



## Dynnikov Koordinatları ve $\pi_1$ -Train Track Grafikleri

\*<sup>1</sup>Saadet Öykü Yurttaş, <sup>2</sup> Umut Güngörür

<sup>1</sup> Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 21280, Diyarbakır, Türkiye, saadet.yurttas@dicle.edu.tr, 

<sup>2</sup> Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 21280, Diyarbakır, Türkiye, umut\_gungorur2106@hotmail.com.tr, 

Araştırma Makalesi

Geliş Tarihi: 09.11.2018

Kabul Tarihi: 07.02.2019

### Öz

Verilen bir yüzeyde tanımlı çoklu eğrileri koordinatlandırmanın alışılmış bir yolu train track grafiklerini kullanmaktır. Yüzeyin sonlu noktası çıkarılmış  $D_n$  diski olması durumunda ise çoklu eğrilerin kümesi ile  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  arasında birebir ve örten bir dönüşüm veren Dynnikov koordinat sistemi çoklu eğrileri koordinatlandırmak için alternatif ve etkili bir yol sunar. Bu çalışmada,  $D_n$ 'de verilen bir çoklu eğrinin belirli tipten bir train track grafiği olan  $\pi_1$ -train track grafiği koordinatlarını Dynnikov koordinatlarına bağlayan geçiş formülleri sunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Çoklu eğriler, Dynnikov koordinatları,  $\pi_1$ -train track koordinatları, geometrik kesişim sayısı

## Dynnikov Coordinates and $\pi_1$ -Train Tracks

\*<sup>1</sup>S.Öykü Yurttaş, <sup>2</sup> Umut Güngörür

<sup>1</sup> Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 21280, Diyarbakır, Türkiye, saadet.yurttas@dicle.edu.tr

<sup>2</sup> Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 21280, Diyarbakır, Türkiye, umut\_gungorur2106@hotmail.com.tr

### Abstract

A well known way to coordinatize multicurves on a given surface is to use train tracks. In the case where the surface is the  $n$ -punctured disk  $D_n$  an alternative and efficient way to coordinatize multicurves is achieved by the Dynnikov coordinate system which gives an explicit bijection between the set of multicurves on  $D_n$  and  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$ . In this paper we introduce transition formulae between Dynnikov coordinates and the so-called  $\pi_1$ -train track coordinates of a given multicurve on  $D_n$ .

**Keywords:** Multicurves, Dynnikov coordinates,  $\pi_1$ -train track coordinates, geometric intersection number

### 1. GİRİŞ

Verilen bir yüzeyde tanımlı çoklu eğriler-birbirinden ayrı basit kapalı esas eğrilerin homotopi sınıflarının oluşturduğu sistemler (bkz. 2. Bölüm)-düşük boyutlu topoloji ve hesaplamalı topolojide merkezi bir rol oynamaktadır. Böyle sistemler genellikle Dehn-Thurston koordinatları veya train track koordinatları tarafından tanımlanmaktadır [14, 2, 11, 12]. Yüzeyin  $n$ -noktası çıkarılmış  $D_n$  diski ( $n$  adet işaretlenmiş noktalı disk) olması durumunda çoklu eğrileri tanımlamanın alternatif ve oldukça kullanışlı bir yolu çoklu eğrilerin kümesi ile  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  ( $n \geq 3$ ) arasında birebir ve örten bir fonksiyon

tanımlayan Dynnikov koordinat sistemini kullanmaktır [5, 6, 13, 3, 4, 10, 17, 18, 19, 20]. Dinamik sistemlerde oldukça geniş bir uygulama alanı olan Dynnikov koordinat sistemi,  $n$ -Örgü Grubunda [1] kelime probleminin çözümü [3], pseudo-Anosov tipinden örgülerin topolojik entropi ve diğer dinamiksel özelliklerinin hesaplanması [13, 8, 10, 18, 9] problemlerinde kullanılmıştır. Ayrıca, bir çoklu eğrinin bağlantılı olup olmadığını polinomsal zamanda hesaplayan bir algoritmanın varlığı açık problemi [7] uzun bir aradan sonra  $D_n$  durumu için Dynnikov koordinatları verilen bir çoklu eğrinin tam olarak kaç parçadan oluştuğunu kuadratik zamanda hesaplayan bir algoritma tanıtılarak çözülmüştür [19]. Bunun sonucunda  $D_n$  de verilen iki keyfi çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısı yine Dynnikov koordinatları cinsinden kuadratik zamanda çalışan bir

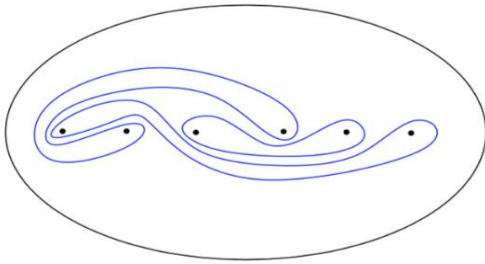
\*<sup>1</sup>Sorumlu yazar: Dicle Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 21280, Diyarbakır, saadet.yurttas@dicle.edu.tr

algoritma ile hesaplanmıştır [20]. Yüzey homeomorfizmalarının dinamiği [7, 16, 10, 18] ve eğriler ile ilgili kombinatorik problemleri [15, 19, 20] çalışmak için en sık kullanılan koordinat sistemlerinden biri de train track grafikleridir [14, 2, 11, 12]. Bir  $\tau$  train track grafiği *düğme* adı verilen köşeler ve *dal* adı verilen kenarlardan oluşan, her bir düğmede bir tek teğet vektörü bulunan ve belli geometrik özellikleri sağlayan bir CW-komplekstir.  $\tau$  üzerinde bir *çapraz ölçüm*,  $\tau$ ' nun her bir dalına negatif olmayan ve *düğme koşulları* olarak adlandırılan belli lineer denklemleri sağlayan sayılar tayin eden bir fonksiyondur. Bir çapraz ölçüm ile donatılmış train track grafiğine *ölçülü train track grafiği* denir. Böyle grafikler çoklu eğrileri koordinatlandırmanın başka bir yolunu sunar. Daha açık olarak,  $\mathcal{W}(\tau)$ ,  $\tau$  ile ilişkili çapraz ölçümler uzayını belirtmek üzere, bir  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi,  $\mathcal{W}(\tau)$  uzayındaki bir çapraz ölçüm tarafından ortaya çıkıyorsa  $\mathcal{L}$ ,  $\tau$  tarafından taşınıyor denir ve ilgili ölçüler  $\mathcal{L}'$  nin *train track koordinatları* olarak adlandırılır.

Bu makalenin amacı  $n$ -noktası çıkarılmış  $D_n$  diski üzerinde tanımlı çoklu eğrilerin Dynnikov koordinatları ile belirli tipten bir train track grafiği olan  $\pi_1$ -train track grafiği koordinatları arasında geçiş formülleri sunmaktır. İkinci bölüm sonuçlarımız için gerekli altyapı materyalini içermektedir. Daha açık olarak, ikinci bölümde  $D_n$ ' de tanımlı çoklu eğrilerin kümesi ile  $\mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  kümesi arasında birebir ve örten bir fonksiyon tanımlayan Dynnikov koordinat sistemi ve çoklu eğrilerin  $\pi_1$ -train track koordinatları detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Üçüncü bölümde, makalenin odak noktası olan koordinat sistemleri arasındaki geçiş formülleri açıklayıcı resimler ve örneklerle sunulmuştur. Literatürde bu iki koordinat sistemi daha önce karşılaştırılmamıştır. Bu karşılaştırmanın train track grafikleriyle çözülmesi zor görünen bir çok dinamiksel ve kombinatorik probleme ışık tutması beklenmektedir.

## 2. MALZEME VE YÖNTEM

$D_n$  ( $n \geq 3$ ), düzlemde  $n$ -noktası çıkarılmış ( $n$  adet *işaretlenmiş* noktalı) bir disk olsun.  $D_n$ ' de disk, 1 adet *işaretlenmiş* noktalı olan disk veya halka sınırlamayan basit kapalı eğriye *esas eğri* denir.  $D_n$ ' de birbiriyle kesilmeyen sonlu sayıda esas eğrinin homotopi sınıflarının bir birleşimi *çoklu eğri* olarak adlandırılır (Şekil 1).

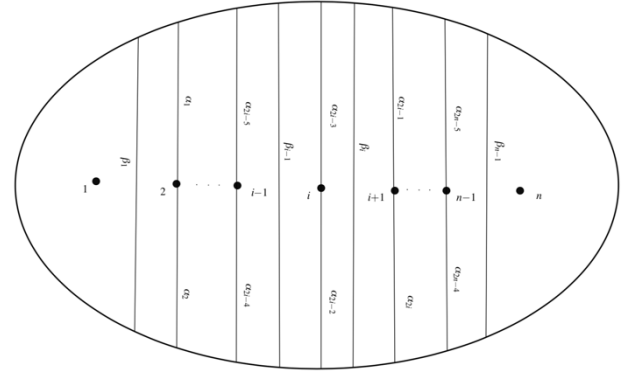


Şekil 1.  $D_n$  da bir çoklu eğri

### 2.1. Dynnikov Koordinat Sistemi

$D_n$ ' de tanımlı çoklu eğrilerin kümesi  $\mathcal{L}_n$  ile gösterilsin.  $D_n$ ' nin Şekil 2 de gösterildiği gibi standart bir modelini alalım (*işaretlenmiş* noktalar diskin yatay eksenindedir).  $\mathcal{A}_n, D_n$ ' de uç noktaları diskin dış sınırı  $\partial D_n$  ve diskin *işaretlenmiş* noktaları üzerinde bulunan yayların kümesi olsun. Şekil 2 de gösterilen  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 2n-4$ ) ve  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) yaylarını düşünelim.  $\alpha_{2i-3}$  ve  $\alpha_{2i-2}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) yayları  $i$ -inci *işaretlenmiş* noktayı diskin sınırına birleştirirken,  $\beta_i$  yayının her iki uç noktası  $\partial D_n$ 'de yer alıp,  $i$ -inci ve  $i+1$ -inci *işaretlenmiş* noktalar arasından geçmektedir.

Bu yaylar,  $2n-4$  tanesi üçgensel olmak üzere diski  $2n-2$  (kapalı) bölgeye ayırır. Diskin dış sınırı tek bir nokta ile eşleştirildiğinde  $i$ -inci *işaretlenmiş* noktanın ( $1 \leq i \leq n$ ) solunda ve sağında yer alan her bir bölge 3 yay tarafından sınırlanıldığından üçgenseldir.  $i$ -inci *işaretlenmiş* noktanın solundaki  $\Delta_{2i-3}$  bölgesi,  $\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}$  ve  $\beta_{i-1}$  yaylarıyla ve sağındaki  $\Delta_{2i-2}$  bölgesi,  $\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}$  ve  $\beta_i$  yaylarıyla sınırlıdır. Diskin en solundaki ve en sağındaki  $\Delta_0$  ve  $\Delta_{2n-3}$  bölgeleri sırasıyla,  $\beta_1$  ve  $\beta_{n-1}$  ile sınırlıdır.  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  yaylarını minimum sayıda kesen *minimal* bir temsilcisi her zaman bulunabilir.  $\mathcal{L}$  nin *minimal* temsilcisi  $L$  ile gösterilsin.  $\alpha_i$  ve  $\beta_i, L$ ' nin sırasıyla  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  yayları ile olan kesişim sayısına karşılık gelsin.  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  sembollerinin, ne zaman yaylara, ne zaman yaylar üzerindeki kesişim sayılarına karşılık geldikleri makale boyunca açıkça belirtilecektir.



Şekil 2.  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  yayları

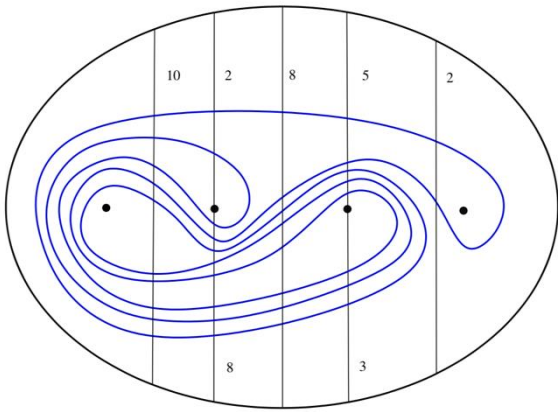
$\delta: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  üçgen koordinat fonksiyonu,

$$\delta(\mathcal{L}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{2n-4}; \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \quad (1)$$

olarak tanımlanır. Örneğin, Şekil 3 ' de gösterilen  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisinin üçgen koordinatları

$$\delta(\mathcal{L}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = (2,8,5,3; 10,8,2) \quad (2)$$

olarak verilir.



Şekil 3.  $\delta(\mathcal{L}) = (2,8,5,3; 10,8,2)$

Verilen bir eğrinin üçgen koordinatları her üçgensel bölgede üçgen eşitsizliği ve çoklu eğrilerin bazı özelliklerini sağlamalıdır (örneğin,  $\mathcal{L}$  basit kapalı eğrilerden oluştuğundan her bir  $\beta_i$  yayımı dolayısıyla her bir  $\alpha_{2i-1} \cup \alpha_{2i}$  birleşimini çift sayıda kesmelidir). Bu nedenle  $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  kümesinden alınan her vektör bir çoklu eğriye karşılık gelmeyebileceğinden  $\delta: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{3n-5}$  fonksiyonu örten değildir. Bununla birlikte üçgen koordinatların belirli bir lineer bileşimi olan ve  $1 \leq i \leq n - 2$  olmak üzere

$$a_i = \frac{\alpha_{2i} - \alpha_{2i-1}}{2} \quad \text{ve} \quad b_i = \frac{\beta_i - \beta_{i+1}}{2} \quad (3)$$

$$\rho(\mathcal{L}) = (a, b) = (a_1, \dots, a_{n-2}; b_1, \dots, b_{n-2}) \quad (4)$$

olarak tanımlanan  $\rho: \mathcal{L}_n \rightarrow \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  Dynnikov koordinat fonksiyonu birebir ve örtendir [10, 17, 18, 19, 20].

Şekil 3’ de verilen  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisinin Dynnikov koordinatları  $\rho(\mathcal{L}) = (a, b) = (3, -1; 1, 3)$ ’ dir. Yardımcı Teorem 2.1 Dynnikov koordinat fonksiyonunun tersini vermektedir [17]. Makalenin tamamında  $x_k^+ = \max(x_k, 0)$  ve  $\lceil x \rceil$ ,  $x$ ’ den küçük olmayan en küçük tamsayıyı göstermektedir.

**Yardımcı Teorem 2.1.**  $(a, b) \in \mathbb{Z}^{2n-4} \setminus \{0\}$  vektörü üçgen koordinatları aşağıda verilen bir ve yalnız bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisine karşılık gelir.

$$\beta_i = 2 \max_{1 \leq k \leq n-2} [ |a_k| + b_k^+ + \sum_{j=1}^{k-1} b_j ] - 2 \sum_{j=1}^{i-1} b_j \quad (5)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{\lceil i/2 \rceil}}{2} : & b_{\lceil i/2 \rceil} \geq 0 \\ (-1)^i a_{\lceil i/2 \rceil} + \frac{\beta_{1+\lceil i/2 \rceil}}{2} : & b_{\lceil i/2 \rceil} \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

**2.2. Train Track Koordinatları**

Bu bölümde train track grafikleri [2, 11, 12] tanıtılacak, çoklu eğrilerin bu grafiklerle nasıl koordinatlandırıldığı gösterilecektir.

**Tanım 2.2.**  $D_n$  üzerinde  $\tau$  train track grafiği, düğme adı verilen köşelerden ve dal adı verilen kenarlardan oluşan ve her bir düğmesinde bir ve yalnız bir  $T_v(\tau)$  teğet vektörü bulunan  $D_n$ ’ e gömülü 1–boyutlu bir CW komplekstir. Ayrıca,  $D_n - \tau$ ’ nun her bir bileşeni ya bir işaretlenmiş noktalı bir p-gen ( $p \geq 1$ ) ya da işaretlenmiş nokta içermeyen bir k-gen ( $k \geq 3$ ) olmalıdır (Şekil 4).



Şekil 4. Bir işaretlenmiş noktalı 1-gen ve işaretlenmiş nokta içermeyen bazı çokgenler

Her bir  $v$  düğmesinde  $T_v(\tau)$  teğet vektörü için bir yön belirleyerek gelendallar ve gidendallar şöyle tanımlanabilir:  $v$  düğmesine bitişik bir  $e$  dalının yönü  $T_v(\tau)$  teğet vektörünün yönüyle aynı ise  $e$  ye *gelendal*, aksi takdirde *gidendal* denir.

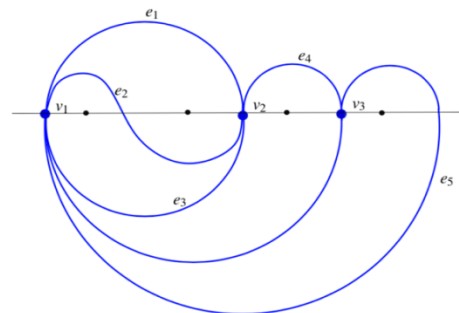
Bu makalede özel bir train track grafiği olan  $\pi_1$ -train track grafiği [11, 12] kullanılacaktır (Şekil 5). Diğer train track grafik örnekleri için örneğin [2] ye bakılabilir.

**Tanım 2.3. ( $\pi_1$ -Train Track Grafiği)**

$D_n$ ’ de  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ),  $i$ -inci işaretlenmiş nokta ile  $i + 1$ -inci işaretlenmiş nokta arasındaki aralığı gösterebilir.  $\tau$ ,  $\pi_1$ -train track grafiği aşağıdaki koşulları sağlar:  $x_{ij}$ , Şekil 5’te gösterildiği gibi  $\tau$ ’ nun uç noktaları  $x_i$  ve  $x_j$  aralığında olan yaylarını göstermek üzere

- $\tau$ ’ nun tüm düğmeleri  $x$ -eksenindedir ve her bir  $x_i$  aralığında  $\tau$ ’ nun en fazla bir düğmesi vardır ( $x_i$  aralığında biri diskin üst yarısından diğeri altından gelen toplamda iki adet yay varsa burada düğme yoktur).

- $v_i$  ve  $v_j$  sırasıyla  $x_i$  ve  $x_j$  aralıklarındaki düğmeler olmak üzere  $\tau$  nun  $v_i$  ve  $v_j$ ’ yi birleştiren bir ve yalnız bir dalı vardır.

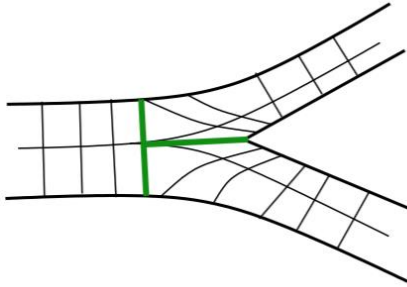


Şekil 5.  $D_4$  te 3 düğmeli, 4 kenarlı, bir  $\pi_1$ -train track grafiği

**Tanım 2.4.**  $\tau$  üzerinde tanımlı  $\mu$  çapraz ölçümü en az bir e dalı için  $\mu(e) \neq 0$  olacak şekilde  $\tau$ ’ nun her bir dalına  $\mu(e) \in \mathbb{R}^+$  sayısı tayin eden ve düğme koşullarını sağlayan bir fonksiyondur. Yani, her bir  $v$  düğmesi için

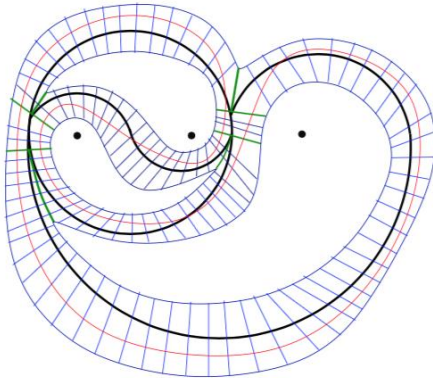
$$\sum_v \text{deki gelendallar } \mu(e) = \sum_v \text{deki gidendallar } \mu(e) \quad (7)$$

dir.  $\mu$  çapraz ölçümü ile donatılmış bir train track grafiğine ölçülü train track grafiği denir.  $\tau$  üzerinde tanımlı çapraz ölçümlerin uzayı  $\mathcal{W}_{\mathbb{Z}}(\tau)$  ile gösterilir.



**Şekil 6.**  $\tau$ ' nun bir lifli komşuluğu. Burada yeşil renkli lif singüler liftir

**Tanım 2.5.**  $\tau$ ' nun  $N$  komşuluğunun Şekil 6' da olduğu gibi  $r: N \rightarrow \tau$  retraksiyonunun lifleri ile donatıldığı lifli komşuluğunu düşünelim. Burada,  $\tau$ ' nun her bir düğmesi için  $r^{-1}(v)$  Şekil 6' da gösterildiği gibi bir singüler liftir. Verilen bir  $L \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin homotopi sınıfında  $N$  deki her bir life çapraz olan bir temsilcisi varsa  $L$ ,  $\tau$  tarafından taşınıyor denir ve  $L < \tau$  olarak yazılır.  $\tau$  tarafından taşınan çoklu eğrilerin uzayını  $\mathcal{L}(\tau)$  ile göstereceğiz.



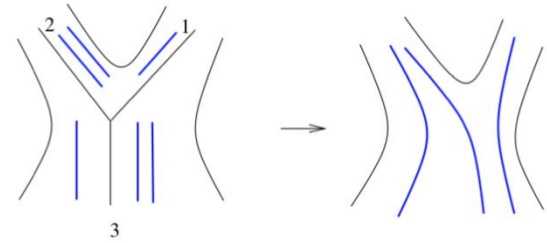
**Şekil 7.** Kırmızı eğri  $\tau$  tarafından taşınmaktadır

**Uyarı 2.6.** Yukarıdaki tanımlar ölçülü train track grafiklerinin  $\mathcal{L}_n$  çoklu eğriler uzayı için bir koordinat sistemi verdiğini söyler: Bir çoklu eğrinin  $\tau$  tarafından taşınabilmesi için gerek ve yeter koşul  $\tau$  üzerinde tanımlı bir çapraz ölçüden elde edilmesidir (yani  $\tau$ ' nun her bir düğmesi için düğme koşullarını sağlamasıdır).

Sezgisel olarak,  $\mathcal{L}$ ' deki her bir eğri tren raylarından geçen bir tren gibi düşünülebildiğinden train track tarafından taşınmayan bir eğri raylardan çıkan bir trene benzetilebilir. Ayrıca, aşağıda detaylı bir şekilde açıklandığı üzere verilen bir  $L \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $\tau$  train track koordinatları  $\tau$ ' nun her bir dalına paralel eğri parçası sayılarından oluşacağından  $\tau$  nun her bir  $e$  dalı için  $\mu(e) \in \mathbb{Z}^+$  dir.

### 2.3. Çoklu Eğrilerin Train Track Koordinatlarından Oluşturulması

$\tau$ ,  $D_n$ ' de  $e_1, e_2, \dots, e_k$  dalları ile verilen bir train track grafiği olsun.  $\tau$  üzerinde  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k)) \in \mathbb{Z}_+^k$  çapraz ölçümü verilsin.  $\tau$ ' nun  $N_\tau$  lifli komşuluğunda her bir  $i$  için  $e_i$  dalına paralel  $\mu(e_i)$  ayrıık yay çizelim.  $\mu$  çapraz ölçüm olduğundan Tanım 2.4 gereği her bir  $v$  düğmesinde gelendalların sayısı giden dalların sayısına eşit olduğundan Şekil 8 de gösterildiği gibi gelendallar gidendallar ile ayrıık bir şekilde tek türlü birleştirilerek basit kapalı bir eğri sistemi elde edilir.  $D_n - \tau$ , 0 – gen, 1 – gen, 2 – gen, bir noktası işaretlenmiş 0 – gen veya halka içermediğinden  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k))$  bir çoklu eğri verir (Şekil 9). Buradan,  $\psi_\tau: \mathcal{W}_{\mathbb{Z}}(\tau) \rightarrow \mathcal{L}(\tau)$  fonksiyonuna ulaşılır. Tersine,  $\mathcal{L}$ ' nin  $\tau$  tarafından taşındığını varsayalım. O zaman,  $\mathcal{L}$  tarafından  $\tau$  nun  $e_1, \dots, e_k$  dallarına atanan  $\mu(e_1), \dots, \mu(e_k)$  tamsayıları  $\mathcal{L}$  nin  $L \subseteq N_\tau$  temsilcisinin  $e_i$  dalı üzerinden (yön gözetmeksizin) geçme sayısı olarak verilir ve bunlar düğme koşullarını sağlar.

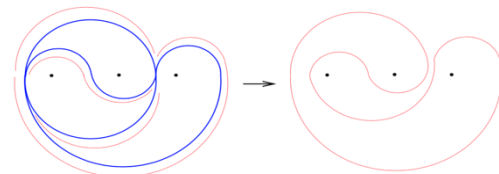


**Şekil 8.** Her bir düğmede eğri parçaları tek türlü birleştirilir

Buradan,  $\psi_\tau^{-1}: \mathcal{L}(\tau) \rightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{Z}}(\tau)$  ters fonksiyonu elde edilir. Sonuç olarak,  $\psi_\tau: \mathcal{W}_{\mathbb{Z}}(\tau) \rightarrow \mathcal{L}(\tau)$  birebir ve örten bir dönüşümdür.

**Uyarı 2.7.**  $\tau$ ,  $D_n$ ' de  $e_1, e_2, \dots, e_k$  dalları ile verilen bir train track grafiği ve  $L < \tau$  olsun.  $L$ ' nin  $\tau$  nun dallarına tayin ettiği  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k)) \in \mathbb{Z}_+^k$  çapraz ölçümüne  $L$ ' nin ( $\tau$  ya göre) train track koordinatları denir. Kolaylık açısından,  $(\mu(e_1), \dots, \mu(e_k))$  koordinatlarını  $e_1, e_2, \dots, e_k$  ile göstereceğiz.

$e_1, e_2, \dots, e_k$  sembollerinin, ne zaman dallara, ne zaman koordinatlara karşılık geldikleri açıkça belirtilecektir.



**Şekil 9.** Verilen bir eğrinin train track koordinatlarından oluşturulması

### 3. BULGULAR

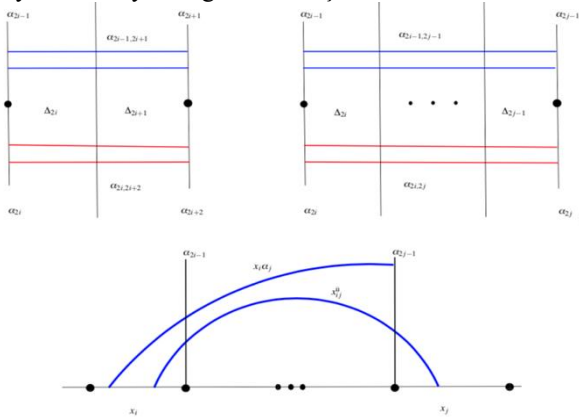
Bu bölümde öncelikle Dynnikov koordinatları verilen bir çoklu eğrinin  $\pi_1$ -train track koordinatları hesaplanacaktır. Daha sonra literatürde oldukça iyi bilinen Yardımcı Teorem 3.12 [3,4,6,10,13] kullanılarak  $\pi_1$ -train track

koordinatları verilen bir çoklu eğrinin Dynnikov koordinatları hesaplanacaktır.

### 3.1. $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$ Bölgesinde Yol Bileşenleri

**Tanımlar 3.1.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  'nin minimal bir temsilcisi olsun ( $0 \leq i < j \leq n-1$ ).  $\alpha_{2i-1,2i+1}$  yol bileşeni (sırasıyla  $\alpha_{2i,2i+2}$  yol bileşeni),  $L$  'nin uç noktaları  $\alpha_{2i-1}$  ve  $\alpha_{2i+1}$  (sırasıyla  $\alpha_{2i}$  ve  $\alpha_{2i+2}$ ) yayları üzerinde olan  $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$  bölgesindeki bağlantılı bileşendir (Şekil 10). Benzer şekilde,  $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$  bölgesinde  $L$  'nin aşağıdaki bağlantılı bileşenlerini tanımlayabiliriz (Şekil 10):

- $\alpha_{ij}$  yol bileşeni; uç noktaları  $\alpha_i$  ve  $\alpha_j$  üzerinde olan ve hiç bir  $x_k$  ( $1 + \lceil i/2 \rceil \leq k \leq \lceil j/2 \rceil$ ) aralığını kesmeyen,
- $x_i \alpha_j$  yol bileşeni; uç noktaları  $x_i$  aralığı ve  $\alpha_j$  yayı üzerinde olan ve hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq \lceil j/2 \rceil$ ) aralığını kesmeyen,
- $x_{i,j}^u$  yol bileşeni; uç noktaları  $x_i$  ve  $x_j$  aralıklarında olan, hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq j$ ) aralığını ve  $\alpha_{2k}(i \leq k \leq j-1)$  yayını kesmeyen,
- $x_{i,j}^a$  yol bileşeni; uç noktaları  $x_i$  ve  $x_j$  aralıklarında olan, hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq j$ ) aralığını ve  $\alpha_{2k-1}(i \leq k \leq j-1)$  yayını kesmeyen bağlantılı bileşenlerdir.



**Şekil 10.**  $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$  ve  $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$  bölgelerindeki yol bileşenleri

**Uyarı 3.2.** Verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisi için Tanım 3.1'de tanımlanan  $x_{ij}$  sayılarının  $\mathcal{L}$  'nin taşıdığı  $\pi_1$ -train track grafikleri hakkında bilgi verdiğine dikkat ediniz. Örneğin,  $x_{0,3}^u \neq 0$  özelliğindeki bir  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi Şekil 9' da verilen  $\pi_1$ -train track grafiği tarafından taşınmaz. Üstelik, verilen bir  $\tau$   $\pi_1$ -train track grafiği için  $\mathcal{L} < \tau$  ise  $x_{ij}$  sayıları Tanım 2.3' de verilen  $\pi_1$ -train track koordinatlarına ulaşmamızı sağlar.

Ayrıca, train track koordinatlarından  $x_{ij}$  yol bileşenlerine ulaşabiliriz: Verilen bir  $e$  dalı diskin üst veya alt yarısında kapsıyor ise bir tek  $x_{ij}$  yol bileşenine karşılık gelirken  $e$  dalı diskin hem üst hem de alt yarısını kesiyorsa birden fazla  $x_{ij}$  yol bileşeninin bir birleşimidir (örneğin, Şekil 16' da gösterilen  $\pi_1$ -train track grafiği için  $e_3$  dalı  $x_{1,2}^u$  ve  $x_{2,3}^a$

yol bileşenlerinin birleşimidir). Bu durumda, birleşimdeki  $x_{ij}$  yol bileşenlerinin sayısı birbirine eşittir ve  $e$  dalına karşılık gelen train track koordinatıdır.

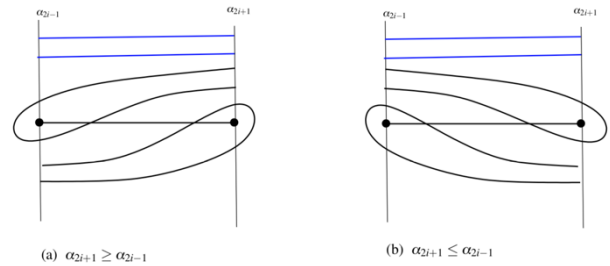
**Yardımcı Teorem 3.3.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  'nin minimal bir temsilcisi olsun.  $L$  'nin  $\Delta_{2i} \cup \Delta_{2i+1}$  bölgesindeki yol bileşenleri

$$\alpha_{i,i+2} = \min(\alpha_i - b_{\lceil i/2 \rceil}^+, \alpha_{i+2} - (-b)_{1+\lceil i/2 \rceil}^+) \quad (8)$$

olarak verilir.

**Uyarı 3.4.**  $i = j$  durumu için formüllerin özel durumuna dikkat ediniz. Yani,  $\alpha_{i,i} = \alpha_i$  dir.

**İspat.** Genelliği kaybetmeden ispatı  $\alpha_{2i-1,2i+1}$  için yapacağız.  $x_i$ ,  $L$  'nin  $i+1$ -inci işaretlenmiş nokta ile  $i+2$ -inci işaretlenmiş nokta arasındaki aralığı kesme sayısını göstereceğiz.



**Şekil 11.**  $\alpha_{2i-1,2i+1}$  yol bileşenlerinin hesaplanması

•  $\alpha_{2i+1} \geq \alpha_{2i-1}$  olsun. Şekil 11(a)' da gösterildiği gibi

$$\begin{aligned} \alpha_{2i+1} &= \alpha_{2i-1} - b_i^+ + x_i - b_i^+ \\ &= \alpha_{2i-1} + x_i - 2b_i^+ \end{aligned} \quad (9)$$

dır. Ayrıca

$$\alpha_{2i+1} = \alpha_{2i-1,2i+1} + x_i - b_i^+ \quad (10)$$

dır. Buradan,

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \alpha_{2i-1} - b_i^+ \quad (11)$$

bulunur.

•  $\alpha_{2i+1} \leq \alpha_{2i-1}$  iken Şekil 11(b) ' den yararlanarak

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \alpha_{2i+1} - (-b)_{i+1}^+ \quad (12)$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\alpha_{2i-1,2i+1} = \begin{cases} \alpha_{2i-1} - b_i^+; & \alpha_{2i+1} \geq \alpha_{2i-1} \\ \alpha_{2i+1} - (-b)_{i+1}^+; & \alpha_{2i+1} \leq \alpha_{2i-1} \end{cases} \quad (13)$$

bulunur. Benzer şekilde  $\alpha_{2i,2i+2}$  yol bileşeni

$$\alpha_{2i,2i+2} = \begin{cases} \alpha_{2i} - b_i^+ & \alpha_{2i+2} \geq \alpha_{2i} \\ \alpha_{2i+2} - (-b)_{i+1}^+ & \alpha_{2i+2} \leq \alpha_{2i} \end{cases} \quad (14)$$

olarak hesaplanır.  $\alpha_{2i+2} \geq \alpha_{2i}$  eşitsizliği

$$\alpha_{2i+2} - (-b)_{i+1}^+ \geq \alpha_{2i} - b_i^+ \quad (15)$$

eşitsizliğine ve  $\alpha_{2i+2} \leq \alpha_{2i}$  eşitsizliği

$$\alpha_{2i+2} - (-b)_{i+1}^+ \leq \alpha_{2i} - b_i^+ \quad (16)$$

eşitsizliğine denk olduğundan (Şekil 11)

$$\alpha_{i,i+2} = \min(\alpha_i - b_{\lceil i/2 \rceil}^+, \alpha_{i+2} - (-b)_{1+\lceil i/2 \rceil}^+) \quad (17)$$

elde edilir.

**Yardımcı Teorem 3.5.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ ' nin minimal bir temsilcisi olsun.  $L$ ' nin  $\Delta = \Delta_{2i} \cup \dots \cup \Delta_{2j-1}$  bölgesindeki yol bileşenleri

$$\alpha_{2i-1,2j-1} = \min_{i \leq k \leq j-1} (\alpha_{2k-1,2k+1}) \quad (18)$$

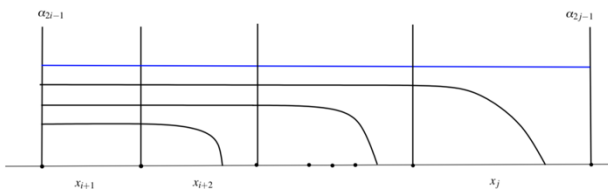
$$\alpha_{2i,2j} = \min_{i \leq k \leq j-1} (\alpha_{2k,2k+2}) \quad (19)$$

dır.

**İspat.** Genelliği kaybetmeden ispatı  $\alpha_{2i-1,2j-1}$  için yapacağız.  $\alpha_{2i,2j}$  benzer şekilde hesaplanır. Şekil 12' de görüldüğü gibi  $\alpha_{2i-1,2j-1}$  yol bileşeni her bir  $\alpha_{2k-1}$  ( $i \leq k \leq j$ ) yayını kesen ancak hiç bir  $x_k$  ( $i < k \leq j$ ) aralığını kesmeyen bir yol bileşeni olduğundan böyle bileşenlerin sayısı  $\Delta_{2k-1} \cup \Delta_{2k}$  ( $i \leq k \leq j-1$ ) bölgelerindeki  $\alpha_{2k-1,2k+1}$  bileşenlerinin minimumuna eşittir. Yani,

$$\alpha_{2i-1,2j-1} = \min_{i \leq k \leq j-1} (\alpha_{2k-1,2k+1}) \quad (20)$$

dır.



Şekil 12.  $\alpha_{2i-1,2j-1}$  yol bileşenlerinin hesaplanması

**Yardımcı Teorem 3.6**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ ' nin minimal bir temsilcisi olsun. O zaman,

$$x_i \alpha_{2j-1} = |\alpha_{2i-1,2j-1} - \alpha_{2i-3,2j-1}| \quad (21)$$

$$x_i \alpha_{2j} = |\alpha_{2i,2j} - \alpha_{2i-2,2j}| \quad (22)$$

dır.

**Uyarı 3.7** İlk ve son aralıklar için formüllerin özel durumlarına dikkat ediniz:

Yani,  $i = 0$  için  $x_0 \alpha_{2j-1} = \alpha_{-1,2j-1}$ ,  $x_0 \alpha_{2j} = \alpha_{-1,2j}$  ve

$i = n$  için  $x_n \alpha_{2j-1} = \alpha_{2n-3,2j-1}$ ,  $x_n \alpha_{2j} = \alpha_{2n-2,2j}$ .

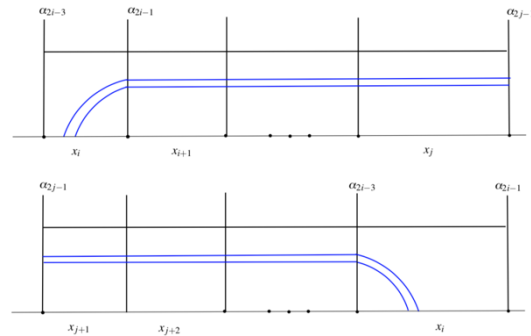
**İspat** Tanımlar 3.1 gereği ve Şekil 13' den  $i \leq j$  iken

$$\alpha_{2i-1,2j-1} = x_i \alpha_{2j-1} + \alpha_{2i-3,2j-1} \quad (23)$$

ve  $i > j$  iken

$$\alpha_{2j-1,2i-3} = x_i \alpha_{2j-1} + \alpha_{2j-1,2i-1} \quad (24)$$

olduğundan  $x_i \alpha_{2j-1} = |\alpha_{2i-1,2j-1} - \alpha_{2i-3,2j-1}|$  elde edilir.  $x_i \alpha_{2j}$  benzer şekilde hesaplanır.



Şekil 13.  $x_i \alpha_{2j-1}$  yol bileşenlerinin hesaplanması

Teorem 3.8,  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $\pi_1$ -train track koordinatlarını vermektedir.

**Teorem 3.8.**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ ' nin minimal bir temsilcisi ve  $i < j$  olsun. O zaman,  $x_{i,j}^u$  ve  $x_{i,j}^a$  aşağıdaki şekilde verilir.

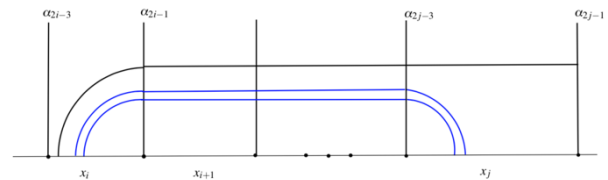
$$x_{i,j}^u = x_i \alpha_{2j-3} - x_i \alpha_{2j-1} \quad (25)$$

$$x_{i,j}^a = x_i \alpha_{2j-2} - x_i \alpha_{2j} \quad (26)$$

**İspat.** Tanımlar 3.1 gereği ve Şekil 14' ten

$$x_i \alpha_{2j-3} = x_{i,j}^u + x_i \alpha_{2j-1}$$

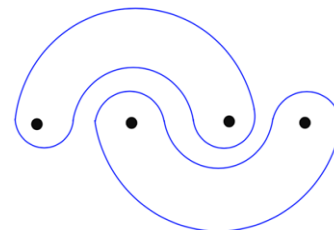
dolayısıyla  $x_{i,j}^u$  elde edilir.  $x_{i,j}^a$  benzer şekilde hesaplanır.



Şekil 14.  $x_{ij}$  yol bileşenlerinin hesaplanması

**Uyarı 3.9** Yardımcı Teorem 3.6'da  $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$  ve Teorem 3.8' de  $x_{i,j} = x_{j,i}$  olduğuna dikkat ediniz.

**Örnek 3.10**  $D_4$ 'te  $\rho(\mathcal{L}) = (-1,1; -1,1)$  Dynnikov koordinatları ile verilen bir çoklu eğrinin  $\pi_1$ -train track koordinatlarını bulalım. Yardımcı Teorem 2.1' den  $\mathcal{L}$ ' nin üçgen koordinatları  $\delta(\mathcal{L}) = (3,1,1,3; 2,4,2)$  olarak bulunur.



Şekil 15. Dynnikov koordinatları  $\rho(\mathcal{L}) = (-1,1; -1,1)$  olan  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisi

$\mathcal{L}$ 'nin  $x_{i,j}^{\ddot{u}}$   $x_{i,j}^a$  ( $0 \leq i, j \leq 4$ )  $\pi_1$ -train track koordinatlarını bulmak için Teorem 3.8' de belirtilen

$$x_{i,j}^{\ddot{u}} = x_i \alpha_{2j-3} - x_i \alpha_{2j-1} \quad (27)$$

$$x_{i,j}^a = x_i \alpha_{2j-2} - x_i \alpha_{2j} \quad (28)$$

formülleri kullanılır. Burada sadece  $x_{1,2}^{\ddot{u}}$  koordinatını hesaplayacağız. Diğer koordinatlar benzer şekilde bulunur.

$$x_{1,2}^{\ddot{u}} = x_1 \alpha_1 - x_1 \alpha_3 \quad (29)$$

olduğundan  $x_1 \alpha_1$  ve  $x_1 \alpha_3$  sayılarını hesaplamalıyız. Yardımcı Teorem 3.6' dan,

$$x_1 \alpha_1 = \alpha_1 \alpha_1 - \alpha_{-1} \alpha_1 \quad (30)$$

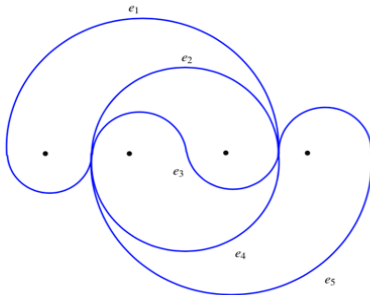
$$x_1 \alpha_3 = \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_{-1} \alpha_3 \quad (31)$$

dır. Yardımcı Teorem 3.3 ve Yardımcı Teorem 3.5 gereği

$\alpha_{1,1} = \alpha_1 = 3$  ve  
 $\alpha_{-1,1} = \min(\alpha_{-1} - b_0^+, \alpha_1 - (-b)_1^+) = \min(1,3) = 1$   
 $\alpha_{1,3} = \min(\alpha_1 - b_1^+, \alpha_3 - (-b)_2^+) = \min(3,1) = 1$   
 $\alpha_{-1,3} = \min(\alpha_{-1,1}, \alpha_{1,3}) = \min(1,1) = 1$   
 bulunur. Dolayısıyla,  $x_1 \alpha_1 = 2$  ve  $x_1 \alpha_3 = 0$  olarak hesaplanır. Buradan,

$$x_{1,2}^{\ddot{u}} = x_1 \alpha_1 - x_1 \alpha_3 = 2 \quad (32)$$

elde edilir. Benzer şekilde,  
 $x_{0,3}^{\ddot{u}} = x_{3,4}^{\ddot{u}} = 1$ ,  $x_{0,1}^a = x_{1,4}^a = 1$ ,  $x_{2,3}^a = 2$  ve geri kalan tüm  $x_{i,j}$  değerleri sıfır olarak bulunur. Buna göre,  $\mathcal{L}$  çoklu eğrisinin taşındığı  $\pi_1$ -train track grafiklerinden birisi Şekil 16' da gösterilmiştir ve  $\mathcal{L}$ ' nin bu train track grafiğine göre koordinatları  $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (1,0,2,0,1)$  dir.

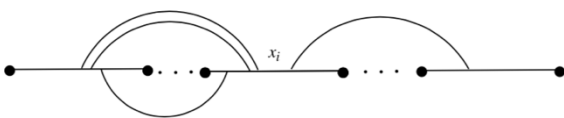


Şekil 16.  $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) = (1,0,2,0,1)$

**Uyarı 3.11**  $x_{i,j}$  yol bileşenleri verilen bir  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $x_i$  aralığını kesme sayısını

$$x_i = \sum_{m \neq i} x_{i,m}^{\ddot{u}} + x_{i,m}^a \quad (33)$$

olduğunu gözlemleyiniz.



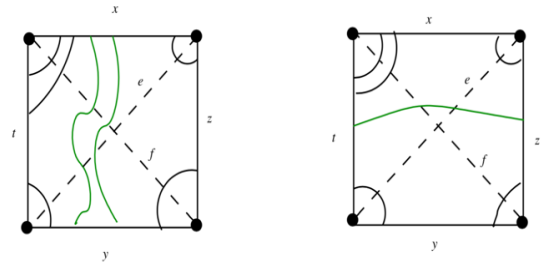
Şekil 17.  $x_i$  aralığını kesen yol bileşenleri

$\pi_1$ -train track koordinatları verilen bir çoklu eğrinin üçgen dolayısıyla Dynnikov koordinatlarını hesaplamamızı sağlayan Yardımcı Teorem 3.12 için açıklayıcı bir ispat verilecektir.

**Yardımcı Teorem 3.12**  $L, \mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ ' nin minimal bir temsilcisi olsun.  $K, D_n$ 'de tüm köşeleri işaretlenmiş noktalar üzerinde olan ve iç kısmında hiçbir işaretlenmiş nokta bulunmayan bir dörtgen olsun.  $x, y, z, t, e$  ve  $f$  sembolleri  $L$ ' nin  $K$  dörtgeninin Şekil 3.12' de gösterilen kenarları ve köşegenleri ile olan kesişim sayılarını gösterebilir. Bu durumda

$$e + f = \max(x + y, z + t) \quad (34)$$

dir.



Şekil 18. K karesinde L nin yol bileşenleri

**İspat**  $\Omega, K$  dörtgeni tarafından sınırlanan bölgeyi belirtsin.  $xy$  ve  $zt$ ,  $\Omega$ 'da  $L$ 'nin uç noktaları sırasıyla  $x$  ve  $y$  ile  $z$  ve  $t$  kenarları üzerinde bulunan eğri parçaları olsun.  $L \cap \Omega$ 'nin bileşenleri ayrıık olduğundan ( $L$  basit kapalı eğrilerden oluştuğundan)  $xy$  ve  $zt$  sayılarından en az biri sıfır olmalıdır.  $xy = 0$  olduğunu varsayalım. O zaman,  $z + t \geq x + y$  ve

$$\begin{aligned} x &= xz + xt \\ y &= yz + yt \\ z &= xz + yz + zt \\ t &= xt + yt + zt \\ e &= xz + yt + zt \\ f &= xt + yz + zt \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} e + f &= xz + yz + xt + yt + 2zt \\ &= z + t \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,  $zt = 0$  ise  $x + y \geq z + t$  ve  $e + f = x + y$  bulunur. Bu durumda,

$$e + f = \max(x + y, z + t)$$

dir.

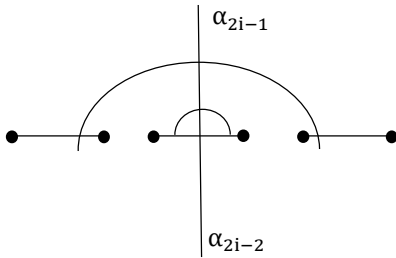
**Yardımcı Teorem 3.13**  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$  çoklu eğrisinin  $x_{i,j}$  yol bileşenleri verilsin.  $\mathcal{L} \in \mathcal{L}_n$ 'nin üçgen koordinatları  $\delta(\mathcal{L}) = (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{3n-5} \setminus \{0\}$

$$\alpha_{2i-1} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq i \\ i+1 \leq m \leq n}} x_{k,m}^{\ddot{u}} \quad \text{ve} \quad \alpha_{2i} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq i \\ i+1 \leq m \leq n}} x_{k,m}^a \quad (36)$$

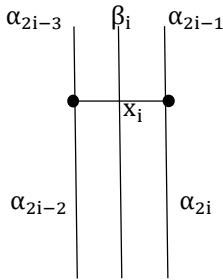
$\beta_i = \max(\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-3} + \alpha_{2i}) - x_i$  olarak verilir.

**İspat**  $\alpha_{2i-1}$  ve  $\alpha_{2i}$  üzerindeki kesişimlerin, uç noktaları  $i + 1$ -inci işaretlenmiş noktanın solunda ve sağındaki aralıklar üzerinde bulunan  $x_{k,m}$  bileşenlerinden geldiği Şekil 19' dan açıktır.  $\beta_i$  üzerindeki kesişim sayısını hesaplamak için Yardımcı Teorem 3.12' den yararlanacağız.  $D_n$ ' in sınırı  $\partial D_n$  tek bir 0 noktası ile eşleştirildiğinde  $i$  ve  $i + 1$ -inci işaretlenmiş noktalar ile 0 noktasının köşeler,  $\alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-1}, \alpha_{2i-3}$  ve  $\alpha_{2i}$  yaylarının kenarlar,  $\beta_i$  yayı ile  $x_i$  aralığının köşegenler olduğu "dejenere" bir dörtgen elde edilir (Şekil 20). O zaman Yardımcı Teorem 3.12' den

$$\beta_i = \max(\alpha_{2i-1} + \alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-3} + \alpha_{2i}) - x_i$$
 bulunur.



Şekil 19.  $\alpha_{2i-1}$  ve  $\alpha_{2i}$  yayları üzerindeki kesişimler



Şekil 20.  $\beta_i$  ve  $x_i$  nin köşegenler olduğu dörtgen

#### 4. DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

Yukarıdaki formüllerden Yardımcı Teorem 2.1 yardımıyla Dynnikov koordinatlarının elde edilebileceğine dikkat ediniz. Makalede verilen  $\pi_1$ -train track grafiği koordinatlarını Dynnikov koordinatlarına bağlayan geçiş formüllerinin, cinsi 1 den büyük bir yüzeyde tanımlı iki çoklu eğrinin geometrik kesişim sayısını polinomsal zamanda hesaplayan bir algoritma bulma açık problemine ışık tutması beklenmektedir.

Hesaplamalı topolojide çoklu eğriler ile ilgili önemli bir yere sahip olan bu problem için literatürde belli algoritmalar verilmiş olsa da [20] global koordinatları (çoklu eğrileri tek türlü belirleyen koordinatlar) kullanan bir algoritma cinsi 1 den büyük yüzeyler için henüz bulunamamıştır.

#### TEŞEKKÜR

Çalışma hakkındaki detaylı değerlendirmeleri ve yapıcı yorumları için hakemlere teşekkür ederiz.

#### KAYNAKÇA

- [1] Artin. E, "Theory of braids", Ann. of Math., vol 48, no 2, pp. 101–126, 1947.
- [2] Bestvina. M and Handel. M, "Train-tracks for surface homeomorphisms", Topology, vol 34, no 1, pp. 109–140, 1995.
- [3] Dehornoy. P, "Efficient solutions to the braid isotopy problem", Discrete Appl. Math., vol 156, no 16, pp. 3091–3112, 2008.
- [4] Dehornoy. P, Dynnikov, I, Rolfsen, D and Wiest, "Ordering braids", Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [5] Dynnikov. I, "On a Yang-Baxter mapping and the Dehornoy ordering" Uspekhi Mat. Nauk, vol 57, no 3, pp. 151–152, 2002.
- [6] Dynnikov. I. and Wiest. B, "On the complexity of braids", J. Eur. Math. Soc. (JEMS), vol 9, no 4, pp. 801–840, 2007.
- [7] Fathi. A, Laudenbach. F and Poenaru. V, "Travaux de Thurston sur les surfaces", Astérisque. Société Mathématique de France, Paris, Séminaire Orsay, 1979.
- [8] Finn. M.D and Thiffeault. J.L. "Topological entropy of braids on the torus", SIAM J. Appl. Dyn. Syst., vol 6, no 1, pp. 79–98. 2007.
- [9] Gover. P, Ross, S.D. Stremler and M.A. Kumar. P, "Topological chaos, braiding and bifurcation of almost cyclic sets", Chaos, vol 22 no 4, pp. 15-16, 2012.
- [10] Hall. T and Yurttaş. S.Ö, "On the topological entropy of families of braids", Topology Appl., vol 156, no 8, pp. 1554–1564, 2009.
- [11] Hamidi Tehrani. Hessam and Chen. Zong-He, "Surface diffeomorphisms via train-tracks", Topology Appl., vol 73, no 2, pp. 141–167, 1996.
- [12] Menzel C. Parker and Menzel. Christof, "Pseudo-Anosov diffeomorphisms of the twice punctured torus", Recent Advances in Group Theory and Low-Dimensional Topology, vol 27, pp. 141–154, 2003.
- [13] Moussafir, J, "On computing the entropy of braids", Funct. Anal. Other Math., vol 1, no 1, pp. 37- 46, 2006.
- [14] Penner R. C and Harer. J. L, Combinatorics of train tracks, Princeton, NJ: Princeton University Press, 1992.
- [16] Thurston. W, "On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces", Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), vol 19, no 2, pp. 417–431, 1988.
- [17] Yurttaş. S.Ö, "Geometric intersection of curves on punctured disks". Journal of the Mathematical Society of Japan, vol 65, no 4, pp. 1554–1564, 2013.
- [18] Yurttaş. S.Ö, "Dynnikov and train track transition matrices of pseudo-Anosov braids", Discrete Contin. Dyn. Syst., vol 36, no 1, pp. 541–570, 2016.
- [19] Yurttaş. S.Ö. and Hall. T, "Counting components of an integral lamination", Manuscripta Math., vol 153, no 1, pp. 263–278, 2017.
- [20] Yurttaş S.Ö. and Hall, T, "Intersections of multicurves from Dynnikov coordinates", Bull. Aust. Math. Soc. vol 98, no 1, pp. 149–158, 2018.