İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 47 (1983-1986), 53-67

ÜBER GEWISSE POTENZREIHEN, DEREN FUNKTIONSWERTE FÜR ARGUMENTE AUS DER MENGE DER p-ADISCHEN LIOUVILLESCHEN ZAHLEN p-ADISCHE U-ZAHLEN VOM GRADE $\leq m$ SIND

M.H. ORYAN

Der Author hat in einer Arbeit [5] bewiesen, dass die Funktionswerte gewisser Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen entweder U-Zahlen vom Grade $\leqq$ m oder algebraische Zahlen sind.

In der vorliegenden Arbeit werden die Beziehungen in [5] auf den p-adischen Fall übertragen.

§ 1. Einführung

Der Author hat in einer Arbeit [5] bewiesen, dass die Funktionswerte gewisser Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen entweder U-Zahlen vom Grade $\leq m$ oder algebraische Zahlen sind.

In der vorliegenden Arbeit werden die Beziehungen in [5] auf den p-adischen Fall übertragen.

Zuerst werden die Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten behandelt. Es wird in Satz 1 bewiesen, dass die Funktionswerte dieser Potenzreihen unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge der p-adischen Liouvilleschen Zahlen entweder p-adische Liouvillesche Zahlen oder rationale Zahlen sind. Um Beispiele für Satz 1 zu konstruieren, wird Satz 2 bewiesen.

Nachher werden die obigen Beziehungen auf die Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten nach dem Gesichtspunkt der Koksmaschen Klassifikation übertragen. Es wird in Satz 3 bewiesen, dass die Funktionswerte dieser Potenzreihen unter bestimmten Bedingungen für Argumente aus der Menge der p-adischen Liouvilleschen Zahlen entweder p-adische U-zahlen vom Grade $\leqq m$ sind, d.h. sie in der Menge $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_m$ liegen, oder p-adische algebraische Zahlen sind. Ein Beispiel für Satz 3 wird am Ende gegeben.

Satz 1 folgt aus Satz 3 als ein spezieller Fall.

§ 2. Klasseneinteilung von Mahler und Koksma

Es sei p eine feste Primzahl in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbf{Q}$, $|\ldots|$ bedeute den gewöhnlichen Absolutbetrag von $\mathbf{Q}$ und $|\ldots|_p$ bedeute die p-adische Bewertung von $\mathbf{Q}$. Ferner sei $\mathbf{Q}_p$ Körper aller p-adischen Zahlen über $\mathbf{Q}$.

In 1934 hat Mahler [3] eine Klasseneinteilung der p-adischen Zahlen wie folgt gegeben.

Es sei

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten. Die Zahl

$$H(P) = \max(|a_n|, \ldots, |a_0|)$$

heisst die Höhe von P. Für eine p-adische Zahl ξ und eine natürliche Zahl n setze man

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{(P)^\circ \leq n \\ H(P) \leq H \\ P(\xi) \neq 0}} |P(\xi)|_p \,{}^{(*)}.$$

Diese Funktion ist für $n \geq 1$, $H \geq 1$ höchstens gleich 1 und sie nimmt mit wachsendem n und H nicht zu.

Ferner setze man

$$w_n(\xi) = \limsup_{H \to \infty} \frac{-\log w_n(H, \xi)}{\log H}$$

und

$$w(\xi) = \limsup_{n \to \infty} \frac{w_n(\xi)}{n}.$$

Für $n \geq 1$ ist offenbar $0 \leq w_n(\xi) \leq +\infty$ und $0 \leq w(\xi) \leq +\infty$.

Sei $\mu(\xi)$ der kleinste Index, für den $w_\mu(\xi) = +\infty$ ist, falls ein solcher existiert, und im anderen Falle, dass $w_n(\xi)$ für alle n unter einer endlichen Schranke liegt, sei $\mu(\xi) = \infty$. Dadurch ist $\mu(\xi)$ eindeutig bestimmt. Es können also $\mu(\xi)$ und $w(\xi)$ nicht beide für das gleiche ξ endliche Werte haben. Damit bleiben für die Werte $w(\xi)$ und $\mu(\xi)$ die folgenden vier Möglichkeiten, nach denen die Einteilung aller p-adischen Zahlen vorgenommen werden soll. Die p-adische Zahl ξ heisst

(*) Das symbol $(\ )^\circ$ bedeutet den Grad eines Polynoms oder einer algebraischen Zahl.

A - Zahl, falls $w(\xi) = 0, \qquad \mu(\xi) = \infty$

S - Zahl, falls $0 < w(\xi) < \infty, \quad \mu(\xi) = \infty$

T - Zahl, falls $w(\xi) = \infty, \qquad \mu(\xi) = \infty$

U - Zahl, falls $w(\xi) = \infty, \qquad \mu(\xi) < \infty.$

ξ heisst eine U-Zahl vom Grade m $(1 \leq m)$ falls $\mu(\xi) = m$ ist. Es seien U die Menge aller U-Zahlen und $U_m (m = 1,2,3,\ldots)$ die Menge aller U-Zahlen vom Grade m, dann ist

$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m .$$

Eine p-adische Zahl ξ heisst p-adische Liouvillesche Zahl, wenn und nur wenn für jede natürliche Zahl n es ganze rationale Zahlen $p_n, q_n (q_n > 1)$ gibt mit

$$0 < \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|_p < H_n^{-n} \quad (H_n = \max \left(|p_n|, |q_n| \right)).$$

Jede p-adische Liouvillesche Zahl ist eine U-Zahl vom Grade 1 und auch umgekehrt ist jede U-Zahl vom Grade 1 eine p-adische Liouvillesche Zahl.

Die Klasseneinteilung der reellen Zahlen nach Koksma [2] kann genauso auf den Körper $\mathbf{Q}_p$ übertragen werden. Man definiere die Höhe einer algebraischen Zahl α in $\mathbf{Q}_p$ als gleich der Höhe ihres Minimalpoylnoms $P(x) \in Z[x]$, wobei die Koeffizienten von $P(x)$ relativ prim sind.

Für $\xi \in \mathbf{Q}_p$ und eine natürliche Zahl n setze man

$$w_n^*(H, \xi) = \min_{\substack{(\alpha)^\circ \leq n \\ H(\alpha) \leq H \\ \xi \neq \alpha}} | \xi - \alpha) |_p$$

und dann

$$w_n^*(\xi) = \text{hm} \sup_{H \to \infty} \frac{-\log (H w_n^*(H, \xi))}{\log H},$$

$$w^*(\xi) = \lim \sup_{n \to \infty} \frac{w_n^*(\xi)}{n}.$$

Es gilt auch $0 \leq w_n^*(\xi) \leq \infty$ und $0 \leq w^*(\xi) \leq \infty$. Es sei $\mu^*(\xi)$ der kleinste Index, für den $w_{\mu^*}^*(\xi) = \infty$ ist, falls ein solcher existiert, sonst sei $\mu^*(\xi) = \infty$. Es besteht für $w^*(\xi)$ und $\mu^*(\xi)$ die folgenden vier Möglichkeiten. Die p-adische Zahl ξ heisst

A^* - Zahl, falls $w^*(\xi) = 0, \quad \mu^*(\xi) = \infty$

S^* - Zahl, falls $0 < w^*(\xi) < \infty, \quad \mu^*(\xi) = \infty$

T^* - Zahl, falls $w^*(\xi) = \infty, \quad \mu^*(\xi) = \infty$

U^* - Zahl, falls $w^*(\xi) = \infty, \quad \mu^*(\xi) < \infty$.

ξ heisst eine U^* - Zahl vom Grade m $(1 \leq m)$, falls $\mu^*(\xi) = m$ ist.

Die beiden Klassifikationen sind völlig äquivalent, d.h. A-, S-, T-, U-Zahlen sind dieselben wie A^*-, S^*-, T^*-, U^*- Zahlen. Ferner ist jede U-Zahl vom Grade m eine U^*-Zahl vom Grade m und auch umgekehrt.

In beiden Klassifikationen sind zwei Zahlen aus verschiedenen Klassen algebraisch unabhängig.

§ 3. Potenzreihen mit rationalen Koeffizienten

Wir betrachten in diesem Paragraphen die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{1}$$

über dem p-adischen Körper $\mathbf{Q}_p$, wobei $c_n = \frac{b_n}{a_n}$ nicht verschwindende rationale Zahlen sind mit $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, $(a_n, b_n) = 1$ und $a_n > 1$ für $n \geq n_0$.

Es seien $|c_n|_p = p^{-u_n}$, $A_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$, $B_n = \max_{i=0}^{n} |b_i|$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty, \tag{2}$$

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log_p A_n B_n}{u_n} < \infty. \tag{3}$$

Aus (2) folgt $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} = +\infty. \tag{4}$$

Wegen (4) ist der Konvergenzradius von (1) unendlich.

Satz 1. Es sei $f(x)$ wie oben gegeben. Es sei ferner ξ eine p-adische Liouvillesche Zahl mit folgenden Eigenschaften :

1°) ξ lässt sich durch rationale Zahlen p_n/q_n mit $q_n > 1$ derart approximieren, dass für hinreichend grosses n

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|_p < H_n^{-nw(n)} \tag{5}$$

ist, wobei $H_n = \max(|p_n|, |q_n|)$ und $\limsup_{n\to\infty} w(n) = +\infty$.

2°) Es gibt zwei positive reelle feste Zahlen δ_1 und δ_2 mit $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, sodass es gilt

$$p^{u_n\delta_1} \leq H_n^{\ n} \leq p^{u_n\delta_2} \tag{6}$$

für hinreichend grosses n.

Dann ist $f(\xi)$ entweder eine p-adische Liovillesche Zahl oder eine rationale Zahl.

Beweis. 1°) Es gilt

$$|f(\xi) - f_n(p_n/q_n)|_p \leq \max\{|f(\xi) - f_n(\xi)|_p, |f_n(\xi) - f_n(p_n/q_n)|_p\}, \tag{7}$$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)|_p = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_n \xi^n \right|_p \leq \max\{|c_{n+1}|_p |\xi|_p^{n+1}, |c_{n+2}|_p |\xi|_p^{n+2}, \ldots\}.$$

Es ist $|c_n \xi^n|_p = p^{-u_n + n \log_p |\xi|_p}$ und wegen (4) für hinreichend grosses n

$$u_n/2 \leq u_n - n \log_p |\xi|_p .$$

Also gilt für hinreichend grosses n

$$|c_n \xi^n|_p \leq p^{-u_n/2} .$$

Da die Folge $\{u_n\}$ für hinreichend grosses n monoton zunimmt, gilt für $n \geq n_1 \geq n_0$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)|_p \leq \max\{p^{-u_{n+1}/2}, p^{-u_{n+2}/2}, \ldots\} = p^{-u_{n+1}/2} . \tag{8}$$

Ferner gilt

$$|f_n(\xi) - f_n(p_n/q_n)|_p \leq \max_{\nu=1}^{n} \left| c_\nu \left(\xi^\nu - \frac{p_n^\nu}{q_n^\nu} \right) \right|_p$$

$$= \max_{\nu=1}^{n} \left\{ |c_\nu|_p \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|_p \left| \xi^{\nu-1} + \xi^{\nu-2} \frac{p_n}{q_n} + \ldots + \frac{p_n^{\nu-1}}{q_n^{\nu-1}} \right|_p \right\}.$$

Für hinreichend grosses n gilt

$$\left| \frac{p_n}{q_n} \right|_p = \left| \xi - \left(\xi - \frac{p_n}{q_n} \right) \right|_p \leq \max\left\{ |\xi|_p, \left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|_p \right\} \leq |\xi|_p + 1.$$

Hieraus folgt

$$\left| \xi^{\nu-1} + \xi^{\nu-2} \frac{p_n}{q_n} + \ldots + \frac{p_n^{\nu-1}}{q_n^{\nu-1}} \right|_p \leq (|\xi|_p + 1)^{\nu-1}$$

und

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|_p (|\xi|_p + 1)^{n-1} \max_{\nu=1}^{n} \{p^{-u_\nu}\} .$$

Da die Folge $\{u_n\}$ für $n \geq n_1$ monoton zunimmt, ist $\max_{\nu=1}^{n} \{p^{-u_\nu}\}$ beschränkt.

Also folgt für $n \geq n_2 \geq n_1$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq C(|\xi|_p + 1)^{n-1} \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|_p .$$

Daraus und aus (6) erhält man für $n \geq n_2$

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq C_1^n H_n^{-nw(n)} \leq C_1^n p^{-u_n \delta_1 w(n)} , \tag{9}$$

wobei $C_1 > 0$ eine geeignete Konstante ist.

Aus (7), (8) und (9) erhält man für $n \geq n_2$

$$\left| f(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \max\{p^{-u_{n+1}/2}, C_1{}^n . p^{-u_n \delta_1 w(n)}\} . \tag{10}$$

Es gilt

$$f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \frac{\frac{A_n}{a_0} b_0 q_n^n + \ldots + \frac{A_n}{a_n} b_n p_n^n}{A_n q_n^n} =: \frac{P_n}{Q_n}$$

und

$$\varkappa_n = \max(|P_n|, |Q_n|) \leq (n+1) A_n B_n H_n^n .$$

Wegen (3) gibt es eine konstante Zahl $k > 0$ mit

$$A_n B_n \leq p^{u_n k} .$$

Hieraus und aus (6) erhält man für $n \geq n_3 \geq n_2$

$$\varkappa_n \leq (n+1) p^{u_n k + n_n \delta_2} = (n+1) p^{u_n t} \quad (t = k + \delta_2 > 0) . \tag{11}$$

Wegen (2), (4) und $\limsup_{n\to\infty} w(n) = +\infty$ existieren zwei Folgen $\{s_n'\}$, $\{s_n''\}$ mit $\limsup_{n\to\infty} s_n' = +\infty$, $\limsup_{n\to\infty} s_n'' = +\infty$, sodass es gelten für $n \geq n_4 \geq n_3$

$$p^{-u_{n+1}/2} \leq ((n+1) p^{u_n t})^{-s_n'} \tag{12}$$

und

$$C_1{}^n . p^{-u_n \delta_1 w(n)} \leq ((n+1) p^{u_n t})^{-s_n''} . \tag{13}$$

Also folgt hieraus wegen (11)

$$\left| f(\xi) - \frac{P_n}{Q_n}\right|_p \leq \max\{\varkappa_n^{-s_n'}, \varkappa_n^{-s_n''}\} .$$

Es sei nun $s_n := \min\{s_n', s_n''\}$. Dann gilt für $n \geq n_5$

$$\left| f(\xi) - \frac{P_n}{Q_n} \right|_p \leq \varkappa_n^{-s_n} \tag{14}$$

mit $\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Es folgt aus (14)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = f(\xi) \ .$$

Entweder hat die Folge $\{P_n/Q_n\}$ eine unendliche Teilfolge, deren Glieder voneinander und von $f(\xi)$ verschieden sind, oder sie bleibt für hinreichend grosses n konstant.

Im ersten Fall ist $f(\xi)$ nach (14) eine p-adische Liouvillesche Zahl. Im zweiten Fall ist $f(\xi)$ eine rationale Zahl, da P_n/Q_n $(n = 1,2,\ldots)$ rationale Zahlen sind.

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Der folgende Satz lässt uns Potenzreihen und p-adische Liouvillesche Zahlen konstruieren, für welche die Bedingungen von Satz 1 erfüllt werden.

Satz **2.** Die Potenzreihen

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{k_n} x^n \ (k_n > 0 \text{ für } n \geq n_0) \, ,$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{s_n} x^n \ (s_n > 0 \text{ für } n \geq n_0)$$

seien über $\mathbf{Q}_p$ mit folgenden Eigenschaften gegeben :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = +\infty, \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{n\,k_n} = +\infty. \tag{16}$$

Ferner gäbe es zwei positive reelle Zahlen C_1 und C_2 mit $0 < C_1 \leq C_2$, sodass es gilt

$$C_1\, s_n \leq n\, k_n \leq C_2\, s_n \ . \tag{17}$$

Dann sind für jede positive rationale Zahl r/s $g(r/s)$ und $f(g(r/s))$ p-adische Liouvillesche Zahlen.

Beweis. 1°) Es folgt aus (16), dass $\lim_{n\to\infty} k_{n+1}/k_n = +\infty$. Also ist $g(r/s)$ eine p-adische Liouvillesche Zahl nach Satz 4 in [4].

2°) Es sei $r, s > 0$ und

$$g_n(r/s) = \frac{p^{k_0} s^n + p^{k_1} rs^{n-1} + \ldots + p^{k_n} r^n}{s^n} =: \frac{P_n}{Q_n}.$$

Es ist

$$\left| g\left(\frac{r}{s}\right) - \frac{P_n}{Q_n} \right|_p = \left| p^{k_{n+1}} \left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} + p^{k_{n+2}} \left(\frac{r}{s}\right)^{n+2} + \ldots \right|_p$$

$$\leq \max \{ | p^{k_{n+1}} (\tfrac{r}{s})^{n+1} |_p , | p^{k_{n+2}} (\tfrac{r}{s})^{n+2} |_p , \ldots \} .$$

Es gilt wegen (16) für hinreichend grosses n

$$\left| p^{k_n} \left(\frac{r}{s}\right)^n \right|_p = p^{-k_n} \left| \frac{r}{s} \right|_p^n \leq p^{-k_n/2} .$$

Ferner ist die Folge $\{k_n\}$ wegen (16) monoton zunehmend für hinreichend grosses n. Also erhält man für $n \geq n_1 \geq n_0$

$$\left| g\left(\frac{r}{s}\right) - \frac{P_n}{Q_n} \right|_p \leq \max \{ p^{-k_{n+1}/2}, p^{-k_{n+2}/2}, \ldots \} = p^{-k_{n+1}/2} . \tag{18}$$

Es gilt $P_n > Q_n$ für hinreichend grosses n. Dann gilt für $H_n := \max \{ |P_n|, |Q_n| \} = P_n$ und für $n \geq n_2 \geq n_1$

$$p^{k_n} \leq H_n \leq p^{k_n} (n+1) u^n \quad (u = \max (r,s)) . \tag{19}$$

Es gibt nach (16) eine Folge $\{w(n)\}$ mit $\limsup_{n\to\infty} w(n) = +\infty$, sodass es gilt für hinreichend grosses n

$$p^{-k_{n+1}/2} \leq H_n^{-nw(n)} . \tag{20}$$

Aus (18) und (20) erhält man, dass für $n \geq n_3 \geq n_2$ gilt

$$\left| g\left(\frac{r}{s}\right) - \frac{P_n}{Q_n} \right|_p \leq H_n^{-nw(n)} \tag{21}$$

mit $\limsup_{n\to\infty} \; w(n) = +\infty$.

Es folgt aus (19)

$$p^{nk_n} \leq H_n^n \leq p^{nk_n} (n+1)^n \, . \, u^{n^2} .$$

Hieraus und aus (17) erhält man für $\delta_1 := C_1$

$$p^{s_n \delta_1} = p^{s_n C_1} \leq p^{nk_n} \leq H_n^n .$$

Ferner kann man wegen (15) und (17) eine Konstante $\delta_2 > C_2$ wählen mit

$$p^{nk_n} (n+1)^n u^{n^2} \leq p^{C_2 s_n} u^{n^2} (n+1)^n \leq p^{s_n \delta_2} .$$

Also gilt für $n \geq n_4 \geq n_3$

$$p^{s_n \delta_1} \leq H_n^n \leq p^{s_n \delta_2} \quad (0 < \delta_1 \leq \delta_2) . \tag{22}$$

Damit sind die Bedingungen von Satz 1 erfüllt.

Die Folge $\{P_n/Q_n\}$ ist monoton zunehmend, weil

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = g_{n+1}\left(\frac{r}{s}\right) - g_n\left(\frac{r}{s}\right) = p^{k_{n+1}}\left(\frac{r}{s}\right)^{n+1} > 0 .$$

Da $r/s > 0$ ist, ist $g_n\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{P_n}{Q_n} > 0$. Hieraus folgt

$$f_{n+1}\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right) - f_n\left(\frac{P_n}{Q_n}\right) = p^{s_1}\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}\right) + p^{s_2}\left(\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right)^2 - \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^2\right) + \ldots +$$
$$+ p^{s_n}\left(\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right)^n - \left(\frac{P_n}{Q_n}\right)^n\right) + p^{s_{n+1}}\left(\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right)^{n+1} > 0 .$$

Also kann die Folge $\left\{f_n\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)\right\}$ für hinreichend grosses n nicht konstant bleiben. Wie man aus dem Beweis von Satz 1 sieht, ist $f(g(r/s))$ keine rationale Zahl, also ist sie nach Satz 1 eine p-adische Liouvillesche Zahl.

Beispiele:

Es seien

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n!)^2} x^n , \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n[(n!)]^2} x^n .$$

Es sind

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)[(n+1)!]^2}{n(n!)^2} = \frac{(n+1)^3}{n} \to \infty ,$$

$$\frac{k_{n+1}}{nk_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{n(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{n} \to \infty .$$

Für $C_1 = C_2 = 1$ gilt (17). Also sind für positive rationale Zahlen r/s

$$g\left(\frac{r}{s}\right) \in U_1 \quad \text{und} \quad f\left(g\left(\frac{r}{s}\right)\right) \in U_1 .$$

§ 4. Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten

Wir betrachten in diesem Paragraphen die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n}{a_n} x^n \tag{1}$$

über dem p-adischen Körper $\mathbf{Q}_p$, wobei η_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ nicht verschwindende p-adische ganze algebraische Zahlen aus einem p-adischen algebraischen

Körper K vom Grade m über $\mathbf{Q}$ und a_n positive ganzrationale Zahlen mit $a_n > 1$ für $n \geq n_0$ sind.

Es seien $|\eta_n/a_n|_p = p^{-t_n}$, $A_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = +\infty, \tag{2}$$

$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log_p A_n H(\eta_n)}{t_n} < +\infty, \tag{3}$$

wobei $H(\eta_n)$ die Höhe von η_n bedeutet.

Wegen (2) ist $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = +\infty. \tag{4}$$

Also ist der Konvergenzradius von (1) unendlich.

Satz 3. Es sei $f(x)$ wie oben gegeben. Es sei ferner ξ eine p-adische Liouvillesche Zahl mit folgenden Eigenschaften :

1°) ξ lässt sich durch rationale Zahlen p_n/q_n mit $q_n > 1$ derart approximieren, dass für hinreichend grosses n

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|_p \leq H_n^{-nw(n)} \tag{5}$$

ist, wobei $H_n = \max(|p_n|, |q_n|)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} w(n) = +\infty$.

2°) Es gibt zwei positive reelle feste Zahlen δ_1 und δ_2 mit $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, sodass es gilt

$$p^{t_n\delta_1} \leq H_n^n \leq p^{t_n\delta_2} \tag{6}$$

für hinreichend grosses n.

Dann ist $f(\xi)$ entweder eine p-adische U-Zahl vom Grade $\leq m$ oder eine p-adische algebraische Zahl aus K.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir den folgenden Hilfssatz :

Hilfssatz. Es seien α_j ($j = 1,2,\ldots, k$) ($k \geq 1$) p-adische algebraische Zahlen aus einem p-adischen Zahlkörper K vom Grade g und mit den jeweiligen Höhen $H(\alpha_j)$ ($j = 1,\ldots,k$). Es sei ferner η eine weitere p-adische algebraische Zahl, die mit α_j durch eine Relation $F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0$ verbunden sein möge, wobei $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und in y von mindestens erstem Grad ist.

Dann ist der Grad von $\eta \leq dg$ und es gilt für die Höhe $H(\eta)$ von η folgende Abschätzung :

$$H(\eta) \leq 3^{\,2dg+(l_1+\ldots+l_k)g} \,.\, H^g \,.\, H(\alpha_1)^{l_1g} \ldots H(\alpha_k)^{l_kg} \;.$$

Dabei bedeutet d den Grad von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ nach y, l_j denjenigen von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ nach $x_j\,(j = 1,\ldots,k)$, H das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ (Orhan Ş. İçen [1], S.25).

Beweis von Satz 3.

1°) Es gilt

$$\left| f(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \max\left\{ |f(\xi) - f_n(\xi)|_p \,,\, \left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \right\}, \tag{7}$$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)|_p = \left| \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\eta_\nu}{a_\nu}\, \xi^\nu \right|_p$$

$$\leq \max\left\{ \left|\frac{\eta_{n+1}}{a_{n+1}}\right|_p |\xi|_p^{n+1} \,,\, \left|\frac{\eta_{n+2}}{a_{n+2}}\right|_p |\xi|_p^{n+2}, \ldots \right\}.$$

Es ist $\left|\frac{\eta_n}{a_n}\xi^n\right|_p = p^{-t_n + n\log_p|\xi|_p}$ und wegen (4) $t_n/2 \geq t_n - n\log_p|\xi|_p$ für hinreichend grosses n. Also gilt für hinreichend grosses n

$$|c_n \xi^n|_p \leq p^{-t_n/2} \;.$$

Da die Folge $\{t_n\}$ für hinreichend grosses n monoton zunimmt, gilt für $n \geq n_1 \geq n_0$

$$|f(\xi) - f_n(\xi)|_p \leq \max\,\{p^{-t_{n+1}/2}, p^{-t_{n+2}/2}, \ldots\} = p^{-t_{n+1}/2} \;. \tag{8}$$

Ferner gilt

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \max_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\eta_\nu}{a_\nu}\left(\xi^\nu - \frac{p_n^\nu}{q_n^\nu}\right)\right|_p$$

$$= \max_{\nu=1}^{n} \left\{ \left|\frac{\eta_\nu}{a_\nu}\right|_p \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|_p \left|\xi^{\nu-1} + \xi^{\nu-2}\frac{p_n}{q_n} + \ldots + \frac{p_n^{\nu-2}}{q_n^{\nu-2}}\right|_p \right\}.$$

Für hinreichend grosses n gilt

$$\left|\frac{p_n}{q_n}\right|_p = \left|\xi - \left(\xi - \frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \max\left\{|\xi|_p \,,\, \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|_p\right\} \leq |\xi|_p + 1 \,.$$

Hieraus folgt

$$\left|\xi^{\nu-1} + \xi^{\nu-2}\frac{p_n}{q_n} + \ldots + \frac{p_n^{\nu-1}}{q_n^{\nu-1}}\right|_p \leq (|\xi|_p + 1)^{\nu-1}$$

und

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|_p (|\xi|_p + 1)^{n-1} \max_{\nu=1}^{n}\,\{p^{-t_\nu}\} \;.$$

Da die Folge $\{t_n\}$ für $n \geq n_1$ monoton zunimmt, ist $\max\limits_{\nu=1}^{n} \{p^{-t_\nu}\}$ beschränkt. Also folgt für $n \geq n_2 \geq n_1$ mit einer geeigneten Konstanten $C > 0$

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq C\,(|\xi|_p + 1)^{n-1}\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right|_p .$$

Daraus und aus (6) erhält man für $n \geq n_2$

$$\left| f_n(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq C_1^{\,n} \,.\, H_n^{-nw(n)} \leq C_1^{\,n} \,.\, p^{-t_n \delta_1 w(n)} , \tag{9}$$

wobei $C_1 > 0$ eine geeignete Konstante ist.

Aus (7), (8) und (9) erhält man für $n \geq n_2$

$$\left| f(\xi) - f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\right|_p \leq \max\,\{p^{-t_{n+1}/2}, C_1^n \,.\, p^{-t_n \delta_1 w(n)}\} . \tag{10}$$

2°) Es seien für $n = 0,1,2,\ldots$

$$\gamma_n := f_n\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\eta_\nu}{a_\nu}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^\nu .$$

γ_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ sind algebraische Zahlen aus dem Körper K. Also sind γ_n vom Grade $\leq m$. Wir schätzen die Höhe von γ_n nach oben ab. Hierfür wenden wir den Hilfssatz auf das Polynom

$$F(y, x_0, \ldots, x_n) = A_n q_n^n y - A_n q_n^n \,.\, \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{a_\nu}\left(\frac{p_n}{q_n}\right)^\nu x_\nu$$

an. Da $F(\gamma_n, \eta_0, \ldots, \eta_n) = 0$ ist, gilt

$$H(\gamma_n) \leq 3^{2.1.m+(n+1)m} \,.\, H^m \,.\, H(\eta_0)^m \ldots H(\eta_n)^m , \tag{11}$$

wobei

$$H = \max_{\nu=0}^{n}\left(A_n |q_n|^n , A_n |q_n|^n \frac{1}{a_\nu}\left|\frac{p_n}{q_n}\right|^\nu\right)$$

ist. Es gilt

$$H \leq \max_{\nu=0}^{n}\,(A_n |q_n|^n , A_n |q_n|^{n-\nu} |p_n|) \leq A_n H_n^n .$$

Nach (3) folgt für hinreichend grosses n mit einer geeigneten Konstanten $k^* > 0$

$$A_n H(\eta_n) \leq p^{t_n k^*} .$$

Hieraus und aus (11) bekommt man für $n \geq n_3 \geq n_2$

$$H(\gamma_n) \leq C_2\, C_3^{\,nm}\, H_n^{\,nm}\, p^{(t_{n_8} + \ldots + t_n)mk^*} , \tag{12}$$

wobei $C_2 = (A_0 H(\eta_0))^m \ldots (A_{n_8-1} H(\eta_{n_8-1}))^m$ und $C_3 > 0$ geeignete Konstanten sind.

Es sei $0 < \eta < 1$, dann gilt wegen (2) für $n \geq n_4 \geq n_3$

$$t_n < \eta \, t_{n+1} \; .$$

Hieraus folgt für $n_4 \leq \nu \leq n$

$$t_\nu \leq \eta \, t_{\nu+1} \leq \eta^2 \, t_{\nu+2} \leq \ldots \leq \eta^{n-\nu} \, t_n \; ,$$

also gilt für $n \geq n_4$

$$\begin{aligned} t_{n_4} + \ldots + t_n &\leq (\eta^{n-n_4} + \eta^{n-n_4-1} + \ldots + \eta + 1) \, t_n \\ &\leq (1 + \eta + \eta^2 + \ldots) \, t_n \\ &\leq \frac{1}{1-\eta} \, t_n \; . \end{aligned}$$

Hieraus und aus (6), (12) erhält man für $n \geq n_4$

$$H(\gamma_n) \leq C_4^{\,n} \, p^{k_1^* t_n} \; ,$$

wobei $k_1^* > 0$ eine geeignete Konstante ist. Wegen (4) folgt daraus für $n \geq n_5 \geq n_4$ mit einer geeigneten Konstanten $k_2^* > 0$

$$H(\gamma_n) \leq p^{k_2^* t_n} \; . \tag{13}$$

4°) Wegen (2), (4), (13) und $\limsup_{n\to\infty} w(n) = +\infty$ existieren zwei Folgen $\{s_n'\}$, $\{s_n''\}$ mit $\limsup_{n\to\infty} s_n' = +\infty$, $\limsup_{n\to\infty} s_n'' = +\infty$, sodass es gelten für $n \geq n_6 \geq n_5$

$$p^{-t_{n+1}/2} \leq H(\gamma_n)^{-s_n'} \tag{14}$$

und

$$C_1^{\,n} \, . \, p^{-t_n g_1 w(n)} \leq H(\gamma_n)^{-s_n''} \; . \tag{15}$$

Aus (10), (14) und (15) folgt für $n \geq n_6$

$$|f(\xi) - \gamma_n|_p \leq \max \; \{ H(\gamma_n)^{-s_n'} , H(\gamma_n)^{-s_n''} \} \; .$$

Es sei nun $s_n := \min(s_n', s_n'')$. Dann gilt für $n \geq n_6$

$$|f(\xi) - \gamma_n|_p \leq H(\gamma_n)^{-s_n} \tag{16}$$

mit $\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty$.

Es folgt aus (13)

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = f(\xi) \; .$$

Entweder hat die Folge $\{\gamma_n\}$ eine unendliche Teilfolge, deren Glieder voneinander und von $f(\xi)$ verschieden sind, oder sie bleibt für hinreichend grosses n konstant.

Im ersten Fall ist $f(\xi)$ nach (16) eine p-adische U-Zahl vom Grade $\leq m$. Im zweiten Fall ist $f(\xi)$ eine p-adische algebraische Zahl, da γ_n $(n = 0,1,2,\ldots)$ p-adische algebraische Zahlen sind.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Beispiel für Satz 3.

Es sei K ein p-adischer algebraischer Körper vom Grade m über $\mathbf{Q}$ und α ein ganzalgebraisches Element in K. Wir betrachten

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n x^n \quad \text{und} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n!)^2} x^n ,$$

wobei $\eta_n = \alpha^{n(n!)^2}$.

Ferner sei $r/s > 0$ aus $\mathbf{Q}$ $(r,s > 0)$. Dann ist $\xi := g(r/s)$ eine p-adische Liouvillesche Zahl nach Satz 4 in [4]. Sei $p_n/q_n = g_n(r/s)$, dann kann man wie im Beweis von Satz 2 zeigen, dass es gilt

$$\left| \xi - \frac{p_n}{q_n} \right|_p \leq H_n^{-nw(n)}$$

mit $H_n = \max\,(p_n , q_n)$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} w(n) = +\infty$. Daraus folgt (5).

Es sei $F(z,y) = z - y^{n(n!)^2}$, dann ist $F(\eta_n , \alpha) = 0$. Also gilt nach Hilfssatz

$$H(\eta_n) \leq 3^{2.1.m+n(n!)^2m} \,.\, 1^m \,.\, H(\alpha)^{n(n!)^2m} \leq C^{n(n!)^2} ,$$

wobei $C > 1$ eine geeignete Konstante ist.

Es gilt $|\eta_n|_p = |\alpha|_p^{n(n!)^2} = p^{-n(n!)^2C_1}$, wobei $C_1 > 0$ ist. Dann gilt

$$0 \leq \frac{\log_p H(\eta_n)}{C_1 n(n!)^2} \leq \frac{n(n!)^2 \log_p C}{C_1\, n(n!)^2} = \frac{\log_p C}{C_1} < +\infty .$$

Hieraus folgt (3).

Ferner gilt

$$\frac{C(n+1)\,((n+1)!)^2}{C\,n(n!)^2} = \frac{(n+1)\,(n+1)^2}{n} \to \infty , \quad \text{welches ist (2).}$$

Wie im Beweis von Satz 2 kann man zeigen

$$p^{(n!)^2} \leq H_n \leq p^{(n!)^2}\,(n+1)\,u \quad (u = \max\,(r,s)) .$$

Hieraus folgt

$$p^{n(n!)^2} \leq H_n^n \leq p^{n(n!)^2}\,(n+1)^n u^n .$$

Man nimmt $\delta_1 = 1/C_1$ und wählt δ_2 so eine Konstante mit $\delta_2 \geq \delta_1$ und

$$p^{n(n!)^2}(n+1)^n u^n \leq p^{C_1 n(n!)^2 \delta_2}$$

für hinreichend grosses n. Dann gilt

$$p^{C_1 n(n!)^2 \delta_1} \leq H_n^n \leq p^{C_1 n(n!)^2 \delta_2} ,$$

welches ist (6).

Damit sind alle Bedingungen von Satz 3 erfüllt. Also ist $f(\xi)$ entweder eine p-adische U-Zahl vom Grade $\leq m$ oder eine p-adische algebraische Zahl aus K.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] İÇEN, O.Ş. : *Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adischen elliptischen Funktionen I und II"*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, **38** (1973), 25-35.

[2] KOKSMA, J.F. : *Über die Mahlersche Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen und die Approximation komplexer Zahlen durch algebraische Zahlen*, Mh. Math. Physik **48** (1939), 176-189.

[3] MAHLER, K. : *Über eine Klasseneinteilung der p-adischen Zahlen*, Mathematica Leiden 3 (1934), 177-185.

[4] ORYAN, M.H. *Über gewisse Potenzreihen, die für algebraische Argumente Werte aus den Mahlerschen Unterklassen U_m nehmen*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, **45** (1980), 1-42.

[5] ORYAN, M.H. : *Über gewisse Potenzreihen, deren Funktionswerte für Argumente aus der Menge der Liouvilleschen Zahlen U-Zahlen vom Grade m sind*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, **50** (1985), 15-34.

ÖZET

Yazar bir çalışmasında [5], cebirsel katsayılı bazı kuvvet serilerinin fonksiyon değerlerinin belirli şartlar altında, Liouville sayı argümanları için dereceleri $\leq$ m olan U-sayıları veya cebirsel sayılar olduklarını ispat etmişti.

Bu çalışmada benzer ilişkiler p-adik hal için incelenmektedir.