

EWMA KONTROL KARTININ SHEWHART VE CUSUM KONTROL KARTLARI İLE KARŞILAŞTIRILMASI –SİMULASYON DENEMESİ-

Özlem EGE^(*)

ÖZET

Kontrol kartları üretim süreci esnasında meydana gelebilecek değişimi tespit etmek ve üretime ait çıktı verilerini görmek amacıyla kullanılan istatistiksel araçlardır. Bir üretim sürecinde üretilen ürünlerin daha önceden belirlenen standartlardan göstermiş olduğu küçük veya büyük sapmayı mümkün olduğunca çabuk tespit edebilmek, kalite kontrolde çok önemlidir. Bu sayede üretim sürecine zamanında müdahale ederek, sürecin tekrar istenilen seviyeye döndürülmesi ve meydana gelebilecek kayıpların önüne geçilmesi mümkün olacaktır. Kalite kontrol için üretim sürecinde uygulanması gereken kontrol kartları, o süreçte ilgilenilen kalite karakteristiğine göre değişiklik gösterir. Bu çalışmada kontrol kartlarından, Shewhart, CUSUM ve EWMA kartları üzerinde durulmuş ve EWMA kontrol kartının üretim süreci sırasında meydana gelen küçük veya büyük sapmalara karşı olan duyarlılığı, Shewhart ve CUSUM kartlarıyla karşılaştırılarak araştırılmıştır. Çalışmanın amacı, EWMA kontrol kartının hangi sapmalarda diğer kartlara göre daha duyarlı davrandığını belirlemektir. Bu amaca ulaşmak için her üç kontrol kartının hem ortalamalar hem de hatalı sayıları için Ortalama İşletim Uzunluğu (ARL) değerleri simülasyon yolu ile hesaplanmış ve bu değerler karşılaştırılarak üretimde meydana gelen sapmanın büyüklüğüne göre hangi kartın daha duyarlı olduğuna karar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: EWMA Kontrol Kartı, SHEWHART-CUSUM Kontrol Kartı.

1. Giriş

Kalite kontrol, bir işletmenin kalite hedeflerine ulaşması, kalite isteklerinin sağlanması için kullanılan uygulama yöntemleri ve faaliyetlerin tümü olarak tanımlanabilir ve üretilen mamulün önceden belirlenen standartlara uygun olması, piyasa şartlarında rekabet edebilmesi açısından son derece önemlidir.

Kalite düzeyinde gözlemlenen değişim rasgeleliğe bağlı genel nedenlere dayandırılmayacak kadar önemli olduğunda, bu değişimi zamanında belirleyebilmek, üretime ilişkin çıktı verilerini göstermek ve analiz etmek amacı ile kontrol kartları kullanılır. Kontrol kartları, tekrarlanan işlemlerin kontrol altında tutulması için kullanılan istatistiksel araçlardır. Teorik yapısı 1926 yılında Dr. Walter A. Shewhart tarafından oluşturulan kartlar, bir sürecin istatistiksel yöntemlerle ekonomik ve güvenilir bir biçimde kontrol altında

^(*) Araş. Gör., Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Buca-İZMİR

tutulmasında en etkili yöntemdir. Kontrol kartları, değişkenler ve özellikler için yapılan kartlar olmak üzere iki grupta incelenebilir.

2. Değişkenler için Kontrol Kartları

Değişkenler için kontrol kartlarının esası, bir sürecin işlerliğine üretimden düzgün aralıklarla alınan ve partiyi temsil ettiği kabul edilen örneklemelere ilişkin karakteristiklerin belirlenmesi ile karar verilmesidir. Bu durum bize hem kalite düzeyi hem de sürecin değişkenliği hakkında bilgi verilmesi yanında, dış etkenlerin sürece olan etkisinin kısa sürede belirlenmesini ve önlem alınmasını sağlar.

Ölçülebilir değişken olan kalite karakteristiği ile ilgilenildiğinde, öncelikle karakteristiğin ortalaması ve değişimi incelenir. Ortalama kalite düzeyini ya da süreç ortalamasını kontrol etmek için \bar{X} kontrol kartı kullanılır. Süreç değişimi veya değişkenliği ya standart sapma için kontrol kartı olan S kartı ile yada açıklık için kontrol kartı olan R kartı ile kontrol edilir. \bar{X} ve R kontrol kartları ölçülebilir her kalite karakteristiği için kullanılmaktadır. Ortalaması μ_w ve standart sapması σ_w olan bir kalite karakteristiği(w) için \bar{X} kartı oluşturulmak istendiğinde alt ve üst kontrol limitleri aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}\text{ÜKL} &= \mu_w + k \sigma_w \\ \text{Merkez Çizgi} &= \mu_w \\ \text{AKL} &= \mu_w - k \sigma_w\end{aligned}\quad (1)$$

Burada k, kontrol limitlerinin merkez çizgiden kaç standart sapma uzaklıkta olacağını gösteren katsayıdır.

Uygulamada genellikle μ ve σ bilinmez. Sürecin kontrol altında olduğunun bilindiği bir zaman içinde bu parametrelerin önceden tahmin edilmesi gerekir. Bu tahminler en az 20, 25 örnekleme dayanan tahminler olmalıdır. $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ her bir örneklemin ortalaması olsun. μ 'nün en iyi tahmini ;

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}\quad (2)$$

olur. Böylece $\bar{\bar{x}}, \bar{X}$ kartında merkez çizgi olarak kullanılır. Kontrol limitlerinin oluşturulabilmesi standart sapma σ 'nın da tahmin edilmesi gerekir. σ 'nın tahmini ya standart sapmalardan ya da açıklıklardan yapılabilir. Eğer σ 'nın

tahmini açıklıklardan yapılırsa μ ve σ bilinmediğinde \bar{X} kartının limitleri aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2} \quad , \quad R = x_{\max} - x_{\min} \quad , \quad \bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{\bar{X}} + \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \\ \text{Merkez Çizgi} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{AKL} &= \bar{\bar{X}} - \frac{3}{d_2 \sqrt{n}} \bar{R} \end{aligned} \quad (4)$$

σ 'nın tahmini standart sapmalardan yapılırsa \bar{X} kartının limitleri aşağıdaki gibi olur.

$$s_i = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad \bar{s} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m s_i \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \bar{\bar{X}} + \frac{3\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}} \\ \text{Merkez Çizgi} &= \bar{\bar{X}} \\ \text{AKL} &= \bar{\bar{X}} - \frac{3\bar{s}}{c_4 \sqrt{n}} \end{aligned} \quad (6)$$

d_2 ve c_4 değerleri değişik n 'ler için tablo halinde kalite kontrol kitaplarında verilmektedir. Kartlar için yapılan genel teoriyi ilk defa Dr. W.A. Shewhart yaptığı için bu kartlar literatürde Shewhart kartları olarak bilinir.

3. Özellikler İçin Kontrol Kartları

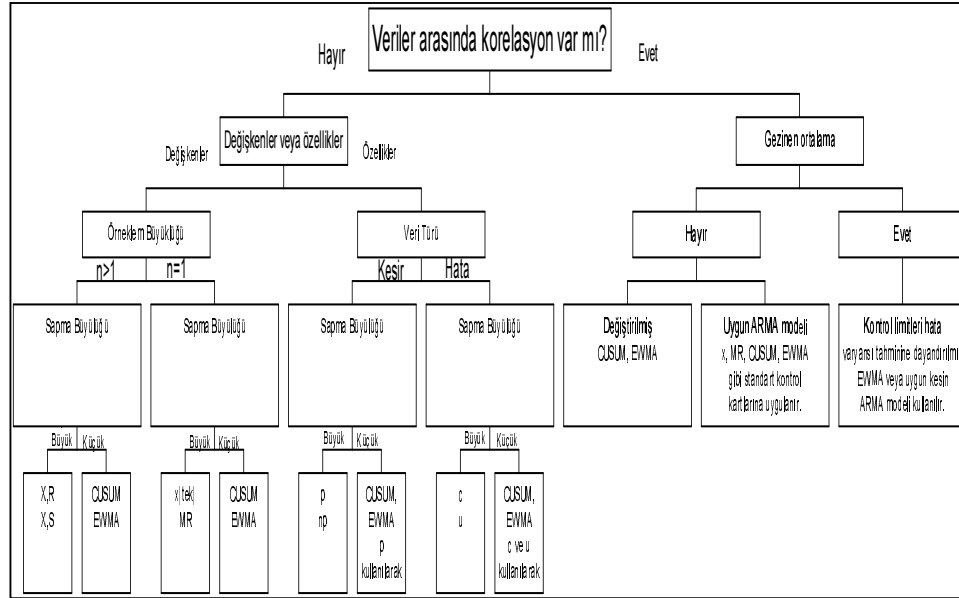
Değişkenler için kullanılan kontrol kartları çok etkin kontrol araçları olmakla beraber bazı durumlarda kullanılmaları pratik olmayabilir. Bir ürünün çok fazla sayıda kalite özelliği varsa her bir kalite özelliği için \bar{X} veya R bulunması gerekebilir. Oysa bu özelliklerden biri kontrol dışı olduğunda ürün hatalı olarak kabul edilir. Bu gibi durumlarda özellikler için olan kontrol kartlarını kullanmak daha uygun olur. Özellikler için kontrol kartları:

- A) Hatalı oranı için kontrol kartı (\bar{p})
- B) Hata sayısı için kontrol kartı (c)
- C) Hatalı sayısı için kontrol kartı (np)
- D) Birim başına hata sayısı için kontrol kartı (u)

Olarak adlandırılır. Çalışmada özellikler için kullanılan kartlardan sadece c kartları ile ilgilenildiğinden, bu bölümde yalnızca c kartlarının limitlerinin formülleri verilmiştir.

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= c + 3\sqrt{c} \\ \text{Merkez Çizgi} &= c \\ \text{AKL} &= c - 3\sqrt{c} \end{aligned} \quad (7)$$

İlgilenilen kalite karakteristiğine ve veriler arasında korelasyon olup olmamasına göre hangi kontrol kartının uygulanması gerektiği Şekil 1'de gösterilmektedir.



Şekil 1. Kontrol Kartı Seçme Şeması

4. EWMA Kontrol Kartı

EWMA (Üssel Ağırlıklı Hareketli Ortalamalar) kontrol kartı ilk olarak 1959 yılında Roberts tarafından geliştirilmiştir. EWMA kontrol kartının performansı, CUSUM kontrol kartına çok benzer olmakla birlikte, oluşturulması ve uygulanması CUSUM kartına göre daha kolay olan bir kontrol kartıdır. EWMA kontrol kartı Shewhart kontrol kartı kadar kolay grafiklenebilir. EWMA bazı durumlarda bir sonraki gözlemi tahmin etmede de

kullanılabilir. EWMA kontrol kartları bazı kaynaklarda Geometrik Hareketli Ortalama kartı olarak da adlandırılırlar. EWMA aşağıdaki gibi tanımlanabilir, EWMA= $z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$

$$z_0 = \mu_0 \quad (8)$$

Burada λ $0 < \lambda < 1$ olan bir düzeltme katsayısıdır. Z_i ile gösterilen EWMA, tüm önceki örneklem ortalamalarının ağırlıklı ortalamasıdır. Eğer x_i gözlem değerleri σ^2 varyanslı bağımsız rassal değişkenler ise, z_i 'nin varyansı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sigma_{z_i}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}] \quad (9)$$

z_i değeri aşağıdaki kontrol limitleri ile karşılaştırılarak süreç hakkında bir karara varılır.

$$\begin{aligned} \text{ÜKL} &= \mu_0 + L\sigma \sqrt{\sigma_{z_i}^2} \\ \text{Merkez Çizgi} &= \mu_0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{AKL} = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\sigma_{z_i}^2}$$

Bazı durumlarda önceki verilerin ortalaması EWMA'nın başlangıç değeri olarak kullanılır ($z_0 = \bar{x}$). Bu durumda kontrol limitlerinde de \bar{x} kullanılır. Kontrol limitlerindeki L faktörü limitin genişliğidir.

5. EWMA Kontrol Kartının Shewhart ve CUSUM Kontrol Kartlarıyla Karşılaştırılması

Bu çalışmada Shewhart, CUSUM ve EWMA kontrol kartlarının ortalamalar ve hata sayıları için süreçteki sapmanın büyüklüğüne göre duyarlılıkları simülasyon yolu ile araştırılmıştır. Karşılaştırma, bu üç kontrol kartının her biri için yazılan Fortran programları ile ARL değerleri hesaplanarak yapılmıştır. ARL değeri, süreç sırasında bir örneklem reddedilinceye kadar kabul edilen örneklem sayılarının ortalamasıdır. Ortalamalar için yapılan simülasyon çalışmasında, üretilen rassal sayılar, ortalaması sapma değerine eşit ve varyansı bir olan normal dağılımdan üretilmiştir. Sayılardan elde edilen örneklemelerden hangisinin red hangisinin kabul edileceğine, formül 1'deki kontrol limitleri kullanılarak yazılan Fortran programı ile karar verilmiştir. Aynı programda ARL değerleri de hesaplatılmıştır. Hata sayıları için ise sayılar ortalaması $4 + 2x$ sapma değerli Poisson, dağılımından üretilmiştir. Üretilen sayılardan elde edilen örneklemelerden hangisinin red hangisinin kabul edileceğine, formül 7'deki kontrol limitleri kullanılarak yazılan Fortran programı ile karar verilmiştir. Programda ARL değerleri de hesaplatılmıştır.

Yapılan çalışma sonucunda elde edilen değerler, karşılaştırılmalı olarak Tablo 1 ve Tablo 2’de verilmiştir. Üretilen rassal sayılar çok yer kaplayacağından dolayı makalede gösterilememiştir(İstenildiği taktirde ilgilenenlere iletilebilir).

Tablo 1: Ortalamalar için Simülasyon Yolu ile Shewhart, CUSUM, EWMA Kontrol Kartlarının ARL Değerlerinin Karşılaştırılması

Sapma	ARL Değerleri			
	Shewhart Kartı	CUSUM Kartı	EWMA Kartı	
			$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$
0.00	494.1480	574.1450	478.9630	384.8660
0.50	43.7590	28.8240	10.6950	12.6900
0.80	12.2400	6.9900	5.0240	4.8980
1.00	6.1490	3.8960	3.7510	3.3890
1.25	3.2360	2.4870	2.8900	2.4590
1.50	2.0040	1.8370	2.3990	1.9870
2.00	1.1890	1.2590	1.8900	1.4280

Tablo 2: Hata Sayıları için Simülasyon Yolu ile Shewhart, CUSUM, EWMA Kontrol Kartlarının ARL Değerlerinin Karşılaştırılması

Sapma	ARL Değerleri						
	Shewhart Kartı	EWMA Kartı		CUSUM Kartı			
		$\lambda=0.2$	$\lambda=0.4$	$\beta=0.1$		$\beta=0.05$	
				$\alpha=0.05$	$\alpha=0.005$	$\alpha=0.05$	$\alpha=0.005$
0.00	357.3330	481.3450	338.5340	169.72	263.21	309.46	552.42
0.50	72.3700	32.1060	34.8300	19.386	25.199	26.224	33.589
0.80	34.8770	13.8100	14.7830	8.680	9.385	10.657	11.637
1.00	24.1590	10.1080	10.3900	6.280	6.494	7.470	7.883
1.25	15.3060	6.9030	6.6530	4.675	4.722	5.496	5.639
1.50	10.4260	5.6410	5.3630	3.714	3.723	4.404	4.532
2.00	5.7060	3.9010	3.4930	2.626	2.628	3.185	3.249

6. Sonuç

Tablo 1.’e bakıldığında ortalamadan 0.80 sapma gösteren bir süreçte, Shewhart kontrol kartının ARL değeri 12.24, CUSUM kontrol kartının 6.99, EWMA kontrol kartının ise $\lambda=0.2$ olduğunda 5.024, $\lambda=0.4$ olduğunda 4.898 olduğu görülmektedir. Bu değerlerin anlamı ortalamadan 0.80’lik bir sapma olduğunda Shewhart kartı ortalama 12 örneklemden sonra süreci reddediyor, CUSUM kartı ortalama yaklaşık 7.örneklemden sonra süreci reddediyor.

EWMA kartı ise süreci ortalama 5 örneklemden sonra reddediyor. Bu durumda EWMA kartı ortalama 0.8 sapma gösteren bir süreci en erken keşfeden kontrol kartıdır.

Ortalama sapma miktarı büyüdükçe EWMA bu duyarlılığını kaybediyor. Tablo2.'deki değerlerden EWMA kontrol kartının hata sayısından olan küçük sapmalara karşı duyarlılığı araştırıldığında, kartın duyarlılığını kaybettiği gözleniyor. Örneğin hata sayısı c 'den 0.50 miktarında bir sapma olursa, Shewhart kartı bu sapmayı ortalama 72 örneklemden sonra, CUSUM kartı ortalama 25 örneklemden sonra EWMA kartı ise $\lambda=0.2$ iken ortalama 32 örneklemden $\lambda=0.4$ iken ortalama 34 örneklemden sonra keşfetmektedir. Hata sayıları söz konusu olduğunda küçük sapmaları CUSUM kartı daha çabuk keşfetmektedir.

Tablolardan görüldüğü gibi, ortalamalar için EWMA, CUSUM ve Shewhart kartlarına göre küçük sapmalara karşı daha duyarlı bir kontrol kartıdır. Dolayısı ile süreç sırasında ortalama olan en küçük sapmayı en çabuk haber verme özelliğine sahiptir. Hata sayıları için ise, CUSUM kartı diğer kartlara oranla küçük sapmayı en erken haber veren kontrol kartıdır. EWMA kontrol kartı ortalamalar için gösterdiği duyarlılığı hata sayıları için gösterememektedir. Küçük ve büyük sapmaların birlikte önemli olduğu süreçlerde, ortalamalar için Shewhart ve EWMA kartları birleştirilerek uygulanabilir. Bu kart, her iki tür sapmaya karşı duyarlı olan bir kontrol kartı olacaktır.

ABSTRACT

Quality Control is very important for a product's conformance to a standard that has been determined before and for a product's competitiveness in the market conditions. Statistical techniques and engineering technology are very useful in the quality control applications. Statistical Process Control (SPC) is a quality control method that uses statistical techniques. Control charts are one of the seven major tools of SPC. These charts are the statistical tools used for keeping the repetitive process under control and to show the production data. It is very important to detect a shift which occurred in the process as soon as possible. That is because, the sooner the information about the shift that takes place in the process is received, the earlier the necessary precautions and corrections in the process are affected. So, possible bigger future problems are prevented. Which control chart should be used depends on the quality characteristic of interest in the process. In this study, we studied the Shewhart, Cumulative Sum (CUSUM) and Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control charts and investigated the sensitivity of EWMA to others for different shift sizes. While doing this study, we calculated the Average Run Length (ARL) values for both averages and number of defects by simulation for

all three charts and compared them to find which control chart is more sensitive for which size of shift.

KAYNAKÇA

- CROWDER, S.V.(1989), "Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes", *Journal of Quality Technology*, 21, 155-162.
- CROWDER, S.V., and HAMILTON, M.D.(1992), "An EWMA for Monitoring a Process Standard Deviation", *Journal of Quality Technology*, 24,12-21
- GRANT, E.L., and LEAVENWORTH, R.S.(1988), "*Statistical Quality Control (6th ed.)*" New York: McGraw-Hill Book Company.
- HAMILTON, M.D., and CROWDER, S.V.(1992), "Average Run Lengths of EWMA Control Charts for Monitoring a Process Standard Deviation", *Journal of Quality Technology*, 24, 44-50.
- HSOON NG, C. , and CASE, K.E.(1989), "Development and Evaluation of Control Charts Using Exponentially Weighted Moving Averages", *Journal of Technology*, 21, 242-250.
- HUNTER, J.S.(1986), "The Exponentially Weighted Moving Average", *Journal of Technology*, 18, 203-210.
- LUCAS, J.M., and SACCUCI, M.S.(1990), "Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements", *Technometrics*, 32, 1-12.
- MONTGOMERY, D.C. (1997), *Introduction to Statistical Quality Control*,(3rd ed.) New York: John Wiley & Sons.
- ROBERTS, S.W (1959), " Control Chart Tests Based on Geometric Moving Averages", *Technometrics*, 1, 239-250.
- MACGREGOR, J.F. and HARRIS, T.J.(1993), "The Exponentially Weighted Moving Variance", *Journal of Quality Technology*, 25, 106-118.
- SRIVASTAVA, M.S. and Wu, Y.(1993), "Comparison of EWMA, CUSUM and Shirayayev Robersts Procedures for Detecting in the Mean", *The Annals of Statistics*, 21, 645-670.