri için fırsatlar sağlayan matematiksel görevleri seçmek, (2) matematiksel bilgiyi herkese açık hale getirmeleri ve matematiksel bilgi ve dili kullanımlarını arttırmak ve (3) öğrencilerin matematiksel fikirlerini paylaşmalarına ve başkalarına saygı duymalarına yardımcı olan normlarla bir sınıf kültürü oluşturmak. Sınıfta bu uygulamaları oluşturmak, öğretmenler için büyük çaba sarf etmeyi gerektirir. Çünkü öğretmenler öğrencilerin ispat etkinliklerine katılmaları için onlara fırsat sunmaktan ve aynı zamanda öğrencilerin yeterli (doğru) ispat anlayışlarının gelişmesini sağlamaktan sorumlulardır. Ancak, alan yazında ispat öğretimi konusunda öğretim uygulamarı ile ilgili yeterli düzeyde araştırma bulunmamaktadır. Bieda (2010), hala okul matematiğinde ispatın nasıl öğretildiği ve öğretmenlere ispat ve ispat uygulamalarını anlamalarında nasıl yardımcı olunduğu konusunda matematik eğitimi alanında çok az şey bilindiğini belirtmektedir. Özellikle, gerekçelendirme ve ispatlama faaliyetlerinde yer alan öğretim uygulamalarının türleri ve öğrencilerin bu tür uygulamalara katılımı sırasında ne öğrendikleri hakkında çok az şey bilinmektedir.

Özetle, öğretmenlerin ispat öğretme bilgilerini geliştirmelerini desteklemek ve öğrencilerinin ispat anlayışını geliştirmek için yeterlikliklerini güçlendirmek amacıyla ispat konusunda matematik eğitimi alanını ileriye taşımak için öğretmenlerin ispat hakkındaki bilgilerini anlamak önemlidir. Öğrencilerin ispat anlayışlarını ve yeterliliklerini desteklemek için, öğretmenlerin öncelikle kendi bilgilerini ve ispat anlayışlarını arttırmaları gerekir. Öğretmenlerin ispat anlayışını arttırmanın bir yolu, ispat öğretimi için yeterli anlayış ve becerileri geliştirmelerine yardımcı olacak mesleki gelişim kurslarına katılmalarını sağlamaktır. Bu makalenin amacı, ortaokul öğretmenlerinin mesleki gelişim kursu kapsamında ispat öğrenmelerini inceleyen bir araştırmanın sonuçlarını ortaya koymaktır.

İspatın Tanımı

Matematik eğitimcileri Alibert ve Thomas (1991) ispatı "başkalarını ikna etmeye çalışırken kendini ikna etme aracı olarak" (s. 215) tanımlayarak, tahmin oluşturma ve ispat geliştirmenin matematiğin temeli olduğunu iddia etmektedirler. Benzer şekilde Bell (1976), ispatı, bir kişinin kendisini veya başkalarını, şüphe bırakmaksızın, önermelerin doğruluğu hakkında ikna ettiği "temel bir toplum etkinliği" olarak tanımlamaktadır. Stylianides (2007), matematikçilerin ispat anlayışına uygun ve öğrencilerin okul matematiğinde yaptıkları ispat etkinliklerinin sosyo-kültürel yönlerine vurgu yapan bir ispat tanımı sunmaktadır.

İspat matematiksel bir savın doğruluğu veya aleyhine olan iddialar dizisi olan matematiksel bir argümandır ve aşağıdaki özellikleri taşır:

1. Sınıf topluluğu tarafından kabul edilen (kabul edilen ifadeler kümesi) daha fazla gerekçeye ihtiyaç duyulmayan doğru ve uygun ifadeleri kullanır;

2. Geçerli ve bilinen veya sınıf topluluğunun kavramsal erişimi içinde olan gerekçelendirme biçimlerini (argümantasyon biçimleri) kullanır; ve

3. Uygun ve bilinen veya sınıf topluluğunun kavramsal erişimi dahilinde olan ifade biçimleriyle (argüman temsil biçimleri) iletilir. (s. 291)

İspat burada, öğrenenlerin akıl yürütmelerini paylaştıkları, argümanlarını gösterdikleri ve savundukları (Jones ve Herbst, 2012) bir matematik sınıf topluluğunda sosyal karakterli (Alibert ve Thomas, 1991) bir öğrenme aktivitesi olarak kavramsallaştırılmıştır. Bu nedenle, ispat, matematiksel bir sav ile bağlantılı bir iddialar dizisinden oluşan ve sınıf topluluğunda kabul edilebilir bir ispat oluşturacak bir normu barındıran matematiksel bir argüman olarak görülmektedir.

Araştırmanın Amacı ve Araştırma Soruları

Bir öğretmenin ispat anlayışının, sınıflarındaki tartışma türleri üzerinde çok önemli bir etkiye sahip olduğunu göz önünde bulundurduğumuzda, öğrencilerin ispat konusunu yeterli bir şekilde anlamalarını sağlamak için matematik öğretmenlerinin ispat konusunda sağlam temelli bilgiye sahip olmaları önemlidir. Bununla birlikte, çok az sayıda çalışma, matematik öğretmenlerinin gerekçelendirme ve ispat kavramlarını öğretmek için gerekli bilgiyi nasıl öğreneceklerine odaklanmıştır. Bu araştırma ile bu önemli boşluğun doldurmasına katkı sağlanacağı düşünülmektedir. Araştırma, ilkokul ve ortaokul öğretmenleri için hazırlanan ispat öğretme ve öğrenme odaklı bir mesleki gelişim kursunun gözlemsel bir çalışmasını içermektedir. Bu nedenle, bu çalışmanın önemli bir amacı, öğretmenler ispat etkinlikleriyle uğraşırken ispatla ilgili matematiksel uygulamaların doğasını araştırmaktır. Çalışmanın ele almak istediği temel soru aşağıdaki gibidir:

Öğretmenlerin ispatlama ile ilgili aktivitelerle etkileşimlerinin niteliği nedir?

Araştırma sorusunu ele alırken, çalışmada ispatın öğretilmesi ve öğrenilmesiyle ilgili çeşitli hususları göz önünde bulundurulmaktadır, bunlar: öğretmenlerin verilen bir etkinliği nasıl araştırdıkları/keşfettikleri, varsayımları nasıl geliştirdikleri ve nasıl gerekçelendirdikleridir.

Yöntem

Öğretmenlerin ispat etkinliklerine katılımını ayrıntılı bir şekilde araştırmak ve belgelemek için örnek olay çalışması metodolojisi kullanılmıştır. Creswell (2007), örnek olay çalışmasını "sınırlı bir sistem içinde bir veya daha fazla olay aracılığıyla araştırılan bir konunun çalışılmasını" içeren ve bir olay veya olayları zaman içinde detaylı, birden fazla bilgi kaynağını içeren derinlemesine veri toplama yoluyla ele alan bir yöntem olarak tanımlamaktadır (s. 73). Örnek olay çalışması metodolojisi, bu araştırma sorusunu ele almak için hem faydalı hem de uygundur çünkü örnek olay çalışması hem tanımlayıcı hem de açıklayıcıdır (Yin, 2006).

Bağlam

Bu çalışmanın bağlamı, öğretmenlerin ortaokul sınıflarında etkili bir şekilde ispat öğretmek için gereken matematiksel bilgi ve beceriler kazanmak için ispata yönelik aktivitelerle etkileşimlerini sağlamak üzere tasarlanan "Öğretim İçin Matematiksel Bilgi: Matematiksel Akıl Yürütme, Gerekçelendirme ve İspat" başlıklı üniversite temelli bir mesleki gelişim kursudur. Yakın zamanda Midwest, ABD'de bulunan büyük bir araştırma üniversitesinde 14 haftalık ders gözlenmiştir.

Bu çalışmada odaklanılan ders, deney, varsayım, genelleme, akıl yürütme ve gerekçelendirmeyi vurgulamaktadır. Kurs boyunca öğretmenlerin, ispat temelli etkinlikleri çeşitli şekillerde düşünmelerine ve anlamalarına yardımcı olmak için çeşitli sınıf içi ve sınıf dışı etkinliklerde bulunmaları beklenmiştir. Öğretmenlerin, önceki sınıf oturumunda tartışılan içeriği özetleyen ve genişleten, sınıf dışında haftada iki kısımdan oluşan bir ev ödevini tamamlamaları ve bir sonraki sınıf oturumunun odaklandığı konulara katılmaları için hazırlanmaları beklenmiştir. Analiz bölümünde, sınıf içinde ve dışında kullanılan görevlere örnek verilmiştir.

Katılımcılar

Ders eğitmeni Jane[†], katılımcı okul bölgesinden bir ortaokul matematik öğretmeni lideri ve üniversitenin matematik bölümünden (matematik danışmanı olarak görev yapan) bir eğitmen tarafından desteklenen bir matematik öğretmen eğitimcisidir. Bu dersi vermeden önce, Jane başka bir ortaokul matematik uzmanlığı programındaki dersler de dahil olmak üzere beş yıldan fazla bir süre boyunca öğretmenlik için matematiksel bilgiye odaklanan matematik dersleri vermiştir.

Derse kayıtlı 12 öğretmen (11 kadın, 1 erkek) ortalama dokuz yıllık ortaokul düzeyinde matematik öğretmenlik tecrübesine sahiptiler.

Veri Toplama

Birincil veri kaynağı, sınıf içi katılımcı öğretmenlerin çalışmaları ve etkinliklere verdiği yazılı cevapları ile birlikte sınıf gözlemleridir. Bunlar, sınıftaki öğretmen çalışmalarını, ders eğitmeninin ders öncesi ve sonrası sınıfın yansımasını ve öğretmenlerin okuma ve sınıf yansımalarını içermektedir. Tüm sınıf toplantıları 2014 Güz dönemi boyunca gözlemlenmiştir (her biri üç saat olmak üzere toplam 13 gözlem). Gözlemler sırasında, tahtaya yazılanlar ve kim tarafından yazıldığı, eğitmenin içeriğin ve içerik için sunulan motivasyonun nasıl sunulduğu, ne tür görevlerin sunulduğu ve bu görevlerin nasıl kullanıldığı ve tartışmaların nasıl yapıldığı hakkında notlar alınmıştır. Genel anlamda, gözlemler, alan notlarının alınması ve sınıf etkinliklerinin video ve ses kayıtlarından oluşmaktadır.

Veri Analizi

Analizin ilk aşaması, her oturumdan sonra sınıf gözlemine ilişkin bir yansıma yazmakla başlamıştır. Bu yansımalarda, oturumun ilginç yönleri ve çoklu oturumlarda meydana gelen bağlantılı uygulamalar vurgulanmıştır. Analiz sürecinin büyük bir kısmı, sınıf çalışmaları gözlemlerinde, alan notlarında ve öğretmenlerin çalışmaları dahil olmak üzere çalışmalarındaki temaları ve ders eğitmeni ve öğretmenler tarafından yazılan yansımaları içermektedir. Glaser ve Strauss’un (1967) sürekli karşılaştırma yöntemi, sınıf uygulamalarını, sınıfta neler olduğunu anlama açısından analiz etmek için kullanılmıştır. Amaç, ders eğitmenin ve öğretmenlerin ispat ile ilgili etkileşimlerindeki düzenlilikleri veya temaları belirlemektir.

Bu analitik süreç üç ana aşamadan oluşmuştur. İlk aşamada transkriptler oluşturulmuş, yani katılımcıların tartışma sırasındaki jestleri ve tahtadaki yazılı çalışmaları da dahil olmak üzere tüm ilgili faaliyetler video transkriptlerine dahil edilmiştir. İkinci aşamada, analitik süreç, öğretmenlerin ispat ile ilgili etkinliklere katılımlarının niteliğine göre bölümlere ayrılmıştır. Bu aşama, sınıf tartışmalarının araştırma ile gerekçelendirme aşamalarına göre sınıflandırılmasını içermektedir. Son aşamada, sınıf tartışmalarındaki ifadeler sürekli karşılaştırmalı bir yöntem kullanarak kodlanmıştır (Glaser ve Strauss, 1967).Burada, öğretmenlerin ve eğitmenlerin tartışmalara katılımı yönlerine, yani öğretmenlerin gerekçelendirme ve ispat etkinlikleri içerisindeki sorgulamalara (örneğin, öğretmenlerden ispat etkinliği sırasında tartışmalarına bir örnek vermelerini istemek gibi) odaklanılmıştır. Açık kodlamaya ek olarak, Stylianides (2007) tarafından sunulan ispat tanımı, geçerli bir matematiksel ispatın üç özelliği (kabul edilen ifadeler kümesi, tartışma biçimleri ve argüman temsili modları) bu çalışma için analitik çerçeve oluşturmuştur. Bu analitik aşamaları tamamladıktan sonra, verilerde ana temalar veya kalıplar tanımlanmış ve ispatın öğretilmesi ve öğrenilmesiyle ilgili çeşitli yönlere odaklanarak öğretmenlerin derste nasıl ispat etkinlikleriyle etkileşimde bulunduklarını gösteren genel kategoriler ve / veya kategori kombinasyonları oluşturmuştur.

Kodlama düzeninin güvenilirliğini kontrol etmek için, ikinci bir matematik eğitimcisi sınıf gözlem verisinin % 25'ini okuyup kodlamıştır. Kodlama şeması için puanlayıcılar arası güvenilirlik oranı yaklaşık % 90 olarak bulunmuştur. Uyuşmazlıklar kodlar karşılaştırılarak tartışılmış ve çözülmüştür. Son olarak veriler bu düzenlemelere uygun şekilde yeniden kodlanmıştır.

[†] Tüm katılımcı adları takmadır.

Bulgular

Mesleki gelişim kursunun sınıf içi gözlemleri, öğretmenlerin ispat etkinlikleriyle nasıl meşgul olduklarını ortaya çıkarmıştır. Bu bölüm, çalışmanın sonuçlarını sunmayı amaçlamakta ve temel araştırma sorusuna cevap verecek şekilde düzenlenmiştir. Bu bölümde, öğretmenlerin, ilgili temalar için sıklık sayımlarının yanı sıra sınıf tartışmalarından temsili alıntılar da dahil olmak üzere, ispat ekinliklerine katılımlarının genel bir temsili bulunmaktadır. Bu sonuçların raporlanmasında temalar, bireysel öğretmenlerin katkılarından ziyade bütün sınıf tartışmalarına dayanarak belirlenmiştir.

İspat Aktiviteleriyle Ekileşimlerinin Niteliği

Aşağıdaki alt bölümlerde, ispat aktivitelerinin iki aşaması (araştırma ve gerekçelendirme ve ispat) açıklanmış ve tartışılmıştır. Her bir aşamanın analizi netlik için ayrı ayrı yazılsa da, çoğu durumda, ispat aktivitelerinin bu aşamalarının birbiriyle ilişkili olduğunu ve çoğu zaman ayrı ve doğrusal aktiviteler olarak ortaya çıkmadığını not etmek önemlidir.

Problem veya varsayımı araştırma. Öğretmenlere, dersin ilk yedi haftasında 11 farklı ispat etkinliği verilmiştir. Bu etkinliklerin dokuz tanesi öğretmenlerin matematiksel varsayımlar geliştirmelerini gerektirirken, iki tanesi öğretmenlere varsayım olarak verilmiş ve bu varsayımı ispatlamaları istenmiştir. Dersi veren eğitmen Jane, genellikle, önce katılımcı öğretmenlere verilen etkinlikleri açıklamıştır ve öğretmenlerden 3-4 kişilik gruplar halinde çalışmalarını istemiş ve daha sonra bu etkinliklerle ilgili öğretmenlerin oluşturduğu argümanları tüm sınıf içinde tartışarak sunmalarını istemiştir. Aşağıda ayrıntılı olarak tartışılacağı gibi, öğretmenler sıklıkla örüntü arama, örüntü tanımlama, varsayımlar geliştirme, genellemeler yapma ve argümanlarıyla ilgili açıklamalar ve gerekçeler sunma gibi matematiksel aktivitelerde bulunmuşlardır. Ayrıca, öğretmenler genellikle ispat etkinliklerini veya varsayımları anlamlandırmak için örnekler ve farklı temsil türleri kullanmışlardır.

Öğretmenlerin ispat ile ilgili etkinlik kodlarını ve araştırma aşamasına katılımlarının niteliğini tartışmak için aşağıda bir sınıf içi tartışma alıntısı sunulmuştur. Bu etkinlik yalnızca verilen soruyu keşfetme ve ürettikleri varsayımları değil, aynı zamanda katılımlarındaki genel temaları da örneklendirdiği için öğretmenlerin ispatlama ile ilgili aktivitelere katılımının tipik bir örneğini temsil etmek üzere seçilmiştir. Öğretmenler, sınıfın ilk haftasında bu aktivite üzerinde yaklaşık 2 saat uğraşmışlardır. Öğretmenlere, ikili sayı sistemini oluşturmak için kullanılan 'Weights Problem-Ağırlık Problemi' sunulmuş olup grup olarak soruyu çözmeleri ve problemle ilgili varsayımlar geliştirmeleri istenmiştir.

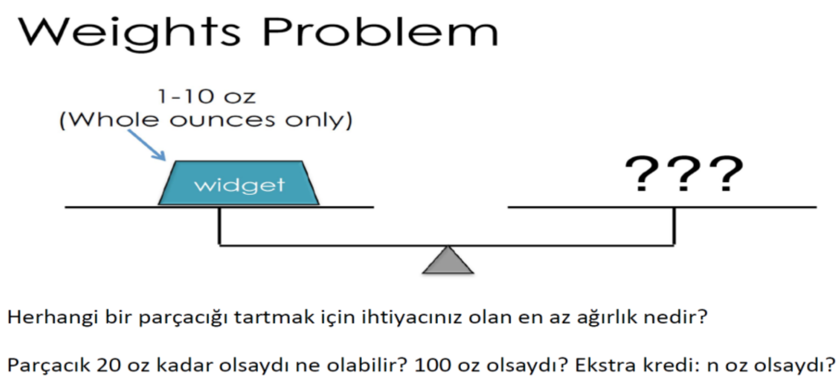

Figure 1. Ağırlık Problemi

Problemle uğraşırken, her grup işe yarayacak ağırlıklar için olası kombinasyonlar belirlemiş ve tüm gruplar 10 onsa kadar olan ağırlıklar durumunda deneme yanılma yöntemini kullanmıştır. Ancak, gruplar gereken en az sayıdaki ağırlığı bulmaya odaklanmamıştır (Etkinliğin problem durumunda istenen en az sayıdaki ağırlığı bulmaktır). Her grup 1, 2, 3 ve 10'nun katlarından en az bir ağırlığı kullanarak 20 ons ve 100 ons durumlarına hızlıca geçmiş ve 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30 ve 50'nin farklı kombinasyonları kullanmışlardır. Ancak, grupların hiçbiri, en verimli ikili yöntemi (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64) ortaya çıkarmaya veya fark ettikleri örüntüleri genelleştirmeye yakın değildi, bu yüzden Jane onlardan 1-100 ons arasında herhangi bir parçacığıın ağırlığını belirlemek için sadece 7 ağırlık kullanabilip bilemeyeceklerini araştırmalarını istemiştir. Bir süre kendi gruplarında çalıştıktan sonra, gruplardan hiçbiri istenen ikili çözüm yöntemine ulaşmadı ve öğretmenler problemi daha iyi anlamak için problem durumuyla ilgili açıklayıcı sorular sormaya başladılar.

Jane'in 7 ağırlık kullanmalarını istemesi, öğretmenlerden Lora'nın 1-100 ons arasındaki bir parçacığı hesaplamak için yeni bir kombinasyon (1, 2, 3, 7, 14, 28, 56) ortaya çıkarmasına yardımcı oldu. Jane daha sonra sınıftan Lora'nın çözümünü tartışmasını istedi. Öğretmenler, 7'den sonraki ağırlıklar için yönteminin iki katına dikkat çekti, ancak 7'de başlayan örüntünün veya bu kombinasyonun nasıl çalıştığını açıklayamadılar; bunun yerine, Lora'nın yöntemini 1-100 oz için tüm olası ağırlık parçacıklarını tartıp tartamıyacaklarını görmek için birkaç örnek test ettiler. Bu noktada Jane, Lora'dan akıl yürütmesini açıklamasını istedi:

> Lora: Şey bildiğini sanıyordum, aralarında sayı var mı, sanırım geçerek herhangi bir sayıyı boşa harcıyor musun, sanırım, bu yüzden düşünmeye başladım, şu ana kadar ne elde ettiğimle ne yapabilirim, 2 ve 3, orada başladım, 6 yapabilirim, bu yüzden bir 7'ye ihtiyacım var, o zaman dedim ki… ve 7 ile hepsini bir araya getiren bir rekombinasyon yapabilirim, böylece 7, 10, 12 ekleyebilirim. 13, şimdi 14'e ihtiyacım var, 14'ten itibaren bütün bu kombinasyonları bir araya getirip 27'ye ulaşabiliyorum, şimdi 28'e ihtiyacım var ve sonra 28'e hepsini eklemeliyim 55'e çıkıyorum, şimdi buna yakınım 100 doğru?, bir numaraya daha ihtiyacım olacak ve bu 56 olacak.

Lora ne yaptığı hakkında bir açıklama yapmıştır, ama yönteminin nasıl veya niçin işe yaradığına dair bir gerekçe sunmamıştır. Daha fazla gerekçeye gerek duymadan, Jane, sınıftan aynı mantığı kullanarak 1'den başlamasını istedi ve daha sonra, yöntemin aslında 2'nin katlarını oluşturduğunu görmelerini sağladı.

> Kim: O zaman 2 olur ve sonra 3 yapabilirsin,
>
> Anne: 3'ümüz var, bu yüzden 4'e ihtiyacımız var... şimdi 5 yapabiliriz… 6 yapabiliriz, 7 yapabiliriz
>
> Jane: peki sonra neye ihtiyacımız var?
>
> Kim: 8'e ihtiyacımız var
>
> Lora: 16, şimdi ikiye katlıyoruz, neredeyse ikiye katlıyoruz… 32

Lora, ikiye katlama özelliğini burada hızlı bir şekilde tanıdı; bu da, onun önceki akıl yürütmelerinde ikiye katlamanın önemini kavradığını göstermekte ve bu akıl yürütme sınıfın hızlı bir şekilde ikinin katlarını görmesine temel hazırlamış olduğunu göstermektedir. Bütün sınıf tartışmasının bir sonucu olarak, sınıf 1, 2, 4, 8, 16, 32 ve 64 ağırlıkları ile 1-100 oz arasında herhangi bir ağırlık parçasını tartılabileceğini ifade edip, hızlı bir şekilde ikinin katları örüntüsünü tanıdılar ve Lora'nın akıl yürütmesiyle karşılaştırdılar: "aynı şey [Lora'nın mantığı ile aynı]; 3'e gerek duymamanız dışında [Lora'nin akıl yürütmesinde 3 ağırlığıda mevcuttu] her zaman iki katına çıkıyorsunuz. ” Bu nedenle, örüntünün her zaman iki kat olarak devam ettigini belirleyerek (örüntü tanımlama), ikili yöntem için hızlı bir genelleme (genelleme yapma) yaptılar. Yedi hafta boyunca, öğretmenler etkinlikleri keşfettikleri durumda sekiz kez örüntü aradı (örüntü arama kodu sadece öğretmenler tüm sınıf tartışması sırasında örüntü aradıklarını özellikle söylediklerinde kodlanmıştır) ve problemle ilgili örüntü tanımlayıp (20 kez), varsayımları doğrultusunda matematiksel bir yapı (20 kez) belirlediler. Bir örüntü veya matematiksel yapıyı tanımladıktan sonra, öğretmenler problemi araştırma aşamasında genellemeler (29 kez) yapmaya çalıştılar.

Her ne kadar öğretmenler birçok kez genelleme yapmış olsalar da, nadiren bu genellemelerin gerekçelerini veya ispatlarını geliştirilmiştir. Örneğin, aşağıdaki alıntıda Kim örüntü için genellemesini açıklamış ancak genellemenin neden işe yarayıp ya da her zaman işe yarayıp yaramayacağına dair herhangi bir gerekçe sunmamışıtır:

> Kim: [1,2,4,8,16,32,64 işaret ederek], yaptığımız şeydeki örüntüyü görebiliyorum, hepsinin gösteriminin üssel olduğu yere geldiğimizde, böylece n'nin aradığımız evre olup olmadığını görmeye başlıyorsunuz, buda 2 üzeri n eksi 1 olacaktır, hepsini bulmak için, böylece sizi 1000'e götürecektir...

Kim'in genellemesinde olduğu gibi, öğretmenlerin bu tür genellemelerin neden doğru olduğu ve matematiksel olarak nasıl geçerli olduğunu açıklayamamalarına rağmen, genellemeler sınıf topluluğu için matematiksel olarak doğru gerekçelendirme veya ispat olarak kabul görmüştür. Jane, öğretmenlere bu tür genellemelerin doğru gerekçelendirildiği ya da ispat olarak yeterli olup olmadığı hakkında sorular sorarak onların genellemelerini sık sık sorgulamaya çalışmıştır. Örneğin, Jane, Kim'e genellemesinin neden 1000 için çalıştığını, “bu nasıl çalışacak, bize bin için nasıl olacağını göster” diyerek açıklamasını istedi. Kim, 1000 oz ağırlık için “2'nin 1000 eksi 1 kuvveti olacaktır, buda 2'nin 999. kuvveti olacaktır.” Bu genellemenin tartışmasına ve Jane'in gerekçelendirme ve ispat için zorlama girişimlerine devam etmesine rağmen, öğretmenler yalnızca çeşitli örüntüler tespit edip birkaç varsayım geliştirebildiler ve matematiksel gerekçelendirme veya ispat geliştirmediler.

Öğretmenler, varsayımlarının genel olarak örneklerle nasıl çalıştığını açıklamaya odaklanmışlardı ancak açıklamaları, aşağıdaki alıntıda görüldüğü gibi önceki açıklamalardan matematiksel olarak daha üst seviyedeydi:

> Jane: Öyleyse bunlarla ölçebileceğimiz maksimum ağırlık nedir?
>
> Clara: … ondan önceki her şeyin numarası, artı, topladığı ve bir sonraki sayı, ve bir sonraki sayı bir sonraki kuvveti, değil mi? öyleyse 2'den 5'e kadar, 2'den 5'e kadar her şey 2'ye 5'e dahil olmak üzere 63'e eşitse, o zaman 2'den 6'ya kadar 64 olmak zorunda değil mi? ve böylece 325'i söylemeye ihtiyacınız olduğunda, o kuvvetin artı üstündeki her şeyin 325'e eşit veya daha büyük olması gerektiği noktasına gelmelisiniz, değil mi?

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, öğretmenler, ispat etkinliklerinin araştırma aşamasında fikirlerini açıklamak için örnekleri (toplamda örnek kullanımı 58 kez kodlanmıştır) kullanmışlardır.

İspat etkinlinklerini keşif aşamasında, öğretmenler varsayımlar geliştirdiler (26 kez) ve bu varsayımlar üzerinde akıl yürüttüler. Örneğin, Anne'nin cevabının neden işe yarayıp yaramadığını açıklarken, Carol şunu belirterek yeni bir örüntü belirledi: “2’nin üçüncü kuvvetinde 10'u elde ediyorsunuz, 2’nin altıncı kuvvetinde 100'ü elde ediyorsunuz, böylece ben 3, 6 ve 9 da bir örüntü görüyorum”. Carol’ın gerekçesini genişleterek, Kim açık bir varsayım geliştirdi ve bunun için bir gerekçelendirme yaptı:

> Kim: ve 2'nin 9.kuvveti size 1000'i veriyor… 10'un bir sonraki kuvvetine ulaşmak için 3 ek ağırlığa ihtiyacınız var, yani 1000'e ulaşmak için, 10'a çıkmak için 3 ek ağırlığa ihtiyacınız var, yani bir sonraki aşamada ne olursa olsun, 1000'den sonra, 10.000 ve sonra 3 ek ağırlığa ihtiyacınız olacak

Kim'in gerekçelendirmesi, bir örüntü üzerinden örnek tabanlı bir akıl yürütmeye dayanmaktadır. Sınıf, bu varsayımın neden her zaman doğru olduğu üzerinde durmayıp, tartışmalarını 10'nun kuvvetleri ve bunlara karşılık gelen örüntüler elde edilmek üzere devam ettirdiler. Bu son tartışma öğretmenlere yeni genelleme fırsatı vermesine rağmen, sınıfı, herhangi bir pozitif tamsayının 2'nin katlarının toplamı olarak temsil edilebileceği temel fikrinden uzaklaştırdı. Üstelik, öğretmenler yaptıkları genellemelerinin neden herzaman doğru olması gerektiğine dair matematiksel gerekçeler üretmediler. Bu nedenle, yukarıda görüldüğü gibi, öğretmenler sıklıkla bir örüntü veya matematiksel yapı tanımlamış, varsayımlar geliştirmiş ve genellemeler yapmıştır, ancak daha az sıklıkla matematiksel gerekçelendirme ve ispat üretmiştir.

Özetle, yukarıda sunulan alıntılar, öğretmenlerin matematiksel gerekçelendirme ve ispat üretmeleri beklenen bir etkinliğe katılımlarının niteliğini göstermektedir. Sonuçlar öğretmenlerin araştırma aşamasına başarılı bir şekilde yaptıklarını ve mesleki gelişim kursunda kullanılan etkinliklerin öğretmenlere örüntüleri ve matematiksel yapıları tanımlamak, varsayımlar geliştirmek, genelleme yapmak ve nadiren de olsa matematiksel gerekçelendirme yapmak için zengin fırsatlar sağladığını göstermektedir. Öğretmenler ayrıca problemleri araştırmak ve düşüncelerini açıklamak için örnekleri kullanmışlardır. Ancak öğretmenlerin bu tür etkinliklerle etkileşimlerinin niteliğinde sık sık eksik olan, iddiaları için matematiksel gerekçelendirmeleri veya ispatları üretememeleri olmuştur. Spesifik olarak, bir örüntü ya da altta yatan bir yapı belirledikten ve bir genelleme yaptıktan sonra, öğretmenler varsayımları için bir gerekçelendirme ve ispat üretme ihtiyacı görmediler (Dersi veren eğitmenin buna zorladığı durumlar hariç). Matematiksel bir gerekçelendirme üretme gereği görmemelerinin ana nedeni, ispatların işlevini anlama eksikliği ve tümdengelimsel argümanlar oluşturmalarını sağlayacak matematiksel içeriği anlama eksikliği gibi kavramsal araçlara sahip olmamaları gösterilebilir.

Matematiksel gerekçelendirmelerin ve ispatların sınıflandırılması. İspat etkinliklerinin ikinci aşaması, öğretmenlerin geliştirdiği matematiksel gerekçelendirmelere ve ispatlara odaklanmaktadır. Genel olarak, öğretmenler çeşitli gerekçelendirmeler ürettiler ve bu gerekçelendirmeler üç ana kategoride sınıflandırılabilir. Eğer öğretmenin gerekçelendirmesi, Stylianides'in (2007) önceden verilmiş üç ispat karakteristiğini sağlıyorsa, tümdengelimsel bir argüman olarak kodlandı; eğer bir gerekçelendirmede tümdengelimsel argüman özellikleri varsa, ancak argüman modu açısından tam değilse veya alandaki tüm olasılıkları hesaba katmadığı takdirde, tamamlanmamış argüman olarak kodlandı; eğer bir gerekçelendirme, bir iddiayı desteklemek için ampirik kanıtlara dayanıyorsa, bu örnek temelli bir argüman olarak kodlanmıştır. Bu son durumda, öğretmenler örnek temelli bir argümanın sınırlıklarının farkında olsalar da (daha sonraki kısımda ayrıntılı tartışılacak), yine de bu tür gerekçelendirmeler ürettiler.

Aşağıda sunulan alıntılarda, üç farklı gerekçelendirme kategorisine örnek sunmak amacıyla, öğretmenlerin şu matematiksel varsayımı araştırdıkları argümanlar verilmiştir:

> Julie, $n^2 + n$ ifadesinin *n* 1, 2 ve 5 iken çift sayı olduğunu fark eder. Bunun tüm *n* doğal sayılar için geçerli olup olmadığını, ya da bulduğu örüntünün ileride bozulup bozulmayacağını merak etmektedir. Bu ifade tüm *n* sayıları için doğru mudur? Öyleyse neden? Doğru değilse, ne zaman doğru olmaz?

Julie'nin varsayımını inceledikten sonra, öğretmenler argümanlarını tüm sınıfa sundu ve bunlar çoğunlukla örneklere dayanan argümanlardı. Aşağıdaki argümanlar öğretmenlerin ürettiği örnek temelli argümanlara örnek olarak verilebilir:

> "Bess: Sadece formüldeki sayıları yerine yerleştirerek her seferinde bunu fark ettim. Ne olursa olsun, çift ya da tek sayılar ekleseniz bile sonuç daima bir çift sayıdır… Ve biz sadece doğru olup olmadığını görmek için 11 gibi, başka bir rastgele sayı denedik… "
>
> "Jack:… Ben de… aynı fikirdeyim [Beth'in argümanını işaret ederek]. Mesela, bir değerler tablosu hazırladım ve n için değerleri denedim ve sonra n kare artı n'nin her zaman çift bir sayı olduğunu farkettim… "

Burada, Bess ve Jack birkaç örneği test ederek ikna olmuş ve her zaman herhangi bir sayı için işe yarayacağına inanıyor gibi görünmektedirler, ancak ikisi de argümanlarının sınırlılıklarının farkında olduklarını göstermemektedir.

Aşağıdaki alıntı, tamamlanmamış bir argümanı temsil etmektedir, ancak bu durumda öğretmen, genellemesini yaparken genel bir örneğe (belirli bir örneğin özelliklerine dayanmadan genel muhakeme yapısını ortaya çıkaran belirli bir örnek) dayanmaktadır.

> Kim: … Hmm, öyleyse yaptığımız şey, faktörü içinde olan iki gruba benziyor, yani - karesini aldığımız sayı ile, 5 gibi, bunu 2 + 2 + 1 şeklinde parçalayabilirsiniz ve bunu dağıtırsanız 10 + 10 + 5 elde edersiniz. Öyleyse, bilirsin ki, bu 2 li gruplar, onların, bilmiyorum. Ve sonra bu iki tek sayıya sahipsiniz ve bir tek sayıyı alıp başka bir tek sayıya eklediğinizde, bir çift sayı elde edeceğinizi biliyoruz. Yani ekliyorsunuz -
>
> Mandy: bu beş…
>
> Kim: Burada aldığın beş, 25 i elde etmek için. Fakat, burası, o çiftlerin olduğu yer. Orası doğru mu? Ve bu işe yarıyor mu -bilmiyorum - öyleydi - uzun zaman aldı yapmam.

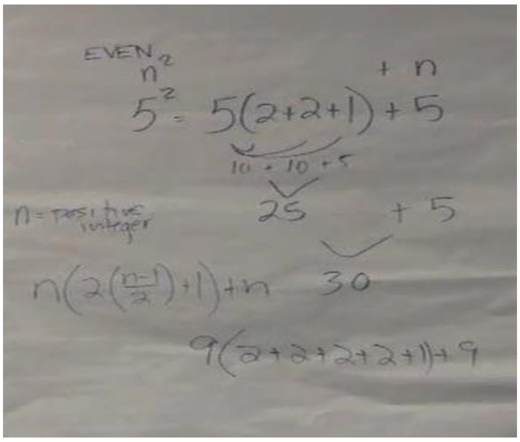

Figure 2. Kim'in posteri

Jane ondan gerekçesini açıklamak için 9 örneğini kullanmasını istedi ve Kim, ilk örneğini açıklamada kullanılana benzer bir açıklama yaptı. Burada, tek sayıların tanımını "İki gruplarının bir fazlası" olarak kullandı.

> Kim: Dokuz kez, ve sonra 2 artı 2 artı 2 artı 2 artı 1 olacak. Artı 9 [Kim'in posterinin altında]. Yani, 2, 4, 6, 8, evet, sanırım hepsi 2, artı 9, artı 9'a bölünebilen 18 artı 18 artı 18 artı 18 olur.

Yine de, hem Jane hem de sınıf bu argümanla tam olarak ikna olmadı. Jane, Kim'den temsilinin tüm tek sayılar için genellenebilir olup olmadığını sordu. Kim, "n kare artı bir kaç kez n kare almak için ileri geri çalıştım ve kontrol ettiğim her sayı, bu pek fazla olmadı - sadece 5 ve 7'yi kontrol ettim, sadece beni oraya götürdüğünden emin olmak için." Genelleyici bir örneğin matematiksel olarak doğru bir gerekçelendirme olarak önemli bir yönü, belirli bir örnekten daha fazlası için geçerli olduğunu gösteren bir dil içermesi gerektiğidir. Kim, cebir-sembolik temsili kullanarak örneğini tüm sayılara genelledi, ancak argümanının tüm sayılar için nasıl ve neden çalışması gerektiğine dair geçerli bir gerekçe sunmadı. Bunun yerine, temsillerini 2 sayı için sınayarak örnek-temelli akıl yürütmede bulundu. Bu nedenle, tüm sayılar için genel bir temsili olmasına rağmen, bu argüman başarılı bir argüman modu içermemektedir. Çünkü sınıf tarafından kabul edilen ve tüm durumları yeterince ele alan bir gerekçe üretememiştir. Bu nedenle, tamamlanmamış (eksik) bir argümandır. Yedi hafta boyunca, öğretmenler tarafından en sık üretilen argüman türü tamamlanmamış (eksik) argümanlar olmuş ve on dokuz kez üretilmiştir.

Son olarak, öğretmenler gözlemlenen yedi hafta boyunca altı kez tümdengelimsel argümanlar ürettiler. Bu argümanların bazıları genelleyici örneklere dayanan ispatlardı ve bazıları cebirsel ispatlardı (sembolik temsillere dayanıyordu). Tüm tümdengelimsel argümanlar cebirsel-sembolik temsil içermiştir. Örneğin, öğretmenler geçerli bir genelleyici örnek argümanına rağmen cebiri kullanmaya çalıştılar. Aşağıdaki alıntı, tümdengelimsel bir argümanın temsilcisidir.

> Lora: Tamam. Yani ... Sanırım, bunu iki eşit parça olarak düşünüyorum. Onu ikiye bölerek. n kare artı n'yi aldım ve 2n, n'mi temsil etsin, yani çift sayı olacak. Böylece, n kare artı n - 2n kare artı 2n - sizi şuna götürür, bu da 2n ile çarpanlara ayrılabilir. Bu yüzden, yine, her zaman iki eşit parçaya geri dönüyoruz. 2 ile çarpıyorsunuz, iki parçaya bölebilirsiniz, eşleştirebilirsiniz. Um, bu yüzden bir çift ile bir tek sayı size bir çift verecek. İşte bir çift, işte burda bir tek, birlikte aldıklarınızı çarparsanız bir çift sayı elde edersiniz. Bu size mantıklı geldimi? ...Tamam. Öyleyse, eğer öyleyse, n, 2n artı 1 olan bir tek sayıysa, n kare artı n sizi tekrar ikiye katlayabileceğiniz bir şeye götürür. Öyleyse, aynı zamanda bir çift sayı olur, çünkü 2 bunun bir çarpanıdır.

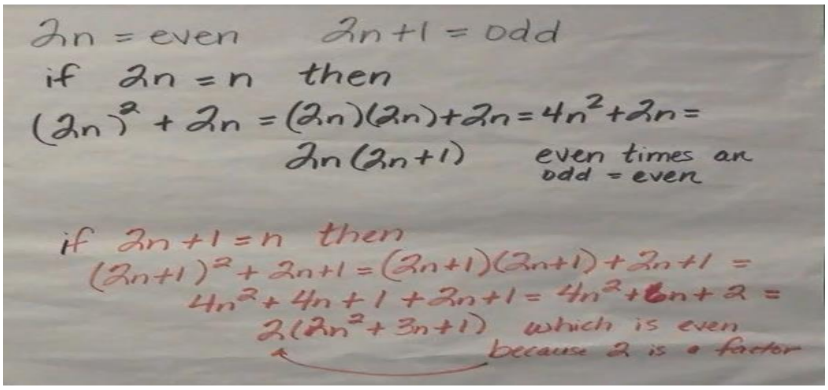

Figure 3. Lora'nin posteri

Burada, Lora ilk önce terimleri tanımlamış (kabul edilen ifadeler kümesi), daha sonra argümanını sunmak için cebirsel-sembolik gösterimleri kullanmış (argüman gösterimleri kümesi) ve sonunda argümanını (argüman modu) açıklamıştır. Temsillerinde bir kusur olmasına rağmen (yani, sayıları 2n olarak tanımladı ve daha sonra 2n = n dedi), argümanı, geçerli bir ispat olma kriterlerini karşıladığı için tümdengelimsel bir argüman (ispat) olarak kodlandı.

Tartışma

Bugüne kadar, bazı araştırmacılar, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat anlayışları, geçerli matematiksel argümanları belirleyememeleri, geçerli gerekçelendirmeler ve ispat üretme becerilerindeki eksiklikler ve K-12 düzeyinde ispatı öğretmek için gerekli alan bilgisi eksiklikleri hakkında fikir vermiştir. (örn., Knuth, 2002b, 2002c; Bieda, 2010). Bu çalışma, ortaokul öğretmenlerinin, özel olarak ispat öğrenimi ve öğretimi için gerekli olan alan bilgisini geliştirmek için tasarlanmış bir mesleki gelişim kursundaki ispat etkinlikleriyle etkileşimlerini ortaya koyarak literatüre katkıda bulunmaktadır. Bulgular, öğretmenlerin ispat ile ilgili etkinliklerle çeşitli yönleriyle (araştırma/keşif, gerekçe ve ispat) anlamlı bir şekilde uğraştıklarını göstermektedir - bu bulgular derste kullanılan ispat etkinliklerinin öğretmenlere ispat öğrenimi için zengin imkanlar sunduğunu göstermekte ve potansiyel olarak kendi öğrencilerini bu tür aktivitelere katılmalarına yardımcı olabilecek gerekli içerik bilgisini de geliştirdiklerini göstermektedir. Genel olarak, bulguların sunumunda yer almamasına rağmen, öğretmenlerin ders sırasında ortaya çıkan yeterliliklerini ispat etkinliklerinin tüm aşamalarına katılarak fark edilebilir bir iyileşme gösterdikleri söylenilebilir. Öğretmenlerin matematiksel gerekçelendirme ve ispat ile ilgili zorlukları gösteren literatürü göz önünde bulundurduğumuzda, bu gelişmeler önemli ve ümit vericidir, çünkü mesleki gelişim kursunun öğretmenlere gerçekten yardımcı olabileceğini ve bu zorlukların üstesinden gelebileceklerini göstermektedir. Bununla birlikte, bulgular öğretmenlerin gösterdikleri bu gelişimin yanında birçok yönde ispat ile ilgili anlayışlarını -özellikle neyin geçerli bir matematiksel argüman olarak sayılacağı, tümdengelimsel argümanların nasıl oluşturulacağı ve argümanların nasıl değerlendirileceği- konularında geliştirmeleri gerektiğini de ortaya koymaktadır. Öğretmenlerin ispatlama ile ilgili etkinliklerde zorluk çekmesi, öğretmenlerin ispat kavramlarına ilişkin literatür dikkate alındığında şaşırtıcı bir sonuç degildir. Ayrıca, bu sonucu, öğretmenlerin ispat kavramı anlayışlarını kendi sınıf uygulamalarını yansıttığı da dikkate değerdir; öğretmenler, genellikle öğrencilere ispat ile ilgili etkinliklerde araştırma aşaması için gerekli zamanı ve fırsatı vermekte, ancak öğrencilerini tümdengelimsel argümanlar üretmeye veya argümanları değerlendirmeye teşvik etme eğiliminde değillerdir (Bieda, 2010).

Bu çalışmanın sonuçları, öğretmenlerin, matematiksel olarak daha sofistike gerekçelendirmeler ve ispatlar geliştirmelerini kısıtlayan, ispat ile ilgili etkinliklere katılımıyla ilgili çeşitli faktörleri ortaya koymuştur. Daha önce belirtildiği gibi, bu faktörler matematiksel gerekçelendirmeye ve ispat sunmaya ihtiyaç duyulmaması (keşif aşamasından itibaren) ve cebirsel sembolizasyonun matematiksel fikirleri ifade etmenin uygulanabilir bir aracı olarak görmemesi (gerekçelendirmeden ve kanıt asamasından) olarak ifade edilebilir.

Gerekçelendirme ve İspat İhtiyacı

Matematiksel bir gerekçelendirmenin veya ispatın nihai olarak oluşturulabilmesi için, problemin araştırılması, örüntülerin tanımlanması ve genellemelerin yapılması (varsayımların geliştirilmesi) ve ortaya atılan iddialarını desteklemek için matematiksel argümanlar üretilmesi de dahil olmak üzere birkaç aşamalı bir süreç izlenebilir. Polya (1954), araştırma/keşif aşamasını makul bir mantık yürütme, "yapım sürecinde" öngörerek tahmin etmeye ve denemeye dayanan bir akıl yürütme olarak tanımlamıştır. Bu süreç başlı başına bir ispat olmasa da, bir ispatın oluşturulmasının çok önemli bir parçasıdır. Polya, ispatı bu keşif aşamasının bir sonucu olarak görmekte ve ispatı "gösterici akıl yürütme" olarak tanımlamaktadır. Bir bütün olarak, araştırma ve kanıt yapma süreci, yani "ispatlama etkinliği", matematik öğrenimi için bir araç olarak görülmektedir. Öğretmenlerin ispat etkinliklerindeki girişimlerinin niteliği de benzer bir süreç ortaya koydu; öğretmenler örüntüler tanımlayarak, genellemeler yaparak ve varsayımlar geliştirerek araştırma aşamasını gerçekleştirdiler. İlginç bir şekilde, öğretmenler bazen bir örüntünün matematiksel gerekçelendirme ve ispat için yeterli olduğuna ve örüntüyü bulduktan sonra daha fazla gerekçelendirme gereği duymamışlardır. Bu nedenle, öğretmenler araştırma aşamasında sıklıkla başarılı bir şekilde uğraşmış olmalarına rağmen bir bütün olarak ispat sürecini nadiren tamamladılar. Örüntüleri belirlemek ve genellemeler yapmak kesinlikle etkinliği ispatlamak için bir başlangıç noktasıdır, ancak öğretmenlerden ayrıca genellemenin neden doğru olduğu konusunda bir gerekçelendirme yapmaları beklenmektedir.

Bu mesleki gelişim kursuna katılan bütün ortaokul öğretmenlerinin, Connected Mathematics Project (CMP) müfredatını kendi çalıştıkları okulda kullandıklarını vurgulamak gereklidir. Stylianides (2005), CMP'deki etkinliklerin % 25'inin, öğrencileri ispatlama aktivitelerine dahil etmek için tasarlanan örüntü tanımlama işlemlerini içerdiğini tespit etmiştir. Bu nedenle, örüntü tanıma işlemi öğretmen müfredatının önemli bir parçasıdır ve yapısal olarak düşünme öğrenmenin bir yolu olabilir. Örneğin, bazı araştırmacılar, CMP'nin ispat etkinliklerinde örüntü tanımlamayı gerçekten çok fazla vurguladığını düşünmektedir (örn., Stylianides, 2008; Stylianides ve Silver, 2009; Bieda, 2010), bu nedenle bu öğretmenlerin temel olarak örüntü bulma ve genellemeler yapmaya odaklanmaları ancak gerekçelendirme ve ispatı göz ardı etmeleri şaşırtıcı değildir. Ayrıca, kendi öğrencilerinin de benzer kavramları geliştirmeleri şaşırtıcı değildir. Öğrencilerinin yapısal olarak akıl yürütme yeteneklerini arttırmak ve örüntü veya genellemenin neden yapıldığını açıklamak için, öğretmenlerin öncelikle bu tür bir öğrenmeyi deneyimlemeleri ve bu anlayışı kendileri için geliştirmeleri gerekir. Gerekçelendirme ve kanıtlama sağlamadan örüntü tanıma ve genelleme ile ilgili bir başka potansiyel problem, öğrencilerin problemleri doğru çözebileceği, ancak stratejilerinin neden işe yaradığını açıklayamaması olabilir. Başka bir deyişle, ispat etkinliklerinin araştırma aşamasına (makul akıl yürütme/düşünme) başarılı bir şekilde dahil olabilir, ancak gerekçelendirme ve ispat (gösterici akıl yürütme/düşünme) üretemeyebilirler.

Örüntü tanımlama birkaç örneğe dayanabileceğinden, bu, öğrencilerin örneklere güvenmesine ve örnek temelli argümanların ispat olduğuna inanmalarına neden olabilir. Örneğin, Jane, öğretmenlerin verdiği cevapları doğruysa onları zorlamadı; bu, ispat öğrenenlerin - öğrencilerin ve öğretmenlerin - "eğer cevaplarınız doğruysa, cevaplarınızı gerekçelendirmek zorunda kalmayacağınız anlamına gelir" yanılgısına yol açmasına neden olabilir. Bu tür bir durumu önlemek için öğretmenler, öğrencilerden, cevaplarının doğru ya da yanlış olup olmadıklarına bakılmaksızın, örüntülerinin ve genellemelerinin neden işe yaradığını düşündüklerini açıklamalarını istemelidir. Ayrıca öğretmenler, öğrencilerin bir noktadan sonra örüntünün bozulacağı, yanlış varsayımlar içeren bazı etkinlikler de sağlamalıdır.

Cebir Kullanımı

Cebirsel veya sembolik temsil, matematiksel düşünceleri ifade etmek ve gerekçelendirmeleri ve ispatları sunmak için önemli bir araçtır. Bununla birlikte, literatür, K-12 öğrencilerinin, geçerli matematiksel argümanlar için bile, argümanlarını geliştirmek ve sunmak için cebir kullanmadıklarını göstermektedir (örn., Bell, 1976; Healy ve Hoyles, 2000; Porteous, 1990; Knuth, Choppin ve Beida, 2009). Porteous (1990), öğrencilerin argümanlarında "neredeyse cebirsel ifadelerin hiç olmamasını hayal kırıklığı yarattığını" belirtmektedir (s. 595). Benzer şekilde, Knuth al. (2009) sadece birkaç öğrencinin sembolik cebiri gerekçelendirme ve ispatlama sürecinde kullanmaya çalıştığını tespit etmiştir. Healy ve Hoyles (2000), öğrencilerin biçimsel olarak (sembolik tarzda) değil, informal olarak (sözlü tarzında) argümanlarını ifade ettiklerini ve argümanlarında nadiren cebir kullandıklarını bulmuşlardır. Cebirsel sembollerin tercih edilmemesinin ardındaki bazı olası nedenleri, sembollerin öğrencilere bir şeyin neden doğru olduğu hakkında çok az bilgi sunması ve formal (cebirsel) argümanları takip etmekte zorlanmaları (Healy ve Hoyles, 2000) veya genel argümanlarını ifade etmenin uygun bir yolu olarak cebirsel ifadeleri görmemeleri olarak gösterilebilir (Knuth vd. 2009). Benzer şekilde, bu çalışmadaki öğretmenler de ispat etkinlikleriyle uğraşırken cebiri çok yararlı bulmamışlardır. Örüntüleri ve genellemelerini temsil etmek için cebir kullansalar da, özellikle aynı argüman görsel sunumlar kullanılarak sunulabiliyorsa, sembolik gösterimleri içeren argümaları soyut ve anlamsız bulmuşlardır.

Öğretmenlerin ispat etkinliklerinde daha fazla görsel sunum ve daha az cebirsel sembol kullanma tercihleri, öğrencilerin görsel ve cebirsel sunumlarını kullanmalarını yansıtmaktadır. Literatür, öğrencilerin argümanlarında cebir kullanmamasının nedeni olarak öğrencilerin sınırlı cebir anlayışlarıyla ilgili olduğunu ve sembolik gösterimleri kullanmak için bilişsel kaynaklara sahip olmadıklarını göstermiştir. Bu çalışmada öğretmenler genellikle cebir kullanmamayı tercih etmişlerdir, ki buda öğrencilerin ispat etkinlikleriyle uğraşırken sınırlı cebir kullanmaları konusunda katkıda bulunan bir faktör olarak görülebilir.

Cebirsel temsillerin soyut doğası nedeniyle, öğretmenler öğrencilerine ispat kavramını daha erişilebilir hale getirmek için görsel sunumları kullanabilir, ancak bu öğrencilerin ispatı tam olarak anladığı anlamına gelmez. Aksine, öğrencilerin ispat kavramını yanlış algılamalarına neden olabilir. Bu nedenle, öğretmenler matematiksel aktivitelerde cebirsel semboller kullanmanın önemini vurgulamalı ve cebirsel sembolizasyonun gerekçelendirme ve ispat için faydalı olduğunu öğrencilerine kavratmalılardır. Diğer bir öneri, hem öğretmenlerin hem de araştırmacıların görselleri ve cebirsel sembolleri daha dikkatli ilişkilendirmenin yollarını bulmak için çalışmalar yapmalılardır. Öğretmenler ve öğrenciler ispat etkinliklerinde görsel sunumları tercih ediyorlarsa, onlara daha fazla cebirsel ifadeler kullanmalarını söylemek muhtemelen yetersizdir, ancak sınıfta açıklayıcı görsellerden cebirsel ispatlara nasıl kaydırılacağını belirlemek yararlı olacaktır.

Sonuç

İlgili literatür, ispat anlayışlarının hem araştırmacıların hem de politika yapıcıların beklentisi olan ispat kavramının tüm sınıf seviyelerinde matematik eğitiminin merkezinde olması gereken bir öğrenme aracı olması fikri öğretmenlerin ispat anlayışlarıyla çok örtüşmediğini göstermektedir. Öğretmenler eğer sağlam bir gerekçelendirme ve ispat anlayışına sahipse, öğrencilerinin daha iyi bir ispat anlayışı geliştirmelerine yardımcı olabilirler. Bununla birlikte, ispatın öğrenilmesi ve öğretilmesindeki en büyük zorluklardan biri, öğretmenlerin ispat bilgilerini ispatı sınıf içindeki uygulamalarına taşıyabilecek şekilde geliştirmelerine nasıl yardımcı olacağının tam olarak ortaya konulamamasıdır. Nitekim, Stylianides ve Silver'in (2009) belirttiği gibi, mevcut literatür öğretmenlere ispatla ilgili etkinliklerde uzmanlık kazanmalarını desteklememektedir ve "öğretmenler için etkili mesleki gelişimin nasıl organize edileceği" konusunda çok az rehberlik sağlamaktadır (s. 249). İspatın K-12 matematik eğitiminin merkezi uygulamalarından biri olması gerektiği çağrısının başarısı, öğretmenlerin ellerindedir. Özellikle öğretmenlerin akıl yürütme ve ispatla ilgili görüşleri, sınıfta ispat öğretirken öğrencilerle sınıf içi uygulamalarda ne yaptıklarını etkilemekte, ders kitaplarındaki ispat etkinliklerini belirleme ve bunların öğrencilere nasıl uygulanması gerektiğini bilmede ve en önemlisi öğrencilerinin ispatla ilgili yaşadıkları zorlukları belirlemede ve öğrencilerin bu zorlukları aşmalarına yardımcı olmalarını doğrudan etkileyecektir. Bu çalışmanın sonuçları, matematik eğitimcilerine ve müfredat geliştiricilere, öğretmenlerin ispat algılarını daha net bir şekilde anlamalarında ve öğretmenlerin derslerinde önemli matematiksel uygulamalardan biri olarak ispatı uygulamak için ihtiyaç duydukları destek türünü sağlamada yardımcı olabilir.

En azından, bu çalışma, ortaokul öğretmenlerinin gerekçelendirme ve ispat yeterliliklerini ve ispatlama etkinliklerine katılımlarının niteliğini anlamamıza katkıda bulunmaktadır. Bu çalışmanın sonuçları, ortaokul matematik öğretmenlerinin ispat etkinliklerinin aşamalarında yer aldıklarını, problemi başarılı bir şekilde araştırabildikleri, ancak tümdengelimsel argümanlar üretmekte zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Bu çalışmanın yeni bulgularından biri, öğretmenlerin sembolik (cebirsel) temsillerin anlamayacak kadar soyut olduğuna inanmalarına rağmen, ispatların her zaman sembolik gösterimleri içermesi gerektiğine inanmaları olmuştur.

Öğretmenlerin ispatla ilgili içeriği nasıl öğrendiklerini ve öğrencilerini sınıflarında gerekçelendirme ve ispat ile nasıl ilişkilendirdiklerini anlamak için daha çok çalışma yapılması gerekmektedir. Bu alan için önemli adımlardan biri öğretmenlerin sınıflarına katılımlarının niteliğini ve onların öğretim uygulamalarında ispatlama etkinliklerini nasıl yürüttüklerini incelemektir. Hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin ispat kavramlarını incelemek ve sınıfta ispatla ilgili uygulamaların sınıf gözlemlerini yürütmek, öğrencilerin ispatına başarılı bir şekilde nasıl öğrenebilecekleri hakkında önemli bir bilgi sağlayacaktır. Bu nedenle, hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin ispat kavramlarını ve K-12 seviyesindeki aktiviteyi nasıl ispatladıklarını araştırarak öğretmenler ve öğrenciler için gerekçelendirme ve ispatın nasıl anlamlı bir matematiksel uygulama olduğunu anlamak için daha fazla araştırmaya ihtiyaç vardır.

Sonuç olarak, bu çalışma öğretmenlerin ispat ilgili uygulamaların öğretilmesinde ve öğrenilmesinde oynadığı rolün önemini vurgulamakta ve ortaokul matematik öğretmenlerinin lisans düzeyinde mesleki gelişim kursunda ispat öğrenme süreçlerine ışık tutmaktadır. Sonuçlar, alanın öğretmenlerin ispatları nasıl öğrendiğini ve oluşturduğunun yanı sıra ispat ile ilgili mesleki gelişimin nasıl yapılması gerektiğini anlamasına doğrudan katkıda bulunmaktadır.

References

Alibert, D. (1988). Toward new customs in the classrooms. *For the Learning of Mathematics*, *8*(2), 31-43.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). Kluwer: The Netherlands.

Ball, D., Hoyles, C., Jahnke, H., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). *The teaching of proof*. Paper presented at the International Congress of Mathematicians, Beijing, China.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof – explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*, 23-40.

Bieda (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351-382.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 359-387.

Chazan, D., & Lueke, H. M. (2009). Exploring tensions between disciplinary knowledge and school mathematics: Implications for reasoning and proof in school mathematics. *Teaching and learning mathematics proof across the grades*, 21-39.

Council of Chief State School Officers. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington, DC: Council of Chief State School Officers.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches.* London: Sage Publications.

Dogan, M. F. (2015). *The Nature of Middle School In-Service Teachers' Engagements in Proving-Related Activities.* Unpublished doctoral dissertation, Doctoral dissertation, University of Wisconsin-Madison, USA.

Dogan, M.F**.** (2017). Learning Proof as Collective Mathematical Activity. *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017),* (pp. 910-912), 11-13 May 2017, Harran University, Şanlıurfa.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). The discovery of grounded theory: strategies for qualitative theory. New Brunswick: Aldine Transaction.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, *21*(1), 6-13.

Hanna, G. (1995). Challenges to the importance of proof. *For the learning of mathematics, 15*(3), 42-49.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 5-23.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. In *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving* (pp. 3-18). Springer, Cham.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education, III* (pp. 234-283). Washington DC: Mathematical Association of America.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Healy L. & Hoyles C., (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education, *31*(4), 396-428.

Herbst, P., & Brach, C. (2006). Proving and doing proofs in high school geometry classes: What is it that is going on for students?. *Cognition and Instruction*, *24*(1), 73-122.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In *Proof and proving in mathematics education* (pp. 261-277). Springer Netherlands.

Knuth, E. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, *95*(7), 486-491.

Knuth, E. (2002b). Teachers conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 5*(1), 61-88.

Knuth, E. (2002c). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Knuth, E., Choppin, J., & Bieda, K. (2009). Middle school students' production of mathematical justifications. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153-170). New York, NY: Routledge.

Martin, W.G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal of Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Martin,T.S., McCrone, S.M.S., Bower, M.L.W., & Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and students actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 95-124.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 249-266.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ozgur, Z., Ellis, A.B., Vinsonhaler, R., Dogan, M.F., & Knuth, E. (2019, In Press). From examples to proof: Purposes, strategies, and affordances of example use. Journal of Mathematical Behavior.

Polya G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*, Princeton University Press.

Porteous, K. (1990). What do children really believe? *Educational Studies in Mathematics, 21*, 589-598.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, *13*(1), 55-80.

Selden A. & Selden J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Simon, M. A., & Blume, G. W. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 3-31.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38(1)*, 289-321.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J., & Silver, E. A. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics: The case of pattern identification. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 235–249). New York: Routledge.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*, 314-352.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), Compendium for research in mathematics education (pp. 237–266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D. O., & Mejia-Ramos, J. P. (2006). The long-term cognitive development of different types of reasoning and proof. In *Conference on Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Essen, Germany*.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Yin, R. K. (2006). Case study methods. In J. Green, G. Camilli, & P. Elmore (Eds.), The handbook of complementary methods in education research (pp. 111- 122). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Weber, K. (2005). Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3), 351-360.