



POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)

URL: <http://dergipark.org.tr/politeknik>



Üç boyutlu kirişlerin doğrusal olmayan mekanik davranışı için *Mathematica* kullanarak sonlu elemanlar yöntemi uygulaması

Finite element method application for nonlinear mechanical response of three-dimensional beams using Mathematica

Yazar(lar)((Author(s)): Hakan TANRIÖVER

ORCID: 0000-0003-2020-2438

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz (To cite to this article): Tanrıöver H., “Üç boyutlu kirişlerin doğrusal olmayan mekanik davranışı için *Mathematica* kullanarak sonlu elemanlar yöntemi uygulaması”, *Politeknik Dergisi*, 22(4): 961-966, (2019).

Erişim linki (To link to this article): <http://dergipark.org.tr/politeknik/archive>

DOI: 10.2339/politeknik.439546

Üç Boyutlu Kirişlerin Doğrusal Olmayan Mekanik Davranışı için *Mathematica* Kullanarak Sonlu Elemanlar Yöntemi Uygulaması

Araştırma Makalesi / Research Article

Hakan TANRIÖVER*

Mühendislik Fakültesi, Makine Müh. Bölümü, Çankaya Üniversitesi, Ankara, Türkiye

(Geliş/Received : 01.07.2018 ; Kabul/Accepted :07.01.2019)

ÖZ

Kirişlerin büyük dönmeler ve yer değiştirmeler altında mekanik davranışı incelendi. Crisfield tarafından verilen eş-dönüştü formülasyon yardımıyla üç boyutlu kiriş sonlu elemanları Mathematica yazılımı içerisinde modellendi. Mathematica yazılımının sembolik işlemcisi sayesinde modele ait parametreler değişken tutulabilir ve değişik geometrilerdeki kirişler kolayca modellenebilir. Doğrusal olmayan denklem takımları Newton-Raphson yöntemi ile çözüldü. Dinamik hareket denklemi ve sayısal zaman integrasyon yöntemi ortaya konuldu yalnız çözümler ileriye çalışmalara bırakıldı. Literatürdeki çalışmaların ve ANSYS programının sonuçlarıyla karşılaştırmalar yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Üç boyutlu kiriş, Mathematica, doğrusal olmayan analiz.

Finite Element Method Application For Nonlinear Mechanical Response Of Three-Dimensional Beams Using *Mathematica*

ABSTRACT

Mechanical behavior of beams under large rotations and displacements was investigated. Using co-rotational approach given by Crisfield, three dimensional beam finite elements was modeled in Mathematica environment. The symbolic process of Mathematica provides keeping the parameters in the model as variables and beams having different geometries can be modelled easily. The yielding non-linear equation system was solved by utilizing Newton-Raphson technique. Dynamic balance equations and numerical time integration method were introduced, the solution process was left as a future work, however. Comparisons with the results of ANSYS and those of the works from the literature are accomplished.

Keywords: Three-dimensional beams, Mathematica, nonlinear analysis.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Esnek mekanizmalar, robot kolları, yaylar, uzay kafes sistemleri ve benzeri mühendislik uygulamalarında kullanılan üç boyutlu kiriş modellerinde büyük yer değiştirmelerin ve dönmelerin göz önüne alınmaları gerekir. Burada en büyük zorluklardan birisi dönme değişkenlerinin vektörel yapıya sahip olmamalarıdır [1]. Bazı araştırmacılar kirişteki dönmelerden gelen yer değiştirmeler ile şekil değiştirmelerden gelen yer değiştirmeleri ayrıştırılarak eş-dönüştü (co-rotational) bir formülasyon kullanmışlardır. Bu formülasyonda her elemana bağlı, eleman ile birlikte dönen fakat şekil değiştirmeyen bir kartezyen eksen takımı mevcuttur. Eş-dönüştü formülasyonu kullanarak kiriş elemanların modellemesini ilk olarak Oran ve Kassımalı [2] ile

Belytschko ve arkadaşları [3] yaptılar. Oran ve Kassımalı, iki boyutlu kirişlerin dinamik davranışını kiriş-kolon yaklaşımı ile açıkladıkları eş-dönüştü

formülasyon yardımıyla çözdüler. Bu çalışmalarında kirişe ait küçük şekil değiştirmeler için tanjant katılık matrislerini oluşturdu fakat çok büyük dönmeleri ele almadılar. Üç boyutlu kirişlerin, eş-dönüştü formülasyon kullanarak küçük şekil değiştirmeleri ve büyük dönmeleri için tanjant katılık matrislerinin oluşturulması ile doğrusal olmayan analizi, birkaç araştırmacı tarafından verilmiştir [3-5]. Bu formülasyon ile üç boyutlu kirişlerin büyük şekil değiştirmelerini de kapsayan bir çalışma Pai tarafından gerçekleştirilmiştir [6]. Le ve arkadaşları eş-dönüştü formülasyonunu sonlu elemanlar ve Newmark zaman adımı yöntemleri ile birlikte uygulayarak kirişlerin doğrusal olmayan dinamik davranışlarını çözümledikleri [7]. Bu çalışmalarında Crisfield [4] tarafından verilen formülasyonun en iyi alternatif olduğunu belirtmişlerdir. Jonker ve arkadaşları Timoshenko kiriş modelinde doğrusal olmayan etkileri göz önüne alarak üç boyutlu kirişlerin sonlu elemanlar çözümünü yaptılar [8]. Üç boyutlu kirişlere ait başka formülasyonları içeren çalışmalar da literatürde bulunabilir [9-14].

*Sorumlu Yazar (Corresponding Author)

e-posta : htanriover@canakaya.edu.tr

Bu çalışma kapsamında Crisfield tarafından verilen kirişlerin eş-dönümlü formülasyonu ele alınarak Mathematica yazılımında bir sonlu elemanlar modeli kuruldu. Literatürde verilen örnekler ile ve ANSYS yazılımı kullanılarak elde edilen sonlu elemanlar sonuçları ile karşılaştırmalar verildi.

2. DENKLEMLER (EQUATIONS)

Crisfield formülasyonu kullanılarak denge denklemlerinin elde edilmiş şekli aşağıda özetlenmiştir.

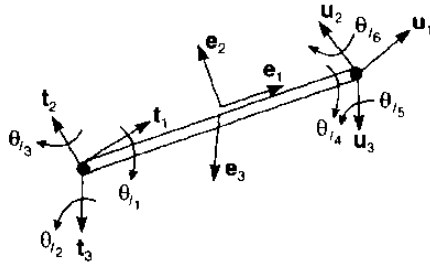
Elemanın her bir düğüm noktasında üç dönme ve üç yer değiştirme olmak üzere altı serbestlik derecesi vardır. Şekil 1.'de kiriş elemana ait yerel koordinat sistemi ve serbestlik dereceleri gösterilmiştir. Denklemlerde alt indis "i" yerel değişkenleri belirtmek için kullanılmıştır. Tekrar vurgulamak gerekirse yerel olarak eleman doğrusal olarak davranmaktadır, burada doğrusal olmayan davranış eş-dönümlü formülasyon aracılığıyla büyük dönmelerden gelmektedir.

Elemana ait yerel serbestlik dereceleri;

$$\mathbf{p}_i^T = (\mathbf{d}_{i1}^T, \theta_{i1}^T, \mathbf{d}_{i2}^T, \theta_{i2}^T) \quad (1)$$

$$\mathbf{d}_{ii}^T = (u_{ii}, v_{ii}, w_{ii}) \quad \{i = 1,2\} \quad (2)$$

olarak belirlenmiştir. Burada u, v, w sırasıyla yerel x, y ve z yönündeki yer değiştirmelerdir. Eleman üzerinde tanımlı birim vektörlerden \mathbf{e}_1 , birinci ve ikinci düğüm noktaları arasından geçen doğrultuda tanımlanmıştır ve



Şekil 1. Kiriş eleman ve serbestlik dereceleri (Beam element and the degrees of freedom) [4]

şu şekilde hesaplanabilir;

$$\mathbf{e}_1 = (\mathbf{x}_{21} + \mathbf{d}_{21})/l_n \quad (3)$$

Burada $\mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ konum vektörü, $\mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$ yer değiştirme vektörü ve l_n elemanın son boyudur. Yerel düğüm kuvvetleri (\mathbf{q}_i) ile dönmeler (\mathbf{p}_i) arasında Euler-Bernoulli kiriş kabulleri kullanılarak doğrusal bir ilişki yazılabilir.

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{K}_i \mathbf{p}_i \quad (4)$$

Örneğin kirişteki aksenal kuvvet (N) ve momentler (\mathbf{M}) aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$N = \frac{EA}{l_0} u_1, \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}(\theta_i - \theta_{i0}) \quad (5)$$

Burada sıfır alt indisli ilk hali, $\mathbf{u}_i = l_n - l_0$ ve \mathbf{D} ise momentler ile eğimler arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Yerel ile genel serbestlik dereceleri arasında $\delta \mathbf{p}_i = \mathbf{F}^T \delta \mathbf{p}$ ilişkisi olduğunu düşünelim, yerel ve genel sistemlerde virtüel iş eşitlenerek;

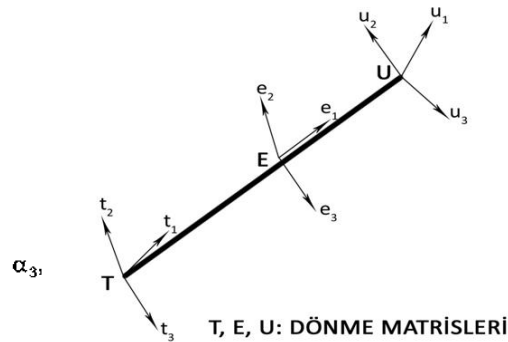
$$\mathbf{q}_i = \mathbf{F}^T \mathbf{q}_{ii} = \mathbf{F}^T \mathbf{K}_i \mathbf{p}_i \quad (6)$$

genel iç kuvvet vektörü \mathbf{q}_i bulunabilir. Buradan tanjant katılık matrisi \mathbf{K}_T

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_i &= \mathbf{F}^T \delta \mathbf{q}_{ii} + \delta \mathbf{F}^T \mathbf{q}_{ii} \\ &= \mathbf{F}^T \mathbf{K}_i \delta \mathbf{p} + \mathbf{K}_{T\sigma} \delta \mathbf{p} = \mathbf{K}_T \delta \mathbf{p} \end{aligned} \quad (7)$$

şeklinde hesaplanabilir. Eleman üzerinde tanımlı yerel birim vektörler Şekil 2.'de açıkça görülmektedir. Burada E, U ve T dönme matrisleri, ilgili birim vektörlerin kolon halinde yazılmasıyla oluşturulmuştur. Tanjant katılığın ve bu dönme matrislerin adım adım nasıl hesaplandığı burada verilmeyecektir, ilgili bilgilere [4]'den ulaşılabilir.

Tanjant katılık matrisi, yapısı gereği simetrik değildir. Fakat sayısal deneyler, tanjant katılık matrisinin iterasyonlar sonucunda denge haline yaklaşıldıkça simetrik olma eğilimi taşıdığını göstermiştir [4]. Denge haline yakınsama Newton-Raphson yöntemi yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Newton-Raphson yönteminde her iterasyon içerisinde genel serbestlik derecelerindeki değişim $\Delta \mathbf{p}$ aşağıdaki şekilde hesaplanır.



Şekil 2. Eleman üzerinde yerel üçlü birim vektörler (Local triads on the element)

$$\Delta \mathbf{p} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_e) \quad (8)$$

Burada, i ve e alt indisleri iç ve dış kuvvet vektörlerini göstermektedir. Bu noktada yakınsama kriteri sağlanmıyor ise serbestlik dereceleri güncellenir ve denge denklemleri tekrar çözülür. Geliştirilen Mathematica kodu, oldukça uzun olduğundan burada verilmemiştir, fakat gerekir ise yazardan temin edilebilir. İlgili kodun algoritması Ek'de görülebilir.

Kirişin dinamik davranışını çözmek için zamanda integrasyon yöntemlerinden birisi kullanılabilir. Genel halde bir adım sonunda dinamik denge hali;

$$(\mathbf{q}_{i,n+1} - \mathbf{q}_{e,n+1}) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (9)$$

şeklinde verilebilir. Burada **M** kütle matrisi, **C** sönüm matrisi ve **d** yer değiştirme vektörüdür. Zaman integrasyonu olarak Newmark-β yöntemi kullanılırsa her adımda yer değiştirmeler ve hız vektörleri;

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{\dot{d}}_n + \Delta t^2 ((1 - 2\beta) \mathbf{\ddot{d}}_n + 2\beta \mathbf{\ddot{d}}_{n+1})/2 \quad (10)$$

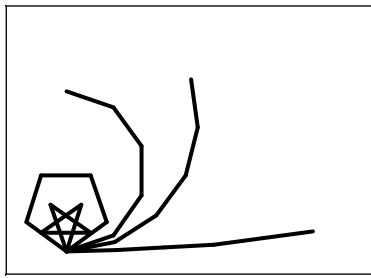
$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t ((1 - \gamma) \mathbf{\dot{d}}_n + \gamma \mathbf{\dot{d}}_{n+1}) \quad (11)$$

denklemleri yardımıyla bulunabilir. Yukarıdaki denklemler dinamik denge denklemine yerleştirilip tanjant katılık matrisi de kullanılarak;

$$\mathbf{q}_{i,n} - \mathbf{q}_{e,n+1} + \mathbf{K}_{t,n} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{M} \left(\frac{4}{\Delta t^2} \Delta \mathbf{d} - \frac{4}{\Delta t} \mathbf{\dot{d}}_n - \mathbf{\ddot{d}}_n \right) + \mathbf{C} \left(\frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{d} - \mathbf{\dot{d}}_n \right) = \mathbf{0} \quad (12)$$

eşitliği yazılabilir. Böylece her bir zaman adımında sanki statik doğrusal olmayan denklemler Newton-Raphson yöntemi ile çözülür. Bu çalışma kapsamında henüz dinamik problemlerin çözümüne ulaşılamamıştır. Aşağıda verilen örnekler yapılan statik çözümlere ait sonuçlardan oluşmaktadır.

3. SAYISAL ÖRNEKLER (NUMERICAL EXAMPLES)



Şekil 3. Sağ ucundan moment uygulanmış ankastre kiriş. Aynı grafik üzerinde eğilmiş olarak gösterilen kirişlere ait moment değerleri sağdan sola sırasıyla 0.025M*, 0.3M*, 0.5M*, M*, 2M*. Burada, $M^* = \frac{ML}{2\pi EI}$ alınmıştır. (Cantilever beam subject to end moment)

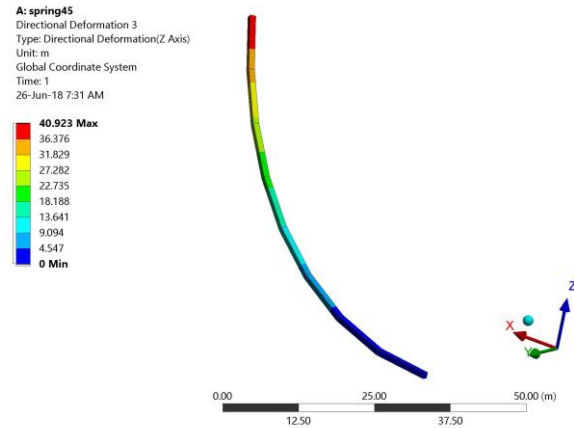
3.1 Örnek-1: Uçunda Moment Taşıyan Ankastre Bir Kiriş (Case-1: Cantilever Beam Subject to End Moment)

Sol uçunda ankastre mesnet olan düzgün bir kirişe sağ uçundan eğilme momenti uygulanıyor (bkz. Şekil 3.). Bu aslında iki boyutlu bir saf eğilme problemidir, fakat problem Crisfield'ın verdiği üç boyutlu formülasyon ile 5 eleman kullanılarak Mathematica ortamında çözdürülmüştür. Newton-Raphson yönteminde yakınsama kriteri $\epsilon = \frac{\|\mathbf{g}\|}{\|\mathbf{q}_e\|} < 1/1000$ olarak alındığında her adımda yalnızca 4 iterasyon gerekli olmuştur. Burada g dengeyi bozan kuvvet vektörü, qe ise dış kuvvet vektörünü göstermektedir.

3.2 Örnek-2: 45 Derecelik Yay

(Case-2: Forty-five Degree Bend)

Bir uçundan ankastre diğer uçundan yay düzlemine dik olacak şekilde kuvvet uygulanan 45 derecelik bir yay ele alınmıştır. Şekil 4.'de yay geometrisi gösterilmiştir. Birim kesit alana sahip yayın elastisite modülü 107 olarak alınmıştır ve yay sekiz eleman ile modellenmiştir. 600 birimlik yük 8 eşit adımda yüklenmiş ve her adımda 5 iterasyon yeterli olmuştur (bkz. Şekil 5.).

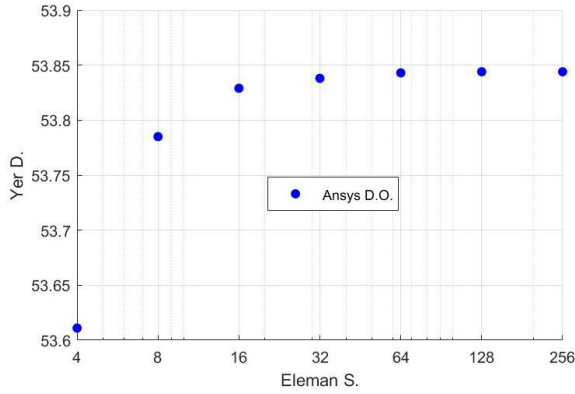


Şekil 6. 45 derecelik yayın 300 birim kuvvet altında deformasyonu ve z yönünde yer değiştirmesi (ANSYS) (Deformation of the 45 degree bend under load of 300 in z direction)

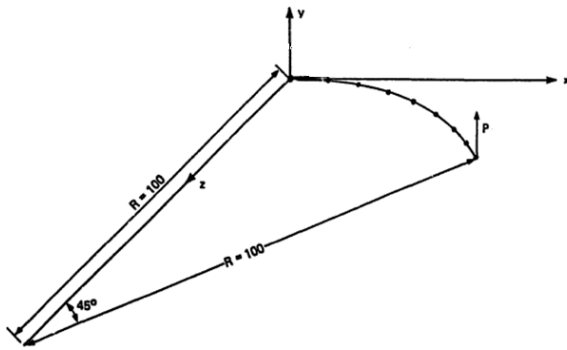
Aynı problem ANSYS programında BEAM188 tipindeki eleman kullanılarak da çözülmüştür (bkz. Şekil 6.). Yayın geometrisi ve mekanik özellikleri açısından kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilebilir ve BEAM188 tipi elemanda kayma şekil değiştirmeleri kullanılmamıştır, böylece Crisfield formülasyonuna paralel olarak her düğüm noktasında 3 dönme 3 öteleme olmak üzere 6 adet serbestlik derecesi vardır. Sonlu eleman modelinde 8 eleman 17 düğüm noktası bulunmaktadır. ANSYS, 3 ara adım ve her adımda 7 iterasyon ile çözümleme yapmıştır. ANSYS programında doğrusal ve doğrusal olmayan analiz için ayrı ayrı analizler yapılmıştır. Sonuçlar geliştirilmiş olan Mathematica kodu sonuçları ile karşılaştırılmış oldukça uyumlu oldukları görülmüştür (bkz. Çizelge 1. ve Şekil 7.). Bu analizde Mathematica komutlarının çalıştırılması için geçen süre 3.6 saniye sürmüştür. Aynı problem için ANSYS programında işlemler için 2.5 saniye geçtiği çözüm raporunda belirtilmiştir. Çözümleme süreleri açısından çok büyük farklar olmamakla birlikte, ANSYS programında her farklı geometri için sonlu elemanlar modelinin oluşturulmasının getireceği ek süreler hesaba katılmalıdır. Yay probleminin sonlu elemanlar analizinde uygun sayıda eleman kullanılması için ağ hassasiyeti ölçülmüştür (bkz. Şekil 8.). Görüldüğü gibi daha doğru sonuçlar almak için eleman sayısını arttırmak gerekmektedir fakat bu çalışmada sonlu elemanlar

modellemesinin ağ yapısı üzerine detaylara girilmemiştir.

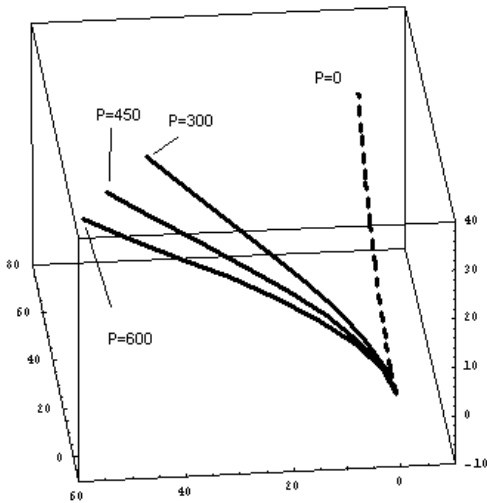
sayede yapısal optimizasyon kodları ile birlikte çalıştırılabilir. Hazır sonlu elemanlar programları kullanarak parametrelerin bu kadar kolay değiştirilmesi mümkün olmayabilir.



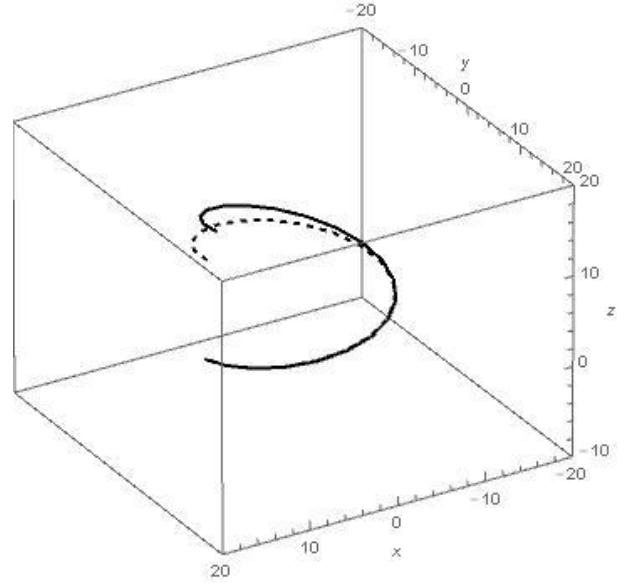
Şekil 8. Eleman sayısına bağlı olarak 45 derecelik yayın uç noktasının düzlem dışı yer değiştirme miktarlarının değişimi (Change in the out of plane displacement of the end point of 45 degree bend depending on the element number)



Şekil 4. 45 derecelik yay geometrisi [4] (45 degree bend geometry)



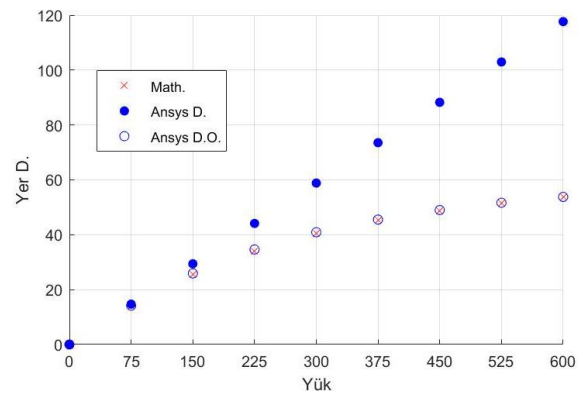
Şekil 5. 45 derecelik yayın ilk hali ve yüklenmiş halleri (Mathematica sonuçları) (Deformed and undeformed 45 degree bend)



Şekil 9. Ankastré bir tur yayın ilk ve yüklenmiş hali (Deformed and undeformed cantilever helical spring)

Çizelge 1. 45 derecelik yayın uç noktasının düzlem dışı yer değiştirme miktarı. Doğ.: Doğrusal, Doğ. O.: Doğrusal Olmayan. (Out of plane displacement of the end point of 45 degree bend)

Yük	ANSYS (Doğ.)	ANSYS (Doğ. O.)	Mathematica
300	58.837	40.923	40.533
450	88.256	48.997	48.788
600	117.670	53.785	53.710



Şekil 7. 45 derecelik yayın uç noktasının düzlem dışı yer değiştirme miktarları. Math.: Mathematica Sonuçları, Ansys D. ve D.O.: ANSYS Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Sonuçları. (Out of plane displacement of the end point of 45 degree bend)

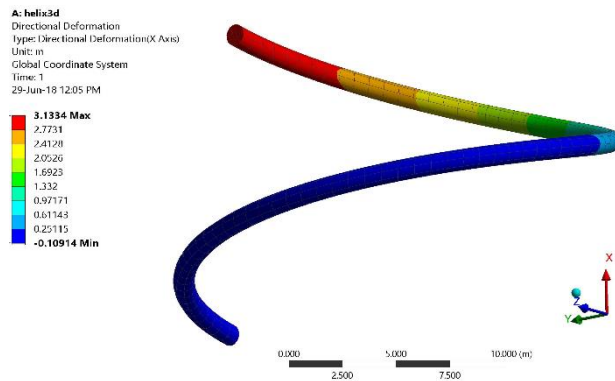
3.3. Örnek-3: Ankastr Helisel Yay

(Case-3: Cantilever Helical Spring)

Alt ucundan ankastr diğer ucundan helis eksenine doğrultusunda yukarı doğru çekilen bir yayın hem doğrusal hem de doğrusal olmayan statik davranışı 20 eleman kullanılarak modellenmiştir (Bknz. Şekil 9.). Burada Elastisite modülü 10^7 , helis çapı $R=10$ birim, yay çapı $d=1$ birim, helis eğimi 10 derece ve kuvvet 100 birim olarak alınmıştır. Yayın uç noktasının yer değiştirmeleri Çizelge 2.'de verilmiştir. Doğrusal çözümler için *Mathematica* ortamında ayrıca üç boyutlu doğrusal kiriş modellemesi yapılmıştır. Doğrusal olmayan çözümde tek yükleme adımı kullanılmıştır ve 7 iterasyon gerekmiştir. Yüklenmiş halin geometrisi ayrıca Şekil 9.'da görülebilir. Karşılaştırma yapabilmek için ANSYS programında kiriş ve üç boyutlu elemanlar kullanarak analizler yapılmıştır. Burada bir boyutlu analiz için 20 BEAM188 tipi eleman ve 41 düğüm noktası, üç boyutlu analiz için (Bknz. Şekil 10.) SOLID186 tipi 924 eleman ve 4914 düğüm noktası kullanıldı. ANSYS programında doğrusal olmayan analizler için tek yükleme adımında BEAM188 eleman modeliyle 6, SOLID186 modeli ile 10 iterasyon gerçekleştirilmiştir. Beklenildiği gibi SOLID186 ile yapılan modelleme diğerlerine göre daha esnek davrandığı için ortaya çıkan yer değiştirmeler daha fazladır.

Çizelge 2. Yayın uç noktasındaki yer değiştirmeler (Displacements at the end point of the spring)

Yer Değ.	Math. D./D.O.	BEAM188 D./D.O.	SOLID186 D./D.O.
u_x	-0.821422	-0.840	-0.943
	-0.921413	-0.881	-1.024
u_y	0.37414	0.335	0.400
	0.35634	0.419	0.370
u_z	3.12548	3.132	3.356
	2.97771	2.938	3.133



Şekil 10. Ankastr bir tur yayın yüklenmiş hali ve helis eksenine boyunca yer değiştirmeleri (ANSYS-SOLID186) (Deformed cantilever spring and the displacements along the helical axis)

4. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Büyük dönmeleri ve yer değiştirmeleri göz önüne alan Crisfield tarafından verilmiş formülasyon kullanılarak üç boyutlu kirişlerin statik davranışı incelendi. Üç boyutlu kiriş sonlu elemanları eş-dönüştü formülasyon yardımıyla *Mathematica* paket yazılımı içerisinde modellendi. Doğrusal olmayan denklemler Newton-Raphson yöntemi ile çözüldü. Kirişe ait dinamik denklemler ortaya konuldu fakat çözümlenmedi, bu konu üzerinde halen çalışılmaktadır. *Mathematica* sembolik işlemleri sayesinde formülasyonlar kolaylıkla elde edilebilmiş, hızlı bir şekilde programlama süreci tamamlanmıştır. Elde edilen sonuçların literatürdekiler ile ve ANSYS paket programı sonuçlarıyla uyum içinde olduğu gözlenmiştir. Burada Euler-Bernoulli kiriş modeli kullanılmıştır, ince kesitli ve yüksek elastisite modüllü kirişlerin örneklerde olduğu gibi oldukça iyi modellendiği görülmüştür. Kalın kesitli ve düşük elastisite modüllü kiriş uygulamaları için kayma deformasyonunu ele alan modellerin kullanılması daha uygun olacaktır. Bu çalışmanın getirdiği avantajlardan birisi de elde edilen *Mathematica* modülünün sembolik işlem kapasitesi sayesinde istenen parametre hızlıca değiştirilip problem tekrar tekrar çözdürülebilir. Bu sayede yapısal optimizasyon kodları ile birlikte çalıştırılabilir. Hazır sonlu elemanlar programları kullanarak parametrelerin bu kadar kolay değiştirilmesi mümkün olmayabilir.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

- [1] Argyris J., "An excursion into large rotations", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 32: 85–155, (1982).
- [2] Oran C. and Kassýmali A., "Large deformations of framed structures under static and dynamic loads", *Computers & Structures*, 6: 539–547, (1976).
- [3] Belytschko T., "Large displacement, transient analysis of space frames", *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, 11: 65–84, (1977).
- [4] Crisfield M.A., "A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 81: 131–150, (1990).
- [5] Hsiao K.M., Lin J., Lin W.Y., "A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of 3-D beams", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 169: 1–18, (1999).
- [6] Pai P.F., "Large deformation tests and total-Lagrangian finite-element analyses of flexible beams", *Int. J. of Solids and Structures*, 37: 2951–2980, (2000).
- [7] Le T.-N., Battini J.-M., Hijiaj M., "Dynamics of 3D beam elements in a corotational context: A comparative study of established and new formulations", *Finite Elements in Analysis and Design*, 61: 97-111, (2012).
- [8] Jonker J.B., "A geometrically nonlinear formulation of three-dimensional beam element for solving large deflection multibody system problems", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 53: 63-74, (2013).

- [9] Bathe K.-J., "Large displacement analysis of three-dimensional beam structures", *Int. J. For Num. Meth. in Engrg.*, 14: 961-986, (1979).
- [10] Simo J.C., "A finite strain beam formulation. The three dimensional dynamic problem, Part-I", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 49: 55-70, (1985).
- [11] Rhim J. and Lee S.W., "A vectorial approach to computational modelling of beams undergoing finite rotations", *Int. J. for Num. Meth. in Engrg.*, 41: 527-540, (1998).
- [12] Le T.-N., Battini J.-M., Hijiaj M., "A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 269: 538-65, (2014).
- [13] de Miranda S., Madeo A., Melchionda D., Patruno L. and Ruggerini A.W., "A corotational based geometrically nonlinear Generalized Beam Theory: buckling FE analysis", *Int. J. Solids and Structures*, 121: 212-227, (2017).
- [14] Cho H., Kim H., Shin S., "Geometrically nonlinear dynamic formulation for three-dimensional co-rotational solid elements", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 323: 301-320, (2018).

EK (APPENDIX)

Mathematica Kodunun Algoritması

(Algorithm of the Mathematica Code)

