İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 50 (1991), 59-65

LES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES COMPLEXES DU GROUPE U (3, p^{2s}); p $\neq$ 2

E. GÜZEL

On obtient pour $p \neq 2$, toutes les représentations irréductibles complexes du groupe $U(3, p^{2s})$ défini sur le corps $GF(p^{2s})$.

1. INTRODUCTION

Dans [2], [3], Drobotenko a obtenu les représentations irréductibles complexes des groupes $GL(3,q)$, $GL(4,q)$ définis sur le corps $GF(q)$ ($q = p^s$; p primitif, s entier naturel), en se servant des tableaux des caractères irréductibles complexes de ces groupes étudiés par Steinberg [7]. De même, à l'aide des tableaux des caractères irréductibles complexes des groupes $SL(3,p)$, $PSL(3,p)$; $SL(3, q)$, $PSL(3, q)$ définis sur le corps $GF(q)$ obtenus par Simpson et Frame [6], toutes les représentations irréductibles complexes de ces groupes ont été obtenues par l'auteur [4], [5]. Dans ce travail on obtient pour $p \neq 2$, toutes les représentations irréductibles complexes du groupe $U(3, q^2)$ défini sur le corps $GF(q^2)$, en utilisant le tableau des caractères irréductibles complexes de ce groupe étudié par Ennola [1].

2. LES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES COMPLEXES DU GROUPE U (3, q^2); p $\neq$ 2

Soient $G = GL(3, q)$, θ un élément primitif du corps $GF(q)$. Considérons les éléments suivants de G :

$$a_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta^{i-1} \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad b_i = \begin{bmatrix} 1 & \theta^{i-1} & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad c_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & \theta^{i-1} \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(a_i^p = b_i^p = c_i^p = I\,;\ i = 1, \dots, s)\,.$$

Il existe donc les sous-groupes suivants de G:

$A = \langle a_1 \rangle \times \dots \times \langle a_s \rangle$, $B = \langle b_1 \rangle \times \dots \times \langle b_s \rangle$, $C = \langle c_1 \rangle \times \dots \times \langle c_s \rangle$, $D = A \times B$, $H = D.C$; $|A| = |B| = |C| = q$, $|D| = q^2$, $|H| = q^3$.

Les caractères linéaires des groupes commutatifs A, B, C sont respectivement comme ci-dessous :

$$\psi_{h_1,\ldots,h_s}(a_i) = \varepsilon^{h_i}, \ \beta_{m_1,\ldots,m_s}(b_i) = \varepsilon^{m_i}, \ \lambda_{n_1,\ldots,n_s}(c_i) = \varepsilon^{n_i}$$

$$(\varepsilon^p = 1; \ h_1,\ldots,h_s, m_1,\ldots,m_s, n_1,\ldots,n_s = 0,\ldots,p-1; \ i = 1,\ldots,s).$$

Si $(h_1,\ldots,h_s) = (0,\ldots,0)$, on a q^2 caractères linéaires $\psi_{m_1,\ldots,m_s\,;\,n_1,\ldots,n_s}$ de H;

$$\psi_{m_1,\ldots,m_s\,;\,n_1,\ldots,n_s}(a_i) = 1, \ \psi_{m_1,\ldots,m_s\,;\,n_1,\ldots,n_s}(b_i) = \varepsilon^{m_i}, \ \psi_{m_1,\ldots,m_s\,;\,n_1,\ldots,n_s}(c_i) = \varepsilon^{n_i}$$

$$(\varepsilon^p = 1; \ m_1,\ldots,m_s, n_1,\ldots,n_s = 0,\ldots,p-1; \ i = 1,\ldots,s).$$

Si $(h_1,\ldots,h_s) \neq (0,\ldots,0)$, on a $q^2 - q$ caractères leinéaires $\phi_{h_1,\ldots,h_s\,;\,m_1,\ldots,m_s}$ de D;

$$\phi_{h_1,\ldots,h_s\,;\,m_1,\ldots,m_s}(a_i) = \varepsilon^{h_i}, \ \phi_{h_1,\ldots,h_s\,;\,m_1,\ldots,m_s}(b_i) = \varepsilon^{m_i}$$

$$(\varepsilon^p = 1; \ h_1,\ldots,h_s; m_1,\ldots,m_s = 0,\ldots,p-1; \ i = 1,\ldots,s).$$

Les caractères induits $\phi^H_{h_1,\ldots,h_s\,;\,m_1,\ldots,m_s}$ sont les caractères irréductibles de H. Au lieu de $\phi^H_{h_1,\ldots,h_s\,;\,m_1,\ldots,m_s}$ nous pouvons écrire $\phi^H_{h_1,\ldots,h_s}$. Alors, le tableau des caractères irréductibles complexes du groupe H est donné par le tableau 1 [2].

Nous devons indiquer que d'après le théorème de Frobenius, pour les caractères linéaires $\beta_{m_1,\ldots,m_s}$ du groupe B, nous avons :

$$(\beta^H_{m_1,\ldots,m_s}, \phi^H_{h_1,\ldots,h_s})_H = 1 \tag{1}$$

$(h_1,\ldots,h_s, m_1,\ldots,m_s = 0,\ldots,p-1; (h_1,\ldots,h_s) \neq (0,\ldots,0); (m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0))$.
Soient $R_{h_1,\ldots,h_s}$ le $\mathbf{C}H$-module ($\mathbf{C}$: le corps des nombres complexes) irréductible du caractère $\phi^H_{h_1,\ldots,h_s}$, $K_{m_1,\ldots,m_s}$ le $\mathbf{C}H$-module du caractère $\beta^H_{m_1,\ldots,m_s}$.

Puisque $\phi^H_{h_1,\ldots,h_s}(1) = q$,

$$e_{h_1,\ldots,h_s} = \frac{q}{|H|} \sum_{h \in H} \phi^H_{h_1,\ldots,h_s}(h)\, h^{-1}$$

est donc l'idempotente centrale du groupe-anneau $\mathbf{C}H$ associée à $\phi^H_{h_1,\ldots,h_s}$. Alors, d'après 1, on a :

$$e_{h_1,\ldots,h_s} K_{m_1,\ldots,m_s} = R_{h_1,\ldots,h_s} \tag{2}$$

$(h_1,\ldots,h_s, m_1,\ldots,m_s = 0,\ldots,p-1; (h_1,\ldots,h_s) \neq (0,\ldots,0); (m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0))$.
D'autre part, si

$$e_{m_1,\ldots,m_s} = \frac{1}{|B|} \sum_{b \in B} \beta_{m_1,\ldots,m_s}(b) b^{-1}$$

est l'idempotente centrale du groupe anneau $\mathbf{C}B$ associée à $\beta_{m_1,\ldots,m_s}$, on a :

TABLEAU 1

$k=k_1+k_2\theta+\ldots+k_s\theta^{s-1}$; $t=t_1+t_2\theta+\ldots+t_s\theta^{s-1}$; $k_1,\ldots,k_s,t_1,\ldots,t_s=0,\ldots,p-1$; $(k_1,\ldots,k_s)\neq(0,\ldots,0)$; $(t_1,\ldots,t_s)\neq(0,\ldots,0)$

Classes d'équivalence de H	Représentant de la Classe	Nombre de la Classe	Nombre d'éléments de la Classe	$\phi^H_{h_1,\ldots,h_s}$ $[(h_1,\ldots,h_s)\neq(0,\ldots,0)]$	$\Psi_{m_1,\ldots,m_s;n_1,\ldots,n_s}$
				$\varepsilon^p=1$; $h_1,\ldots,h_s=0,\ldots,p-1$	$\varepsilon^p=1$; $m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s=0,\ldots,p-1$
$\mathscr{E}_1$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}$	1	1	q	1
$\mathscr{E}_2$	$\begin{bmatrix}1&0&k\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}$	$q-1$	1	$q\varepsilon^{k_1h_1+\ldots+k_sh_s}$	1
$\mathscr{E}_3$	$\begin{bmatrix}1&k&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}$	$q-1$	q	0	$\varepsilon^{k_1m_1+\ldots+k_sm_s}$
$\mathscr{E}_4$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&t\\&&1\end{bmatrix}$	$q-1$	q	0	$\varepsilon^{t_1n_1+\ldots+t_sn_s}$
$\mathscr{E}_5$	$\begin{bmatrix}1&k&0\\&1&t\\&&1\end{bmatrix}$	$(q-1)^2$	q	0	$\varepsilon^{k_1m_1+\ldots+k_sm_s+t_1n_1+\ldots+t_sn_s}$

$$K_{m_1,\ldots,m_s} = CHe_{m_1,\ldots,m_s}$$

$$(m_1,\ldots,m_s = 0,\ldots,p-1\,;\,(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)).$$

D'après 2, on obtient donc la relation suivante :

$$R_{h_1,\ldots,h_s} = CHe_{h_1,\ldots,h_s}\, e_{m_1,\ldots,m_s} \tag{3}$$

$$(h_1,\ldots,h_s, m_1,\ldots,m_s = 0,\ldots,p-1;\,(h_1,\ldots,h_s) \neq (0,\ldots,0)\,;\,(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)).$$

Posons $U = U(3,q^2)$. Pour $p \neq 2$, les p-sous-groupes de Sylow de G et de U sont isomorphes ([1], Thé. 5, p. 33). Nous avons donc un p-sous-groupe de Sylow $\widetilde{H}$ de U isomorphe à H. Dans cet isomorphisme les représentants des classes d'équivalence du groupe $\widetilde{H}$ sont comme ci-dessous :

$$\widetilde{\mathscr{E}}_1 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{\mathscr{E}}_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2k\alpha \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \widetilde{\mathscr{E}}_3 : \begin{bmatrix} 1 & k & -\frac{1}{2}k^2 \\ & 1 & -k \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathscr{E}}_4 : \begin{bmatrix} 1 & t\alpha & \frac{1}{2}t^2\alpha^2 \\ & 1 & t\alpha \\ & & 1 \end{bmatrix}, \widetilde{\mathscr{E}}_5 : \begin{bmatrix} 1 & k+t\alpha & -\frac{1}{2}(k^2-t^2\alpha^2)-kt\alpha \\ & 1 & -k+t\alpha \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(k=k_1+k_2\theta+\ldots+k_s\theta^{s-1};\, t=t_1+t_2\theta+\ldots+t_s\theta^{s-1}\,;\,k_1,\ldots,k_s,t_1,\ldots,t_s=0,\ldots,p-1;$$
$$(k_1,\ldots,k_s) \neq (0,\ldots,0)\,;\,(t_1,\ldots,t_s) \neq (0,\ldots,0)\,;\,0 \neq \alpha \in GF(q^2)\,;\,\alpha+\bar{\alpha}^{(*)} = 0).$$

D'autre part, le tableau des caractères irréductibles complexes du groupe $\widetilde{H}$ est le même que celui du groupe H. De plus, d'après 3, nous avons la relation suivante:

$$R^U_{h_1,\ldots,h_s} = CUe_{h_1,\ldots,h_s}\, e_{m_1,\ldots,m_s} \tag{4}$$

$$(h_1,\ldots,h_s, m_1,\ldots,m_s=0,\ldots,p-1;\,(h_1,\ldots,h_s)\neq(0,\ldots,0)\,;\,(m_1,\ldots,m_s) \neq (0,\ldots,0)).$$

Les caractères irréductibles complexes du groupe $U = U(3,q^2)$ sont comme ci-dessous [1] :

$$\eta_i^{(j)}\,;\, j = 1,\ldots,8\,;\, i = 1,\ldots,t_j$$

$$\left(t_1=t_2=t_3=q+1, t_4=t_5=q(q+1), t_6=\frac{1}{6}q(q^2-1), t_7=\frac{1}{2}(q+1)^2(q-2), t_8=\frac{1}{3}q(q^2-1)\right).$$

Posons $\eta^{(j)}_{i|\widetilde{H}} = \eta^{(j)}$. Les valeurs de $\eta^{(j)}$ sur les classes d'équivanlence de $\widetilde{H}$ sont données par le tableau 2.

(*) $\bar{\alpha}$ est l'image de α dans l'automorphisme involutif de $GF(q^2)$ distinct de l'application identique et laissant invariant les éléments de $GF(q)$.

D'après les tableaux 1, 2 et le théorème de Frobenius, ou obtient les relations suivantes :

$$(\psi^U_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}, \eta_i^{(j)}) = 1 \; ; \; j = 3, 5, 6, 7, 8 \; ; \; i = 1,\dots, t_j$$
$$(\phi^U_{h_1,\dots,h_s}, \eta_i^{(j)}) = 1 \; ; \; j = 2, 4 \; ; \; i = 1,\dots, t_j \tag{5}$$
$$(h_1,\dots, h_s, m_1,\dots, m_s, n_1,\dots, n_s = 0,\dots, p-1; (h_1,\dots, h_s) \neq (0,\dots,0);$$
$$(m_1,\dots, m_s) \neq (0,\dots,0); \; (n_1,\dots, n_s) \neq (0,\dots,0)).$$

Soient $M_i^{(j)}$ le $\mathbf{C}U$-module irréductible du caractère $\eta_i^{(j)}$, $M_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}$ le $\mathbf{C}U$-module du caractère $\psi^U_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}$. Si $e_i^{(j)}$ est l'idempotente centrale du groupe-anneau $\mathbf{C}U$ associée à $\eta_i^{(j)}$, d'après 4 et 5, on a :

$$e_i^{(j)} M_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s} = M_i^{(j)} \; ; \; j = 3, 5, 6, 7, 8; \; i = 1,\dots, t_j$$
$$e_i^{(j)} \mathbf{C}U e_{h_1,\dots,h_s} e_{m_1,\dots,m_s} = M_i^{(j)} \; ; \; j = 2, 4; \; i = 1,\dots, t_j \tag{6}$$
$$(h_1,\dots, h_s, m_1,\dots, m_s, n_1,\dots, n_s = 0,\dots, p-1; (h_1,\dots, h_s) \neq (0,\dots,0);$$
$$(m_1,\dots, m_s) \neq (0,\dots,0); (n_1,\dots, n_s) \neq (0,\dots,0)).$$

D'autre part, si $e_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}$ est l'idempotente centrale du groupe-anneau $\mathbf{C}\widetilde{H}$ associée à $\psi_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}$, on a:

$$M_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s} = \mathbf{C}U e_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}.$$

Alors, d'après 6, on a les relations suivantes :

$$M_i^{(j)} = \mathbf{C}U e_i^{(j)} e_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s} \; ; \; j = 3, 5, 6, 7, 8; \; i = 1,\dots, t_i$$
$$M_i^{(j)} = \mathbf{C}U e_i^{(j)} e_{h_1,\dots,h_s} e_{m_1,\dots,m_s} \; ; \; j = 2, 4; \; i = 1,\dots, t_j$$
$$(h_1,\dots, h_s, m_1,\dots, m_s, n_1,\dots, n_s = 0,\dots, p-1; \; (h_1,\dots, h_s) \neq (0,\dots,0);$$
$$(m_1,\dots, m_s) \neq (0,\dots,0); (n_1,\dots, n_s) \neq (0,\dots,0)).$$

Ainsi, on a démontré le théorème suivant :

Théorème. Le $\mathbf{C}U$-module irréductible du caractère irréductible $\eta_i^{(j)}$ ($j = 2,\dots, 8$; $i = 1,\dots, t_j$) du groupe $U = U(3, p^{2s})$; $p \neq 2$ est comme ci-dessous:

$$\text{pour } j = 3, 5, 6, 7, 8 \quad \mathbf{C}U e_i^{(j)} e_{m_1,\dots,m_s;n_1,\dots,n_s}$$
$$\text{pour } j = 2, 4 \qquad \mathbf{C}U e_i^{(j)} e_{h_1,\dots,h_s} e_{m_1,\dots,m_s}$$
$$(h_1,\dots, h_s, m_1,\dots, m_s, n_1,\dots, n_s = 0,\dots, p-1; (h_1,\dots, h_s) \neq (0,\dots,0);$$
$$(m_1,\dots, m_s) \neq (0,\dots,0); \; (n_1,\dots, n_s) \neq (0,\dots,0)).$$

TABLEAU 2

$k=k_1+k_2\theta+\ldots+k_s\theta^{s-1};\ t=t_1+t_2\theta+\ldots+t_s\theta^{s-1};\ k_1,\ldots,k_s,t_1,\ldots,t_s=0,\ldots,p-1;\ (k_1,\ldots,k_s)\neq(0,\ldots,0);\ (t_1,\ldots,t_s)\neq(0,\ldots,0);$
$0\neq\alpha\in GF(q^2);\ \alpha+\bar{\alpha}=0$

Classes d'équivalence de $\widetilde{H}$	Représentant de la Classe	$\eta^{(1)}$	$\eta^{(2)}$	$\eta^{(3)}$	$\eta^{(4)}$	$\eta^{(5)}$	$\eta^{(6)}$	$\eta^{(7)}$	$\eta^{(8)}$
$\widetilde{\mathscr{C}}_1$	$\begin{bmatrix}1&0&0\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}$	1	q^2-q	q^3	q^2-q+1	$q(q^2-q+1)$	$(q-1)(q^2-q+1)$	q^3+1	$(q+1)(q^2-1)$
$\widetilde{\mathscr{C}}_2$	$\begin{bmatrix}1&0&2k\\&1&0\\&&1\end{bmatrix}$	1	$-q$	0	$-(q+1)$	q	$2q-1$	1	$-(q+1)$
$\widetilde{\mathscr{C}}_3$	$\begin{bmatrix}1&k&-\frac{1}{2}k^2\\&1&-k\\&&1\end{bmatrix}$	1	0	0	1	0	-1	1	-1
$\widetilde{\mathscr{C}}_4$	$\begin{bmatrix}1&t\alpha&\frac{1}{2}t^2\alpha^2\\&1&t\alpha\\&&1\end{bmatrix}$	1	0	0	1	0	-1	1	-1
$\widetilde{\mathscr{C}}_5$	$\begin{bmatrix}1&k+t\alpha&-\frac{1}{2}(k^2-t^2\alpha^2)-kt\alpha\\&1&-k+t\alpha\\&&1\end{bmatrix}$	1	0	0	1	0	-1	1	-1

BIBLIOGRAPHIE

[1] ENNOLA, V. : *On the Characters of the Finite Unitary Group*, Ann. Acad. Sci. Fenn., 323 (1963), 3-35.

[2] DROBOTENKO, E.S. : *Irreducible Complex Representations of the Groups* $GL(3,q)$, Dopovidi Acad. Nauk. Ukrain R.S.R. Ser. A (1967), 104-109.

[3] DROBOTENKO, E.S. : *Irreducible Complex Representations of the Group* $GL(4,q)$, Dopovidi Acad. Nauk. Ukrain R.S.R. Ser. A (1971), 397-399.

[4] GÜZEL. E. : *Les Représentations Irréductibles Complexes Des Groupes* $SL(3,p)$, $PSL(3,p)$, Publ. Inst. Math. Beograd, 43 (57) (1988), 27-34.

[5] GÜZEL. E. : *Les Représentations Irréductibles Complexes Des Groupes* $SL(3,q)$, $PSL(3,q)$, J. Karadeniz Tech. Univ. Arts Sei., 10 (1988), 53-62.

[6] SIMPSON, W.A. and FRAME, J.S. : The Character Tables For $SL(3,q)$, $SU(3,q^2)$, $PSL(3,q)$, $PSU(3,q^2)$, Can. J. Math., 25 (1973), 486-494.

[7] STEINBERG, R. : *The Representations of* $GL(3,q)$, $GL(4,q)$, $PGL(3,q)$, $PGL(4,q)$, Can. J. Math., 3 (1951), 225-235.

DEPARTMENT DE MATHEMATIQUES
UNIVERSITE D'ISTANBUL
34459 VEZNECİLER-İSTANBUL
TURQUIE

ÖZET

Bu çalışmada, $p \neq 2$ olmak üzere, $GF(p^{2s})$ cismi üzerinde tanımlı $U(3,p^{2s})$ grubunun bütün kompleks gösterilişleri, Ennola [1] tarafından verilmiş olan karakter tablosu kullanılarak elde edilmektedir.