

AKÜ FEMÜBİD 18 (2018) 011104 (75-82)

AKU J. Sci. Eng. 18 (2018) 011104 (75-82)

DOI: 10.5578/fmbd.66730

Unimodüler $f(R)$ Teoride Skaler Alanlı (1+1)-Boyutlu KaradeliklerHüseyin Aydın¹, Melis Ulu Doğru²¹ Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, Çanakkale.² Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, Çanakkale.

e-posta: melisulu@comu.edu.tr

Geliş Tarihi:20.04.2017

; Kabul Tarihi:26.03.2018

Özet

Bu çalışmada, unimodüler $f(R)$ gravitasyon teorisi çerçevesinde (1+1)-boyutlu Schwarzschild karadelikleri skaler alan varlığında araştırılmıştır. Unimodüler $f(R)$ gravitasyon teorisinin (3+1)-boyutlu uzay-zaman geometrileri için tanımlanmış olan alan denklemleri, (1+1)-boyut için elde edilmiştir. Unimodüler $f(R)$ gravitasyon teorisine ait enerji-momentum korunum denklemi, etkin enerji-momentum tensörü kullanılarak (3+1) ve (1+1)-boyutlu uzay-zamanlar için tanımlanmıştır. Tanımlanan korunum denklemi ve Klein-Gordon denklemlerinden faydalanılarak alan denklemleri çözümleri elde edilmiştir. Keyfi sabitlerin farklı seçimleri için $f(R)$ ve skaler alan fonksiyonlarının grafikleri gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar fiziksel ve geometrik açıdan tartışılmıştır.

Anahtar kelimeler

Unimodüler $f(R)$ Teori;
Schwarzschild
Karadeligi; Skaler Alan.

(1+1)-Dimensional Black Holes with Scalar Field in Unimodular $f(R)$ Theory**Abstract**

In this study, (1+1)-dimensional Schwarzschild blackholes with scalar field are investigated in the context of unimodular $f(R)$ gravity theory. Field equation of unimodular $f(R)$ gravity, defined for (3+1)-dimensional space-times, is also obtained for (1+1)-dimensional geometries. Energy-momentum conservation law for unimodular $f(R)$ gravity is defined by using effective energy-momentum tensor for (3+1) and (1+1)-dimensional space-times. By using the conservation law and Klein-Gordon equation, solutions of the field equations are obtained. Graphs of $f(R)$ function and scalar field function are shown for different choosing of arbitrary constants. Obtained solutions are discussed physically and geometrically.

Keywords

Unimodular $f(R)$
Theory; Schwarzschild
Black Hole; Scalar
Field.

© Afyon Kocatepe Üniversitesi

1. Giriş

Hubble tarafından yapılan gözlemler neticesinde evrenin genişlediğinin keşfedilmesi ve daha sonrasında Tip-Ia Süpernova gözlemleri ile bu keşfin desteklenmesi, dönemin yaygın olarak kabul gören gravitasyon teorisi olan Einstein genel görelilik teorisinin geçerliliğinin tartışılmasına neden olmuştur (Riess 1998). Evrenin erken ve geç dönem evrime süreçlerini birlikte açıklayabilecek yeni gravitasyon teorilerine ihtiyaç duyulmuştur. Einstein genel göreliliğinde, evrenin genişlemesinden sorumlu tutulan kozmolojik sabit probleminin çözülememiş olması, Brans-Dicke, $f(R)$, Horova-

Lifshitz, teleparalel, unimodüler gravitasyon teorileri gibi pek çok alternatif teorisinin öne sürülmesini devamında getirmiştir (Clifton 2006, Fiol and Garriga 2010). Bunlardan unimodüler gravitasyon teorilerinde metrik tensörün determinantı ile ilgili $\sqrt{\pm g} = \epsilon$ (ϵ bir sabittir ve $\epsilon=1$ olarak seçilebilmektedir) olacak şekilde koordinat seçimi yapılır (Anderson and Finkelstein 1971). Genel göreliliğin unimodüler teorisi klasik limit durumlarında genel görelilik teorisine eşdeğer olan ve aynı öngörülere sahip olan bir teoridir (Fiol and Garriga 2010). Ancak klasik kullanımın dışında kuantum gravitasyonel kozmolojide de çalışan

unimodüler teori, kuantum etkileri göz önüne alındığında genel görelilikten farklılaşmaktadır (Alvarez 2005).

Diğer yandan $f(R)$ gravitasyon teorisi de bir alternatif gravitasyon teorisidir. Bu teoride $f(R)$, Ricci skalerinin bir fonksiyonudur. Geometriden kaynaklanan etki fonksiyonu, Ricci skaleri yerine $f(R)$ fonksiyonuna bağlıdır ve

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} f(R) d^4x + S_m \quad (1)$$

şekindedir (Buchdahl 1970, Lobo and Oliveira 2009). Burada G evrensel çekim sabiti, S_m maddeye ait etki fonksiyonudur. $f(R)$ teoride, evrenin erken ve geç dönem evrime aşamaları birlikte açıklamak mümkündür (Nojiri *et al.* 2016a). Bu teorinin metrik $f(R)$, Palatini ve metrik-afin formalizasyonları olarak adlandırılan birden fazla anlatım sınıfı bulunur (Faraoni 2008). $f(R)$ gravitasyon teorisi ile unimodüler gravitasyon teorilerinin birlikte düşünülmesinden ortaya çıkan bir diğer yeni gravitasyon teorisi ise unimodüler $f(R)$ teoridir. Unimodüler $f(R)$ teorisi dinamik bir yapıya sahip olup, özellikle evrenin erken dönem enflasyonunu açıklamada kullanılmaktadır (Nojiri *et al.* 2016a). Unimodüler $f(R)$ teori etki fonksiyonu

$$S = \int d^4x (\sqrt{-g} (f(R) - \lambda) + \lambda) + S_m \quad (2)$$

şeklinde kullanılmaktadır (Nojiri *et al.* 2016a). Burada λ Lagrange çarpanıdır ve $\lambda=0$ durumu, $f(R)$ teoriye indirgenme limitidir (Nojiri *et al.* 2016a, 2016b). Unimodüler $f(R)$ teori Newton limiti ve madde kararsızlığının araştırılması konularında $f(R)$ gravitasyon teorisinden farklılaşmaktadır (Nojiri *et al.* 2016b). Unimodüler $f(R)$ teorisinde, evrenin evrimi ile ilgili olarak, Hubble parametresi kullanılarak yapılan çalışmalarda elde edilen $f(R)$ fonksiyonu, bu parametrenin özellikleri yardımıyla iyileştirilebilmektedir (Nojiri *et al.* 2016a). Unimodüler $f(R)$ teorisine ait alan denklemleri ilk olarak Eichhorn (2015) tarafından grup akışlarının renormalizasyonu üzerine yapılan çalışmalar sırasında önerilmiştir. Daha sonra, Nojiri vd. (2016a) tarafından klasik gravitasyon çalışmalarına uygulanmıştır. Nojiri vd. (2016a), unimodüler $f(R)$ teori için Einstein-Hilbert etki fonksiyonunu

Lagrange çarpanına bağlı olarak tanımlamış ve bu teoriye ait alan denklemlerini klasik gravitasyon çerçevesinde elde etmişlerdir. Nojiri vd. (2016a), unimodüler $f(R)$ teoride ideal akışkanlı evren modellerini araştırmış ve elde ettikleri sonuçları Planck ve BICEP2 uydularından alınan verileri karşılaştırarak uyumluluklarını tartışmışlardır. Rajabi ve Nozari (2017), unimodüler formalizmi $f(R,T)$ gravitasyon teorisine uygulayarak evrenin enflasyon evresini unimodüler $f(R,T)$ teorisinde incelemişlerdir. Belirli kozmolojik senaryolar için gözlem verileriyle uyumlu sonuçlara ulaşmışlardır (Rajabi and Nozari 2017).

Bahsedilen çalışmalardan bağımsız olarak, Brown vd. (1986), (1+1)-boyut Rindler tipi küresel koordinatlarında uzay-zaman jeodezikleri araştırarak genel görelilik kapsamında karadelik çözümü elde etmiş ve hiperbolik olay ufkuna sahip olduklarını göstermişlerdir. Daha sonra BTZ tipi karadelikler (1+1)-boyutta tanımlanmışlardır (Achucarro and Ortiz 1993). (1+1) boyutlu BTZ tipi karadelikler skaler alan varlığında kozmolojik sabitli yarı klasik genel görelilik teorisi kapsamında Ortiz (2011) tarafından incelenmiştir. Elde edilen çözümlerden, enerji ve momentum için beklenen değer belirlenmiş ve kozmolojik sabit ile Ricci skaleri ilişkilendirilmiştir. Cadoni ve Franzin (2015), Einstein genel göreliliği çerçevesinde skaler alanlı karadeliklerin tekilliklerini belirleyerek, tekillik sınırında Janis-Newmann-Winicour-Wyman karadeliklerinin davranışlarını sergilediklerini gösterdiler. Ayrıca, büyük kütleli karadeliklerin termodinamik özellikleri ile Schwarzschild karadeliklerinin termodinamik özelliklerinin uyum gösterdikleri sonucuna ulaşılar. Zhang vd. (2016), $f(R)$ teorisinde küresel simetrik dağılım gösteren skaler alan için çökme durumlarını araştırmışlardır. Konformal dönüşümden gelen ilave skaler alanın, gravitasyonel enerji ve kinetik enerjinin yanında ek bir kuvvet olarak karadeliklerin şekillenmesinde etkili olduğunu, $f(R)$ teorisi kapsamında bulmuşlardır. Ahmed ve Saifullah (2016), skaler alanın gri cisim üzerine nasıl bir faktör oluşturabileceğini Reissner-Nordström-deSitter karadeliklerinin olay ufkundan faydalanarak analiz etmişlerdir. Panotopoulos ve Rincon (2017) ise aynı

skaler alan ve gri-cisim faktörünü farklı bir karadelik türü olan BTZ tipi karadeliklerde incelemiştir.

Bu çalışmada, skaler alanlı (1+1)-boyutlu karadeliklerin unimodüler $f(R)$ teori kapsamında alan denklemleri ve çözümlerinin araştırılması amaçlanmaktadır. Literatürde, (1+1)-boyutlu karadelikler ile ilgili olarak yukarıda bahsedilen çalışmalar ve unimodüler $f(R)$ teori kapsamında hiç araştırılmamış olmaları uzay-zaman geometrisi olarak bu seçimi yapmamızın nedeni olmuştur. Bu çalışma, şu şekilde organize edilmiştir: Bölüm 2'de çalışmada kullanılacak olan materyal ve yöntemler özetlenmiştir. (3+1)-boyutta unimodüler $f(R)$ gravitasyon teorisine ait alan denklemlerinin nasıl tanımlandığı, enerji-momentum korunum kanunu, skaler alan için enerji-momentum tensörü ve Klein-Gordon denklemlerinin genel yapısı tekrar hatırlanmıştır. Bölüm 3'te öncelikle (1+1)-boyutlu uzay-zamanlar için unimodüler $f(R)$ gravitasyon teorisine ait alan denklemleri ve enerji-momentum korunum kanunu elde edilmiştir. Bu denklemler ve Klein-Gordon denklemi kullanılarak, skaler alanlı (1+1)-boyutlu Schwarzschild karadelikleri için alan denklemleri ve çözümleri verilmiştir. Son olarak, Bölüm 4'te elde edilen çözümlerin geometrik ve fiziksel yorumları tartışılmıştır.

2. Materyal ve Metot

(2) denklemi ile verilen unimodüler $f(R)$ teorisinin etki fonksiyonunun varyasyonundan, (3+1)-boyutta unimodüler $f(R)$ teorisinin alan denklemleri

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}(f(R) - \lambda) - R_{\mu\nu}U(R) + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}U(R) - g_{\mu\nu}\nabla^2U(R) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0 \quad (3)$$

olarak elde edilir (Nojiri ve ark., 2016a). Burada $g_{\mu\nu}$, metrik tensörü; $R_{\mu\nu}$, Ricci tensörünü; $T_{\mu\nu}$, enerji momentum tensörünü göstermektedir. Ayrıca λ , Lagrange çarpanı olarak adlandırılan bir sabittir. ∇_{μ} kovaryant türev ve ∇^2 ise Laplace operatörüdür. $U(R)$ fonksiyonu ise $U(R) = df(R)/dR$ şeklindeki fonksiyondur. (3) denkleminin izi

$$2(f(R) - \lambda) - R U(R) - 3\nabla^2U(R) + \frac{1}{2}T = 0 \quad (4)$$

şekindedir (Nojiri *et al.* 2016b). T , $T_{\mu\nu}$ tensörünün izini; R Ricci eğrilik skalerini göstermektedir. (3) ve (4) denklemlerinden, $(f(R) - \lambda)$ terimi yok edilerek unimodüler $f(R)$ teori alan denklemleri

$$\frac{1}{4}g_{\mu\nu}R U(R) - R_{\mu\nu}U(R) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla^2U(R) + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}U(R) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T = 0 \quad (5)$$

olarak elde edilir (Nojiri *et al.* 2016b). (5) denklemi düzenlendiğinde;

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{U(R)}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}U(R) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla^2U(R) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} - \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T) \quad (6)$$

olmaktadır. Bu denkleminin bir tarafı Einstein tensörü ($G_{\mu\nu}$)'ya eşitken, diğer taraftaki tüm terimler etkin enerji momentum tensörünü ifade eder. Dolayısıyla (6) denklemi,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}^{eff} \quad (7)$$

formunda düzenlenebilir. (7) denklemindeki

$$T_{\mu\nu}^{eff} = T_{\mu\nu}^{(c)} + \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} \quad (8)$$

şekindedir. $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)}$ maddeye ait enerji momentum tensörü, $T_{\mu\nu}^{(c)}$ eğrilik enerji momentum tensörü olmak üzere $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)}$ ve $T_{\mu\nu}^{(c)}$, (6)-(8) eşitliklerinden

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{T_{\mu\nu}^{(m)}}{2U(R)} \quad (9)$$

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = \frac{1}{U(R)}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}U(R) - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\nabla^2U(R) - \frac{1}{8}g_{\mu\nu}T) \quad (10)$$

olarak tanımlanmaktadır. Diğer yandan, modifiye gravitasyon teorilerinin enerji-momentum korunum kanunlarını tanımlamada faydalı olan Bianchi özdeşlikleri, bu gravitasyon teorisinde de Einstein tensörüne kovaryant türev uygulanmasıyla

$$\nabla^{\mu}G_{\mu\nu} = \nabla^{\mu}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0 \quad (11)$$

olarak elde edilir (Carroll 2004). (7) ve (11) denklemlerinden,

$$\nabla^{\mu}T_{\mu\nu}^{eff} = 0 \quad (12)$$

koşulunun sağlanması gerektiği açıkça görülmektedir. Böylece, unimodüler $f(R)$ teori için enerji-momentumun korunumu yasası aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilebilir.

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{eff} = \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(c)} + \nabla^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = 0 \quad (13)$$

$$\nabla^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{1}{2U(R)^2} T_{\mu\nu}^{(m)} \nabla^\mu U(R) \quad (14)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(c)} = \nabla^\mu \left\{ \frac{1}{U(R)} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu U(R) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) - \frac{1}{8} g_{\mu\nu} T \right) \right\} \quad (15)$$

$$\nabla^\mu \left\{ \frac{1}{U(R)} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu U(R) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) - \frac{1}{8} g_{\mu\nu} T \right) \right\} - \frac{1}{2U(R)^2} T_{\mu\nu}^{(m)} \nabla^\mu U(R) = 0 \quad (16)$$

Enerji-momentum tensörü, uzay-zamanın geometrisini de etkileyen madde/enerji kaynağını ifade eder. Bu madde formlarından biri de skaler alandır. Skaler alanın enerji-momentum tensörü aşağıdaki gibidir.

$$T_{ik} = \Phi_{,i} \Phi_{,k} - \frac{1}{2} g_{ik} \Phi^2 \quad (17)$$

Burada (,) kısmi türevidir. Φ ise skaler alan potansiyelini ifade eden bir fonksiyondur. $\Phi^2 = g^{mn} \Phi_{,m} \Phi_{,n} = \Phi^{,n} \Phi_{,n}$ ifadesine karşılık gelir. Bilindiği gibi skaler alanlar Klein-Gordon dalga denklemini sağlamaktadırlar. Klein-Gordon denklemi,

$$\square \Phi = 0 \quad (18)$$

şekindedir (Detweiler 1980). Burada, $\square = \nabla^i \nabla_i$ ile gösterilen d'Alembert operatörüdür.

3. Bulgular

Gravitasyon teorilerinde, çiftlenim sabitleri gibi birçok sabit ve denklem formları, problemi incelediğimiz monifoldun boyut sayısına göre değişiklik gösterebilir. Bu bölümde öncelikle, araştırmayı amaçladığımız (1+1)-boyutlu karadelik geometrilerine uygun olarak, unimodüler $f(R)$ teoriye ait alan denklemleri ve korunum kanunları (1+1)-boyut için türetilecektir. (1+1)-boyutta (3) denkleminin izi

$$(f(R) - \lambda) - R U(R) - \nabla^2 U(R) + \frac{1}{2} T = 0 \quad (19)$$

olur. (3) ve (19) denklemlerinde $(f(R) - \lambda)$ yok edilerek, (1+1)-boyutlu uzay-zaman için elde edilen alan denklemi ise,

$$\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R U(R) - R_{\mu\nu} U(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) + \nabla_\mu \nabla_\nu U(R) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T = 0 \quad (20)$$

şekindedir. (20) denkleme göre, genel göreliliğin Einstein tensörü, unimodüler $f(R)$ teoride

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{U(R)} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu U(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T \right) \quad (21)$$

olmaktadır. (9), (10) ve (21) denklemlerinden, unimodüler $f(R)$ teoride (1+1)-boyutlu uzay-zamandaki $\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)}$ ve $T_{\mu\nu}^{(c)}$ tensörleri

$$\tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{T_{\mu\nu}^{(m)}}{2U(R)} \quad (22)$$

$$T_{\mu\nu}^{(c)} = \frac{(\nabla_\mu \nabla_\nu U(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T)}{U(R)} \quad (23)$$

olacaktır. (13), (22) ve (23) denklemlerinin birlikte kullanılmasından (1+1)-boyutlu uzay-zamanlar için, unimodüler $f(R)$ teorisinin korunum denklemleri

$$\nabla^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}^{(m)} = -\frac{1}{2U(R)^2} T_{\mu\nu}^{(m)} \nabla^\mu U(R) \quad (24)$$

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(c)} = \nabla^\mu \left\{ \frac{1}{U(R)} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu U(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T \right) \right\} \quad (25)$$

$$\nabla^\mu \left\{ \frac{1}{U(R)} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu U(R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^2 U(R) - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} T \right) \right\} - \frac{1}{2U(R)^2} T_{\mu\nu}^{(m)} \nabla^\mu U(R) = 0 \quad (26)$$

olarak elde edilir. Bilindiği gibi, (1+1)-boyutlu Schwarzschild karadelikleri ve ait metrik potansiyeller

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \quad (27)$$

şeklindeki yay elemanı kullanılarak tanımlanır. Denklem (27) ile verilen yay elemanı unimodüler $f(R)$ teorisinin $\sqrt{\pm g} = 1$ koşulunu sağlamaktadır. (27)

denklemi ile tanımlanan yay elemanına ait eğrilik skaleri,

$$R = \frac{4M}{r^3} \quad (28)$$

olarak elde edilir. (17) ve (27) denklemlerinin birlikte kullanılmasından enerji-momentum tensörü bileşenleri

$$T_{rr} = \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2, \quad T_{tt} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \dot{\Phi}^2 \quad (29)$$

olarak elde edilir. (29) denkleminde, $\dot{\Phi}$ terimi skaler alanın radyal koordinatına göre kısmi türevini göstermektedir. (27) ve (29) denklemlerinden iz,

$$T_{\mu}^{\mu} = T = 0 \quad (30)$$

olmaktadır. (20), (27), (29) ve (30) denklemlerinden, skaler alanlı, (1+1)-boyutlu Schwarzschild karadeliklerine ait alan denklemleri

$$\ddot{U} + \frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 = 0 \quad (31)$$

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 (\dot{\Phi}^2 + 2\ddot{U}) = 0 \quad (32)$$

olarak elde edilir. Burada sembol üzerindeki nokta (.) radyal koordinata göre kısmi türevi göstermektedir. (3.6), (3.7) ve (3.8) denklemlerinden skaler alanlı (1+1)-boyutlu Schwarzschild karadelikleri için enerji-momentum korunum denklemi ise

$$\frac{-1}{4U^2} \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (\dot{\Phi}^2 \dot{U} - 2\ddot{U}U + 2\dot{U}\dot{U}) - \frac{8M}{r^2} \ddot{U}U \right\} = 0 \quad (33)$$

olarak elde edilir. Diğer yandan (18) denkleminde verilen Klein-Gordon eşitliği ise, söz konusu uzay-zaman ve skaler alan için,

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ddot{\Phi} + \frac{2M}{r^2} \dot{\Phi} = 0 \quad (34)$$

olur. (31)-(34) denklemlerinin ortak çözümü olan skaler alan ve $U(r)$ fonksiyonları

$$\Phi(r) = -c_4 \left(r + 2M \ln(2M - r)\right) + c_3 \quad (35)$$

$$U(r) = -\frac{1}{2} \iint \dot{\Phi}^2 dr dr + c_1 r + c_2 \quad (36)$$

şekindedir. Burada; c_1, c_2, c_3 ve c_4 integrallerden gelen keyfi sabitlerdir. (36) denkleminde verilen $U(r)$ fonksiyonu (35) denkleminde verilen skaler alan fonksiyonunun doğrudan kullanılmasıyla daha açık olarak

$$U(r) = -\frac{1}{4} c_4^2 r^2 + 2c_4^2 M \left\{ (3M - r) \ln(2M - r) - (2M - r) \right\} + c_1 r + c_2 \quad (37)$$

şeklinde bulunur. (28) denkleminde görüldüğü gibi, eğrilik skalerinden radyal koordinatı yalnız bırakabiliriz:

$$r(R) = \frac{2^{2/3} M^{1/3}}{R^{1/3}} \quad (38)$$

Böylece, (37) ve (38) denklemlerinden eğrilik skaler değerine bağlı $U(R)$ fonksiyonu

$$U(R) = -\frac{1}{4} c_4^2 \left(\frac{4M}{R}\right)^{2/3} + 2c_4^2 M^2 \left\{ 3 \ln \left(2M - \left(\frac{4M}{R}\right)^{1/3} \right) - 2 \right\} - 2c_4^2 M \left(\frac{4M}{R}\right)^{1/3} \left\{ \ln \left(2M - \left(\frac{4M}{R}\right)^{1/3} \right) - 1 \right\} + c_1 \left(\frac{4M}{R}\right)^{1/3} + c_2 \quad (39)$$

olur. Bölüm 2'de belirtildiği gibi $U(R) = df(R)/dR$ bağıntısı hatırlanırsa, unimodüler $f(R)$ teorisinin $f(R)$ fonksiyonu verilen model için aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$f(R) = \int U(R) dR = \left(-\frac{3}{2} c_4^2 2^{1/3} M^{2/3}\right) R^{1/3} + \left\{ \frac{3}{2} c_4^2 2^{2/3} M^{4/3} + \frac{3}{2} c_1 2^{2/3} M^{1/3} - 3c_4^2 2^{2/3} M^{4/3} \ln \left(2M - \left(\frac{4M}{R}\right)^{1/3} \right) \right\} R^{2/3} + \left[2c_4^2 M^2 \left\{ 3 \ln \left(2M - \left(\frac{4M}{R}\right)^{1/3} \right) - 2 \right\} + c_2 \right] R + c_5 \quad (40)$$

Unimodüler Lagrange çarpanı λ , (19) denkleminde düzenlenerek aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\lambda = f(R) - R U(R) - \nabla^2 U(R) + \frac{1}{2} T \quad (41)$$

(28), (30), (37), (39) ve (40) denklemleri ile bulunan sonuçlardan yararlanarak λ ,

$$\lambda = \frac{1}{2} c_4^2 + c_5 \quad (42)$$

şeklinde bulunur.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, unimodüler $f(R)$ teori kapsamında alan denklemleri ve çözümleri kullanılarak (1+1)-boyutlu karadelikler araştırılmıştır. Bu teoriye göre, (1+1)-boyutta Schwarzschild tipi karadelik geometrisine neden olacak skaler alan dağılımı belirlenmiştir. Söz konusu skaler alan dağılımını destekleyen $f(R)$ fonksiyonu da elde edilmiştir. Bölüm 3’de elde edilen çözümlerin farklı keyfi sabit seçimlerinde ve sınır koşullarındaki davranışları aşağıda özetlenmiştir.

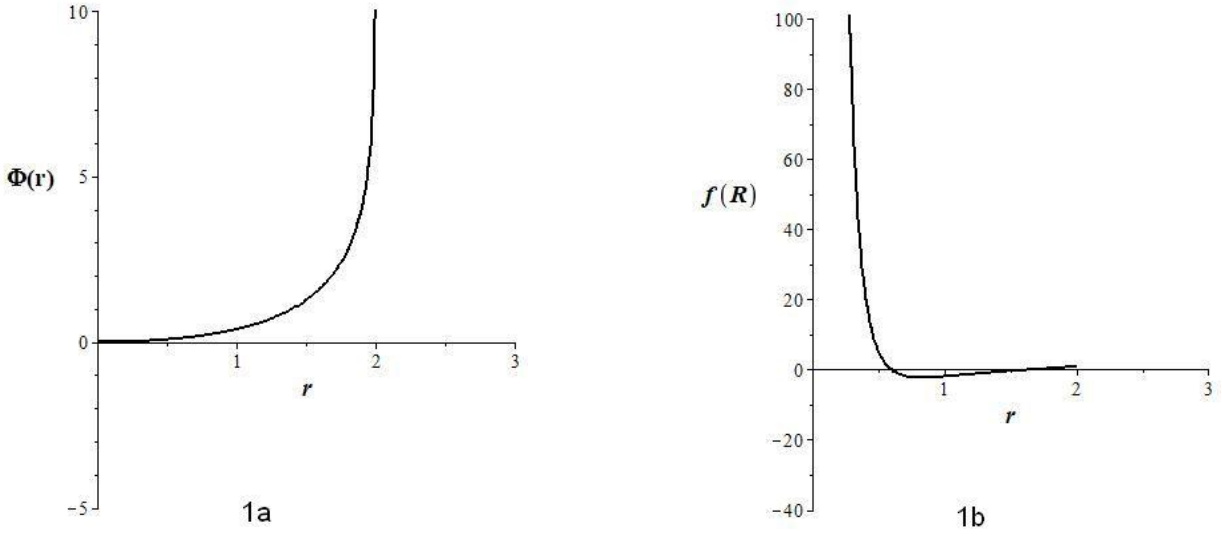
Bilindiği gibi, (27) denklemi ile verilen Schwarzschild tipi karadelikler $r_0 = 0$ ve $r_h = 2M$ değerlerinde tekilliğe sahiptir. Bu tekil noktalardan ilki karadelikğin orijinini işaret ederken, diğeri karadelikğin olay ufkunu belirleyen radyal değeri göstermektedir. (35) ve (40) denklemleri ile verilen skaler alan ve $f(R)$ fonksiyonlarının da $r_0 = 0$ ve $r_h = 2M$ noktalarında tekilliğe sahip olduğu açıkça görülmektedir. Bu durum elde edilen modelin fiziksel ve geometrik açıdan tutarlılığını desteklemektedir. Bu fonksiyonların radyal koordinat ile değişimleri Şekil 1a ve Şekil 1b’de verilmiştir. Logaritmik fonksiyonların tanım aralığı gereğince, fiziksel anlamlı sonuçlar için, (35) denkleminde $-r + 2M > 0$ ve dolayısıyla $r < 2M$ olmak zorundadır. Bu durum elde edilen çözümün olay ufkunun iç kısmı için geçerli olduğunu göstermektedir. Bu durumda, (1+1)-boyutlu Schwarzschild tipi karadelikler, unimodüler $f(R)$ teoriye göre, (40) ve (42) denklemlerinde elde edilmiş olan $f(R)$ fonksiyonu ve unimodüler Lagrange çarpanı varlığında, (35) denklemi ile elde edilmiş olan skaler alan dağılımına izin verirler.

Diğer yandan, Şekil 2’den görüldüğü üzere, (35) denklemi ile verilen skaler alan fonksiyonu, farklı sabit seçimleri için artan veya azalan fonksiyon özelliği göstermektedir. Şekil 2’den skaler alanın sıfır olduğu bir bölge olduğu da açıkça görülmektedir.

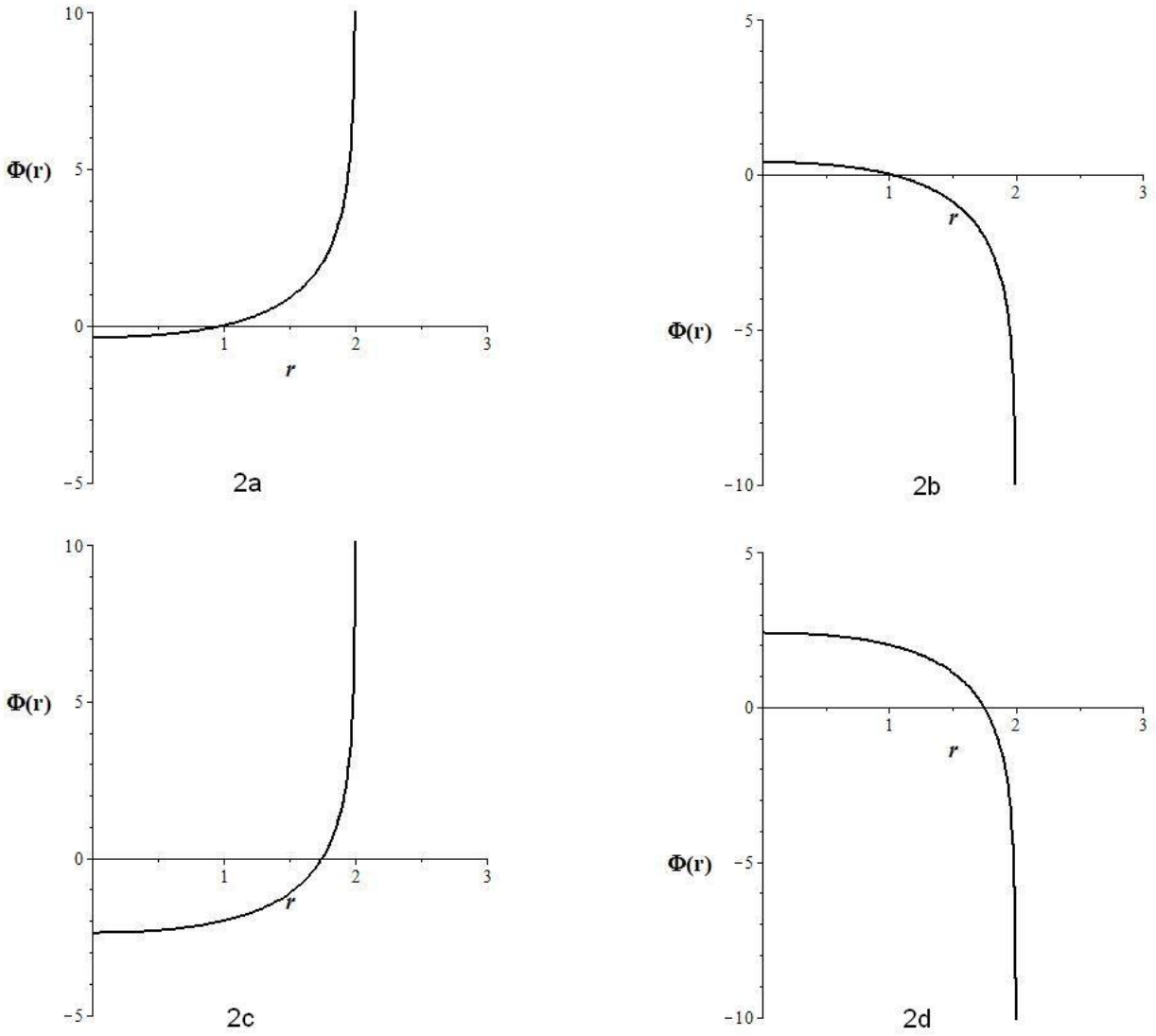
$\Phi(r \rightarrow r_c) = 0$ durumunu sağlayan r_c yarıçap değerleri, (35) denkleminde faydalanıldığında

$$r_c = 2M - e^{-\left\{LambertW\left(-\frac{1}{2M}e^{-\left(1-\frac{c_3}{2Mc_4}\right)}\right) + \left(1-\frac{c_3}{2Mc_4}\right)\right\}} \quad (43)$$

şekindedir. Burada LambertW(z) fonksiyonu, z karmaşık sayı olmak üzere $z = LambertW(z)e^{LambertW(z)}$ eşitliğinin çözümünü sağlayan kompleks fonksiyonları göstermektedir. Şekil 2’den de görüldüğü gibi, r_c yarıçap değerinden iç ve dış kısımlarda madde formu negatif değerli skaler alan veya pozitif değerli skaler alan olacak şekilde farklılaşır. Skaler alanın değerini doğrudan değiştirdiğinden r_c değerine kritik yarıçap değeri diyebiliriz. Skaler alan fonksiyonu, Şekil 2a ve Şekil 2c’de görüldüğü gibi artan fonksiyon özelliği gösterirken, bu durumun aksine, farklı keyfi sabit seçimlerinde, Şekil 2b ve Şekil 2d’de görüldüğü gibi azalan değerlere de sahip olabilmektedir. Bu farklı davranış ile ilgili olarak, “skaler alan fonksiyonu c_4 keyfi sabitinin negatif veya pozitif seçimlerinden etkilenmektedir” genelleştirmesini vermek de mümkündür. $c_4 < 0$ durumunda azalan fonksiyon olan skaler alan (Bakınız Şekil 2b ve Şekil 2d), $c_4 > 0$ durumunda artan fonksiyon özelliği göstermektedir (Bakınız Şekil 2a ve Şekil 2c). Bu analizlere ek olarak $c_4 = 0$ durumunda Schwarzschild tipi karadeliklere ait kaynak fonksiyonu sabit bir skaler alan olmaktadır. Sabit skaler alanlar, gravitasyon teorilerinde kozmolojik sabitli vakum durumlarını açıklamada kullanılmaktadır. (40) denkleminde elde edilen $f(R)$ fonksiyonu, sabit skaler alan $c_4 = 0$ ve $c_1 = 0$ durumunda $f(R) = c_2R + c_5$ formuna indirgenmektedir. $f(R)$ gravitasyon teorisine göre kozmolojik sabitli vakum durumu çözümleri için kabul edilebilir $f(R)$ fonksiyonu ancak $f(R) = R - 2\Lambda$ formunda olabilir (Starobinsky 2007). $c_2 = 1$ ve $c_5 = -2\Lambda$ seçildiğinde elde edilen çözümlerin bu sınır koşulunu sağlaması, çözümlerin fiziksel ve geometrik açıdan anlamlı ve unimodüler $f(R)$ teorisinin de tutarlı bir alternatif gravitasyon teorisi olduğunu desteklemektedir.



Şekil 1. $\Phi(r)$ ve $f(R)$ fonksiyonlarının radyal koordinatla değişimleri: a) $c_3=2\ln(2)$, $c_4=1$, $M=1$, b) $c_1=1$, $c_2=1$, $c_4=1$, $c_5=1$, $M=1$.



Şekil 2. $\Phi(r)$ Skaler alan fonksiyonunun farklı keyfi sabit seçimlerinde radyal koordinatla değişimleri: a) $c_3=1$, $c_4=1$, $M=1$, b) $c_3=-1$, $c_4=-1$, $M=1$, c) $c_3=-1$, $c_4=1$, $M=1$, d) $c_3=1$, $c_4=-1$, $M=1$.

Teşekkür

Bu çalışma Hüseyin AYDIN'ın "Bazı Madde Formlarının Unimodüler $f(R)$ Gravitasyon Teorisinde İncelenmesi" başlıklı lisansüstü tezi ile ilişkilidir.

5. Kaynaklar

- Achucarro, A. and Ortiz, M.E., 1993. Relating black holes in two and three dimensions. *Physical Review D*, **48(8)**, 3600-3605.
- Ahmed, J. and Saifullah, K., 2016. Greybody factor of scalar field from Reissner-Nordstrom-de Sitter black hole. *arXiv preprint arXiv:1610.06104 [gr-qc]*,1-13.
- Alvarez, E., 2005. Can one tell Einstein's unimodular theory from Einstein's general relativity? *Journal of High Energy Physics*, **2005(03)**, 002, 1-14.
- Anderson, J.L. and Finkelstein, D., 1971. Cosmological constant and fundamental length. *American Journal of Physics*, **39(8)**, 901-904.
- Brown, J.D., Henneaux, M. and Teitelboim, C., 1986. Black holes in two spacetime dimensions. *Physical Review D*, **33(2)**, 319-323.
- Buchdahl, H. A., 1970. Non-linear lagrangians and cosmological theory. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **150**, 1-8.
- Cadoni, M. and Franzin, E., 2015. Asymptotically flat black holes sourced by a massless scalar field. *Physical Review D*, **91(10)**, 104011, 1-10.
- Carroll, S., 2004. Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Addison-Wesley, San Francisco, USA, 155-156.
- Clifton, T., 2006. Alternative theories of gravity. PhD Dissertation, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, UK, 205.
- Detweiler, S., 1980. Klein-Gordon equation and rotating black holes. *Physical Review D*, **22(10)**, 2323-2326.
- Eichhorn, A., 2015. The renormalization group flow of unimodular $f(R)$ gravity. *Journal of High Energy Physics*, **2015(04)**, 096, 1-27.
- Faraoni, V., 2008. $f(R)$ gravity: successes and challenges. *arXiv preprint arXiv:0810.2602 [gr-qc]*,1-18.
- Fiol, B. and Garriga, J., 2010. Semiclassical unimodular gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2010(08)**, 015, 1-13.
- Lobo, F.S.N. and Oliveira, M.A., 2009. Wormhole geometries in $f(R)$ modified theories of gravity. *Physical Review D*, **80(10)**, 104012, 1-9.
- Nojiri, S., Odintsov, S.D. and Oikonomou, V. K., 2016a. Unimodular $F(R)$ gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **2016(05)**, 046, 1-24.
- Nojiri, S., Odintsov, S.D. and Oikonomou, V.K., 2016b. Bounce universe history from unimodular $F(R)$ gravity. *Physical Review D*, **93(8)**, 084050, 1-14.
- Ortiz, L., 2012. The energy-momentum tensor in the 1+1 dimensional non-rotating BTZ black hole. *General Relativity and Gravitation*, **44(11)**, 2857-2863.
- Panotopoulos, G. and Rincon, A., 2017. Greybody factors for a nonminimally coupled scalar field in BTZ black hole background. *Physics Letters B*, **772**, 523-528.
- Rajabi, F. and Nozari, K., 2017. Unimodular $f(R,T)$ gravity. *Physical Review D*, **96(8)**, 084061, 1-15.
- Riess, A. G., 1998. An accelerating universe and other cosmological implications from SNe IA. *Bulletin of the American Astronomical Society*, **30**, 843-844.
- Starobinsky, A.A., 2007. Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity. *JETP Letters*, **86(3)**, 157-163.
- Zhang, C., Tang, Z. and Wang, B., 2016. Gravitational collapse of massless scalar field in $f(R)$ gravity. *Physical Review D*, **94(10)**, 104013, 1-11.