İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 50 (1991), 101-114

ÜBER EINE KLASSE VON VERALLGEMEINERTEN LÜCKENREIHEN, DEREN WERTE FÜR ALGEBRAISCHE ARGUMENTE TRANSZENDENT, ABER KEINE U-ZAHLEN SIND II

B.M. ZEREN

In der vorliegenden Arbeit, die eine Fortsetzung der gleichnamigen Arbeit mit Nummer I [4] bildet, werden einige Anwendungen und Beispiele zum dort bewiesenen Satz gegeben.

EINLEITUNG

In einer früheren Arbeit [4] hatte ich unter Anwendung eines Baker'schen Satzes gezeigt, dass die verallgemeinerten Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten - unter gewissen Bedingungen über die Koeffizienten - für von Null verschiedene algebraische Argumente von nicht zu hohem Grad transzendente Werte annehmen, welche keine *U*-Zahlen sind.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um Anwendungen und Beispiele des oben erwähnten Satzes.

In einem Anhang wird eine Verallgemeinerung des Hilfssatzes 7 von [4] gegeben, welche - obwohl beim Beweis des erwähnten Satzes von [4] nicht direkt benutzt wird - vielleicht von selbständigem Interesse ist.

EINIGE ANWENDUNGEN UND BEISPIELE ZUM SATZ VON [4]

I°) Es sei die (einfache) Lückenreihe

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} z^{e_n}$$

gegeben, wobei $a_n, b_n, e_n \in \mathbf{Z}$ mit $b_n \neq 0$, $a_n \geqslant 1$, $e_n \geqslant 0$ und $e_{n+1} > e_n$ $(n=0, 1, \ldots)$. Es seien ferner Max $(a_n, |b_n|) = e^{0(n^\rho)}$ mit einer positiven Konstanten ρ und

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} > 1 \ .$$

Nach unseren Bezeichnungen mit $F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h$ gilt hier :

$$c_h = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_n}, & \text{für } h = e_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ausserdem ist hier $s_{n-1}=r_n=e_n$ und deshalb $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{r_n}{s_{n-1}} = 1$, $\varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{s_n}{r_n} = \varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n}$.

Also ist hier $0 = \varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} > 1$.

Aus Max $(a_n, |b_n|) = e^{0(n^\rho)}$ folgt für $c_h\,(h = e_n)$:

$$e^{-An^\rho} < |c_{e_n}| < e^{An^\rho} \; (n = 0, 1, \ldots) \tag{1}$$

mit einer positiven Konstanten A $\left(\text{da } \dfrac{1}{a_n} < \left|\dfrac{b_n}{a_n}\right| < |b_n|\right)$. Andererseits folgt aus $\varliminf\limits_{n \to \infty} \dfrac{e_{n+1}}{e_n} = 0 > 1$, dass für genügend grosse n

$$e_n > K\theta'^n \tag{2}$$

gilt mit passenden K, θ' $(K > 0,\ 1 < 0' < \theta)$. Aus (1) und (2) folgt für genügend grosse n

$$e^{-\frac{An^k}{K\theta'^n}} < \sqrt[e_n]{|c_{e_n}|} < e^{\frac{An^k}{K\theta'^n}}, \tag{3}$$

woraus $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[e_n]{|c_{e_n}|} = 1$ folgt. Schliesslich erhält man hieraus, da $c_h = 0$ für $h \neq e_n$,

$$\varlimsup_{h \to \infty} \sqrt[h]{|c_h|} = 1,$$

was uns für den Konvergenzradius der gegebenen Reihe $R = 1$ gibt, woraus $\log\left(\dfrac{1}{R}\right)^+ = 0$. Den Wert von λ bestimmen wir wie folgt : Hier $A_{r_n} = [a_0, \ldots, a_{r_n}]$,

woraus $1 \leqslant A_{r_n} \leqslant \prod\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$. Da $\prod\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \leqslant e^{A\sum\limits_{\nu=0}^{n} \nu^\rho} < e^{An^{\rho+1}}$, folgt

$$0 \leqslant \log A_{r_n} < A\,n^{\rho+1} . \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt nun für genügend grosse n $0 \leqslant \dfrac{\log A_{r_n}}{e_n} < \dfrac{A\,n^{\rho+1}}{K\theta'^n}$.

Da $\theta' > 1$, erhält man hieraus $\lambda = \varlimsup\limits_{n \to \infty} \dfrac{\log A_{r_n}}{e_n} = 0$. Mit diesen Werten von

θ, R und λ erfüllt die obige Reihe $F(z)$ alle Bedingungen des Satzes von [4]. Nun nehmen wir ein α mit $0 < |\alpha| < 1$. Die Bedingung (6) des Satzes bezüglich α lautet:

$$m \cdot 0 < \frac{0}{2} \log \frac{1}{|\alpha|} - \log s(\alpha),$$

d. h.

$$|\alpha| < \frac{1}{(s(\alpha))^{\frac{2}{\theta}}} . \tag{5}$$

Also für jedes $\alpha \neq 0$, welches (5) genügt, ist $F(\alpha)$ transzendent und $F(\alpha) \in S \cup T$ oder $\in U$, je nachdem $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{r_n}$ endlich oder unendlich ist. Z. B. nehmen wir $\alpha = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ $(m \geqslant 1)$, $p, q \in Z$, $p \neq 0$, $q \geqslant 1$, $|p| < q$, $(p, q) = 1$, und falls $m \geqslant 2$ sei $\frac{p}{q}$ keine m. Potenz einer rationalen Zahl. Dann ist α vom m. Grad mit der definierenden Gleichung $q x^m - p = 0$. Also ist hier $s(\alpha) = |p| + q$ und (5) wird zu

$$|\alpha| < \frac{1}{(|p|+q)^{\frac{2}{\theta}}}, \text{ d. h.}$$

$$|p| < \frac{q}{(|p|+q)^{\frac{2m}{\theta}}} . \tag{6}$$

Da $|p| < q$, ist für das Erfülltsein von (6) folgende Bedingung hinreichend:

$$|p| < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2m}{\theta}} \cdot q^{1-\frac{2m}{\theta}} . \tag{7}$$

Falls $1 - \frac{2m}{\theta} > 0$, d. h. $m < \frac{\theta}{2}$ erfüllt ist, gibt es zu jedem genügend gross gegebenen q immer von Null verschiedene ganze Zahlen p, so dass (7) gilt. Für diese $\alpha = \sqrt[m]{\frac{p}{q}}$ ist also die Behauptung des Satzes gültig.

Ein interessanteres Beispiel bildet das schon von A. Baker [1] behandelte Beispiel von K. Mahler [3]: Der Dezimalbruch $\xi = 0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\ldots$ und seine g-adische Verallgemeinerung ([3], S. 35—39, Satz 9). Der g-adische Bruch lässt sich laut [3], S. 37 wie folgt schreiben:

$$\xi = \frac{g}{(g-1)^2} - \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{g^{2l} - g^l + 1}{(g^l - 1)^2} - \frac{g^{2l+1} - g^l + 1}{(g^{l+1} - 1)^2} \right] \cdot g^{-lg^l + \frac{g^l - 1}{g - 1}}. \quad (8)$$

Jetzt betrachten wir die Reihe

$$F(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\frac{g^{2l} - g^l + 1}{(g^l - 1)^2} - \frac{g^{2l+1} - g^l + 1}{(g^{l+1} - 1)^2} \right] z^{lg^l + \frac{g^l - 1}{g - 1}}. \quad (9)$$

Also

$$\xi = \frac{g}{(g-1)^2} - F\left(\frac{1}{g}\right). \quad (10)$$

Hiernach gehören ξ und $F\left(\frac{1}{g}\right)$ derselben Klasse in der Mahler'schen Klasseneinteilung (weil ξ und $F\left(\frac{1}{g}\right)$ algebraisch abhängig sind). Es genügt also im Folgenden nur die Natur der Transzendenz von $F\left(\frac{1}{g}\right)$ festzustellen. Nun $F(z)$ ist eine einfache Lückenreihe mit $s_{l-1} = r_l = l\,g^l + \frac{g^l - 1}{g - 1}$ und mit rationalen Koeffizienten

$$c_{r_l} = \frac{g^{2l} - g^l + 1}{(g^l - 1)^2} - \frac{g^{2l+1} - g^l + 1}{(g^{l+1} - 1)^2}$$

(Es ist $c_{r_l} \neq 0$, denn für $g \geqslant 2$ $\frac{g^{2l} - g^l + 1}{(g^l - 1)^2} = 1 + \frac{g^l}{(g^l - 1)^2} > 1 + \frac{1}{g^l}$ und $\frac{g^{2l+1} - g^l + 1}{(g^{l+1} - 1)^2} = \frac{g^l}{g^{l+1} - 1} + \frac{1}{(g^{l+1} - 1)^2} < 1 + \frac{1}{g^{2l}}$ (da $g^{l+1} - 1 = = gg^l - 1 = g^l + ((g-1)g^l - 1) < g^l$, weil $g \geqslant 2$), was $c_{r_l} > \left(1 + \frac{1}{g^l}\right) - \left(1 + \frac{1}{g^{2l}}\right) = = \frac{1}{g^l}\left(1 - \frac{1}{g^l}\right)$, also $c_{r_l} > 0$, zur Folge hat). Es sei $c_{r_l} = \frac{b_l}{a_l}$ mit $(a_l, b_l) = 1$. Da $b_l \mid (g^{2l} - g^l + 1)(g^{l+1} - 1)^2 - (g^{2l+1} - g^l + 1)(g^l - 1)^2$ und $a_l \mid (g^l - 1)^2 (g^{l+1} - 1)$, gilt $\operatorname{Max}(|b_l|, a_l) = e^{0(l)}$. Ausserdem ist hier $\lim\limits_{l \to \infty} \frac{s_l}{r_l} = \lim\limits_{l \to \infty} \frac{\nu_{l+1}}{\nu_l} = g$, also $\underline{\lim}_{l \to \infty} \frac{s_l}{r_l} = g$, $\overline{\lim}_{l \to \infty} \frac{s_l}{r_l} = g$.

Da die anderen Voraussetzungen für die am Anfang gegebene Reihe erfüllt sind, bleibt es nur die Bedingung (5) zu verifizieren :

Es ist hier $\alpha = \frac{1}{g}$, $\theta = g$ und folglich $s(\alpha) = g + 1$. (5) wird zu

$$\frac{1}{g} < \frac{1}{(g+1)^{\frac{2}{g}}}. \tag{11}$$

(11) ist nun für $g \geqslant 3$ verifiziert: denn es ist äquivalent zu

$$(g+1)^2 < g^g. \tag{12}$$

Für $g \geqslant 3$ ist aber $(g+1)^2 = g^2 + 2g + 1 < 3g^2 \leqslant g^3 \leqslant g^g$, wonach (12) erfüllt ist. Aber für $g = 2$ ist (12) und folglich (11) nicht verifiziert; dieser Fall bleibt also ausserhalb der Reichweite unseres Satzes. Aber für $g \geqslant 3$ kann man nun behaupten: $F(z)$ und folglich ξ ist eine Zahl aus $S \cup T$.

2°) Wir nehmen nun ein anderes Beispiel aus [3], S. 35, Satz 7. Die Potezreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a^{-c^\nu}.\ d_\nu\, x^\nu$ ist für rationale Werte von $x \neq 0$ zu untersuchen. Hier sind a, c und die d_ν ganzrational mit: $a \geqslant 2$, $c \geqslant 2$, $|d_\nu| < D^\nu$ mit einer Zahl $D > 0$, sowie unendlichviele der Zahlen d_ν ungleich Null. Wir schreiben nun die obige Reihe als $\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\nu_n} \,.\, r^{\nu_n}}{s^{\nu_n}} \,.\, a^{-c^{\nu_n}}$, wobei d_{ν_n} alle und nur die von Null verschiedene Zahlen d_ν darstellen und für x die Werte $x = \frac{r}{s}$, $r \neq 0$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = 1$, $s > 0$ eingesetzt wurde.

Die obige Zahl η kann nun aufgefasst werden als der Wert für $z = \frac{1}{a}$ der (einfachen) Lückenreihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_{\nu_n}\, r^{\nu_n}}{s^{\nu_n}} z^{c^{\nu_n}}$. Da $0 < d_{\nu_n} < D^{\nu_n}$, gilt in dieser Lückenreihe $c_{\nu_n} \neq 0$ mit $c_{\nu_n} = \frac{b_n}{a_n}$, $b_n \mid d_{\nu_n} r^{\nu_n}$, $a_n \mid s^{\nu_n}$; $\mathrm{Max}(|b_n|, a_n) = e^{0(\nu_n)}$, $A_n = [a_0, \ldots, a_n] \mid s^{\nu_n} \Rightarrow A_n = e^{0(\nu_n)}$, $s_{n-1} = r_n = c^{\nu_n}$, $\frac{s_n}{r_n} = \frac{r_{n+1}}{r_n} = c^{\nu_{n+1}-\nu_n}$.

Hier findet man aus $\frac{1}{a_n} < |c_{\nu_n}| < |b_n|$, dass $e^{-\frac{A_{\nu_n}}{c^{\nu_n}}} < \sqrt[c^{\nu_n}]{|c_{\nu_n}|} = e^{\frac{A_{\nu_n}}{c^{\nu_n}}}$ mit einem passenden $A > 0$. Daraus erhält man $\lim_{n\to\infty} \sqrt[c^{\nu_n}]{|c_{\nu_n}|} = 1$, und folglich $\overline{\lim_{h\to\infty}} \sqrt[h]{|c_h|} = 1$, d. h. $R = 1$. Nun zu λ: Da $A_{r_n} = e^{0(\nu_n)}$ war, findet man

$0 \leqslant \frac{\log A_{r_n}}{r_n} = \frac{0(\nu_n)}{c^{\nu_n}}$, woraus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log A_{r_n}}{r_n} = 0$, also $\lambda = 0$ folgt. Und zu θ : Da $\frac{s_n}{r_n} = c^{\nu_{n+1}-\nu_n} \geqslant c$ (weil $\nu_{n+1}-\nu_n \geqslant 1$) für alle n gilt, ist $\theta = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} \geqslant c \geqslant 2$.

Um unseren Satz auf $F(z)$ anzuwenden, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

Fall 1. $\nu_{n+1} - \nu_n$ ist nach oben beschränkt, also $\nu_{n+1} - \nu_n \leqslant N$ mit einer passenden natürlichen Zahl N. Aus $1 \leqslant \nu_{n+1} - \nu_n \leqslant N$ für alle n folgt die Existenz mindestens einer natürlichen Zahl k, derart, dass unendlich oft $\nu_{n+1} - \nu_n = k$ wird. Das Minimum solcher k sei mit l, und das Maximum mit L bezeichnet. Dann ist $1 \leqslant l \leqslant L \leqslant N$ und $0 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = c^l$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} = c^L$. Da hier $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n} < +\infty$ gilt, ist in diesem Falle $\eta = F\left(\frac{1}{a}\right) \in S \cup T$, wenn nur die Bedingung (6) des Satzes erfüllt ist. Da hier $R = 1$, $\lambda = 0$, $m = 1$, $\theta = c^l$ sind, wird (6) zu :

$$0 < \frac{c^l}{2} \log \frac{1}{|\alpha|} - \log s(\alpha),$$

was äquivalent ist zu

$$(s(\alpha))^2 < \left(\frac{1}{|\alpha|}\right)^{c^l}. \tag{13}$$

Mit $\alpha = \frac{b}{a}$, wobei $0 < |b| < a$, $(a, b) = 1$ ist, $s(\alpha) = a + |b|$, so dass (13) zu

$$(a + |b|)^2 < a^{c^l} \tag{14}$$

wird. Wenn $c^l \geqslant 4$, ist (14) für alle $a \geqslant 2$ erfüllt : denn aus $a + |b| < 2a \leqslant a^2$ folgt $(a^4 + |b|)^2 < a^4 \leqslant a^{c^l}$. Wenn $c^l = 3$, d. h. $c = 3$, $l = 1$ ist (14) nur für $a \geqslant 3$ erfüllt : denn für $a \geqslant 3$ ist $(a + |b|)^2 \leqslant (2a - 1)^2 = 4a^2 - 4a + 1 < < 4a^2 - 3a$ und $4a^2 - 3a \leqslant a^3$ ist äquivalent zu $a^3 - 4a^2 + 3a \geqslant 0$, d. h. zu $a(a-1)(a-3) \geqslant 1$, wonach für $a \geqslant 3$ $4a^2 - 3a \leqslant a^3$. Dies mit $(a + |b|)^2 < 4a^2 - 3a$ gibt uns $(a + |b|)^2 < a^3 = a^{c^l}$. Aber für $a = 2$ ist - wegen $(2 + |b|)^2 \geqslant 3^2$ und $a^3 = 8$ - (14) nicht erfüllt. Wenn $c^l = 2$, d. h. $c = 2$, $l = 1$ ist - wegen $(a + |b|)^2 > a^2$ - (14) nicht erfüllt. Also falls $\nu_{n+1} - \nu_n$ nach oben beschränkt ist, ist $F\left(\frac{b}{a}\right)$ und folglich $\eta = F\left(\frac{1}{a}\right) \in S \cup T$ in den folgenden Fällen :

Wenn $c \geqslant 4$: bei beliebigem l und für $a \geqslant 2$; wenn $c = 3$: bei $l = 1$ für $a \geqslant 1$ und bei $l \geqslant 2$ für $a \geqslant 2$; wenn $c = 2$: bei $l \geqslant 2$ für $a \geqslant 2$.

Fall 2. $\nu_{n+1} - \nu_n$ ist nach oben unbeschränkt. In diesem Falle ist $\overline{\lim\limits_{\to\infty}} \frac{s_n}{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} c^{\nu_{n+1}-\nu_n} = +\infty$. Man kann also den zweiten Teil des Satzes anwenden, woraus folgt: $F\left(\frac{b}{a}\right)$ und folglich $\eta = F\left(\frac{1}{a}\right) \in U$ (sogar $\eta \in U_1$, d. h. η ist eine Liouville'sche Zahl) für alle $a \geqslant 2$.

3°) Es sei $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{[z(1-z)]^{4^n}}{\binom{4^n}{[2 \,.\, 4^{n-1}]}}$ (Es ist hier $F(z) = z\ (1-z) + f(z)$ mit $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[z(1-z)]^{4^n}}{\binom{4^n}{2 \,.\, 4^{n-1}}}$, wobei $f(z)$ ein von M. B. Porter in der Theorie der Überkonvergenz angegebenes Beispiel ist ([1], S. 296)). Da für algebraische Argumente $F(z)$ und $f(z)$ algebraisch abhängig sind, gehören sie derselben Klasse in der Mahler'schen Klasseneinteilung. $F(z)$ hat, wie leicht zu ersehen ist, als Potenzreihe den Konvergenzradius 1 und ist eine verallgemeinerte Lückenreihe mit $\frac{s_n}{r_n} = 2$ $(n=1, 2, \ldots)$. Wir wollen untersuchen, ob diese Reihe für passende rationale Argumente transzendente Werte aus $S \cup T$ annimmt. Da die direkte Anwendung des Satzes von [4] an der Unerfüllbarkeit dessen Bedingung scheitert, betrachten wir statt $F(z)$ die nunmehr einfache Lückenreihe

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{4^n}}{\binom{4^n}{[2 \,.\, 4^{n-1}]}},$$

welche aus $F(z)$ durch die Substitution $z(1-z) = u$ entsteht und untersuchen die Werte von $G(u)$ für passende rationale Werte von γ von u, denn aus rationalen Werte α von z entstehen rationale Werte γ von u: $\gamma = \alpha(1-\alpha)$. Für $G(u)$ ist als Potenzreihe in u betrachtet, $c_h = \frac{1}{\binom{4^n}{[2 \,.\, 4^{n-1}]}}$ für $h = 4^n$ $(n=0, 1, \ldots)$ und $c_h = 0$ sonst. Für den Nenner $a_{4^n} = \binom{4^n}{[2 \,.\, 4^{n-1}]}$, welche der Maximale Koeffizient von $(1+x)^{4^n}$ ist, gelten

1) $\binom{4^n}{[2 \,.\, 4^{n-1}]} \geqslant \binom{4^n}{\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, 4^n)$ und 2) $\binom{4^n}{[2 \,.\, 4^{n-1}]} < \sum\limits_{\nu=0}^{4^n} \binom{4^n}{\nu} = 2^{4^n}$.

Aus 1) und 2) folgt

$$\frac{2^{4^n}}{4^n + 1} \leqslant \binom{4^n}{[2 \cdot 4^{n-1}]} < 2^{4^n} \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Aus (15) folgt zuerst, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[4^n]{a_{4^n}} = 2$, woraus $\overline{\lim_{h\to\infty}} \sqrt[h]{c_h} = \frac{1}{2}$ folgt, was wiederum $R = 2$ gibt. Ausserdem gilt hier $s_{n-1} = r_n = 4^n$, woraus $\theta = 4$. Schliesslich folgt aus (15) und der evidenten Doppelungleichung

$$a_{r_n} \leqslant A_{r_n} \leqslant \prod_{\nu=0}^{n} a_{r_\nu} \tag{16}$$

mit $r_\nu = 4^\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$:

$$2^{4^n} \leqslant A_{4^n} < 2^{\sum\limits_{\nu=0}^{n} 4^\nu},$$

woraus für $\frac{\log A_{r_n}}{r_n} = \frac{\log A_{4^n}}{4^n}$ folgendes erhalten wird:

$$\log 2 \leqslant \frac{\log A_{4^n}}{4^n} < \frac{4}{3} \log 2. \tag{17}$$

Aus (17) folgt nun für $\lambda = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log A_{r_n}}{r_n}$

$$\log 2 \leqslant \lambda \leqslant \frac{4}{3} \log 2.$$

Mit den obigen Werten von θ, R und λ wird die Bedingung (6) des Satzes für rationale Werte $(m = 1)$ von u:

$$1 < \frac{2 \log \frac{2}{|\gamma|} - \log s(\gamma)}{\lambda}.$$

Für das Erfülltsein dieser Bedingung ist dasjenige folgender Bedingung hinreichend

$$1 < \frac{2 \log \frac{2}{|\gamma|} - \log s(\gamma)}{\frac{4}{3} \log 2}.$$

Fortan wollen wir nur mit dieser Bedingung arbeiten, welche wir in der Form

$$|\gamma|^2 s(\gamma) < 2^{\frac{2}{3}}$$

schreiben. Hier setzen wir $\gamma = \frac{p}{q}$, $p \neq 0$, $q > 0$, $(p, q) = 1$. Also $|p| = |\gamma|\, q$ und $s(\gamma) = |p| + q = q(1 + |\gamma|)$. Hieraus wird unsere Bedingung zu:

$$|\gamma|^2 . (1 + |\gamma|) - \frac{\sqrt[3]{4}}{q} < 0 . \tag{18}$$

Wenn wir

$$f_q(x) = x^2 (1 + x) - \frac{\sqrt[3]{4}}{q}$$

setzen, so lautet unsere Bedingung (18):

$$f_q\left(\frac{p}{q}\right) < 0 ,$$

welches ist gleichbedeutend mit

$$g\left(\frac{p}{q}\right) < 0 , \tag{19}$$

wobei

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = q f_q\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{|p|}{q}\right)^2 (|p| + q) - \sqrt[3]{4}$$

gesetzt wurde. (19) lässt sich schreiben als

$$\left(\frac{|p|}{q}\right)^2 (|p| + q) - \sqrt[3]{4} < 0 . \tag{20}$$

1°) Es sei nun $0 < |p| \leq \sqrt{q}$. Dann ist $|p| \leq [\sqrt{q}]$ und $\frac{|p|}{q} \leq \frac{1}{\sqrt{q}}$, und für derartige $\gamma = \frac{p}{q}$ ist folgende Ungleichung hinreichend für (20):

$$\left(1 + \frac{[\sqrt{q}\,]}{q}\right) - \sqrt[3]{4} < 0 . \tag{21}$$

Aber für $q \geqslant 2$: $\frac{[\sqrt{q}\,]}{q} \leq \frac{1}{2}$ $\Bigg($ Dann für $q = 2, 3$ ist $[\sqrt{q}\,] = 1$, woraus $\frac{[\sqrt{q}\,]}{q} = \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$ und für $q \geqslant 4$ folgt aus $[q] \leq q$, dass $\frac{[q]}{q} \leq \frac{\sqrt{q}}{q} \leq$ $\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \leq \frac{1}{2}\Bigg)$. Also ist für $q \geqslant 2$

$$\left(\mathrm{i} + \frac{\sqrt{q}}{q}\right) - \sqrt[3]{4} < \frac{3}{2} - \sqrt[3]{4} .$$

Aber $\frac{3}{2} - \sqrt[3]{4}$ ist negativ, denn $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} < 4$. Also ist die Bedingung (6) erst recht erfüllt für solche $\frac{p}{q}$, d. h. $0 < |p| \leq \sqrt{q}$, $q \geqslant 2$. Für solche rationale Argumente $\gamma = \frac{p}{q}$ ist $G(\gamma) \in S \cup T$.

2°) Aus 1°) folgt sofort, dass auch für $z = \alpha$ von 1. oder 2. Grad, welche die Gleichung $z(1-z) = \frac{p}{q}$ erfüllen (p, q wie oben in 1°)), ist die Werte der am Anfang gegebenen Reihe, d. h. $F(\alpha) \in S \cup T$. Insbesondere für $z = \frac{1}{b}$ und $\frac{b-1}{b}$ $(b \geqslant 2)$ wird $z(1-z) = \frac{b-1}{b^2}$. Da $(b-1, b^2)=1$, setze man $p=b-1$, $q=b^2$, so erfüllt $\gamma = \frac{b-1}{b^2}$ die Bedingung von 1°), also ist $F\left(\frac{1}{b}\right) =$ $= F\left(\frac{b-1}{b}\right) = G\left(\frac{b-1}{b^2}\right) \in S \cup T$ für $b \geqslant 2$.

3°) Nun nehmen wir $z = -\frac{1}{b}$ $(b \geqslant 2)$. Hier wird $u = z(1-z) = -\frac{b+1}{b^2}$. Da $(b+1, b^2) = 1$, können wir $p = -(b+1)$, $q = b^2$ setzen. Diese Werte von p, q erfüllen aber die Bedingung $|p| \leq \sqrt{q}$ von 1°) nicht. Wir wollen hier also das Erfülltsein von (6) direkt verifizieren : Es ist hier

$$g\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{b+1}{b^2}\right) = \left(\frac{b+1}{b^2}\right)^2 . (b^2 + b + 1) - \sqrt[3]{4}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2 . \left(1 + \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2}\right) - \sqrt[3]{4} \, : = h(b).$$

$h(b)$ ist eine im Intervall $[2, +\infty)$ monoton abnehmende stetige Funktion von b. Durch direktes Einsetzen findet man $h(6) > 0$ und $h(7) < 0$. Unter Mitberücksichtigung der Monotonie von $h(b)$ findet man endlich :

$$h(b) > 0 \quad (2 \leq b \leq 6) \text{ und } h(b) < 0 \quad (b \geqslant 7).$$

Also ist $g\left(\frac{b+1}{b^2}\right) < 0$ nur für $b \geqslant 7$. Daraus folgt das Erfülltsein von (6) im Falle $p = -(b+1)$, $q = b^2$ nur für $b \geqslant 7$. Also :

$$F\left(-\frac{1}{b}\right) = G\left(-\frac{b+1}{b^2}\right) \in S \cup T \quad \text{für } b \geqslant 7.$$

ANHANG

Wir wollen nun eine Verallgemeinerung des Hilfssatz 7 von [4] geben, welche - obwohl beim Beweis des dortigen Satzes nicht direkt benutzt wird - vielleicht von selbständigem Interesse ist:

Hilfssatz 9. Es seien α_j $(j = 1, \ldots, k)$ algebraische Zahlen von den jeweiligen Graden m_j und jeweiligen Grössen $s(\alpha_j)$. Es sei ferner eine weitere algebraische Zahl η, die mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ durch eine Relation

$$F(\eta\,;\,\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0 \tag{1}$$

verbunden sein möge, wobei $F(y\,;\,x_1, \ldots, x_k)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten in $x_1, \ldots, x_k$ bedeutet. Dann ist der Grad von $\eta \leq dg$ und es gilt für die (absolute) Höhe $H(\eta)$ von η folgende Abschätzung:

$$H(\eta) < 2^{dg}.\,(d+1)^g.\,(dg+1)\,.\,(l_1+1)^g \ldots (l_k+1)^g.\,H^g.\,[s(\alpha_1)]^{\frac{g}{m_1}l_1} \ldots [s(\alpha_k)]^{\frac{g}{m_k}l_k}. \tag{2}$$

Dabei bedeutet d den Grad von $F(y\,;\,x_1, \ldots, x_k)$ in Bezug auf y und l_j den Grad desselben in Bezug auf α_j $(j = 1, \ldots, k)$; H ist die Höhe von diesem Polynom; $g = [K : \mathbf{Q}]$, wobei K den Körper $\mathbf{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ bedeutet.

Beweis. Es sei $\alpha_j = \alpha_j^{\{1\}}, \alpha_j^{\{2\}}, \ldots, \alpha_j^{\{g\}}$ das Konjugiertensystem von α_j $(j = 1, \ldots, k)$ in Bezug auf K. Wir bilden folgendes Polynom:

$$\tilde{P}(y) = \prod_{\nu=1}^{g} F(y\,;\,\alpha_1^{\{\nu\}}, \ldots, \alpha_k^{\{\nu\}})\,. \tag{3}$$

Wegen des Satzes über symmetrische Funktionen ist $\tilde{P}(y)$ ein Polynom mit rationalen Zahlenkoeffizienten und wegen (1) ist $\tilde{P}(\eta) = 0$. Wir wollen nun einen gemeinsamen Nenner der Koeffizienten von $\tilde{P}(y)$ finden: Zu diesem Zweck schreiben wir $F(y\,;\,x_1, \ldots, x_k)$ in der Form

$$F(y\,;\,x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\mu=0}^{d} A_\mu\, y^\mu, \tag{4}$$

wobei

$$A_\mu = \sum_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k = 0, \ldots, 0}^{l_1, \ldots, l_k} a_{\lambda_1 \cdots \lambda_k \mu} \,.\, x_1^{\lambda_1} \ldots x_k^{\lambda_k} \quad (\mu = 0, \ldots, d)\,. \tag{5}$$

Laut den Voraussetzungen über F ist dabei $a_{\lambda_1 \dots \lambda_k \mu} \in \mathbf{Z}$ und nach der Definition der Höhe

$$| a_{\lambda_1 \dots \lambda_k \mu} | \leq H \ (\lambda_1 = 0, \dots, l_1; \dots ; \lambda_k = 0, \dots, l_k ; \mu = 0, \dots, d). \tag{6}$$

Nennen wir

$$A_\mu^{\{\nu\}} = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_k = 0, \dots, 0}^{l_1, \dots, l_k} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k \mu} \cdot (\alpha_1^{\{\nu\}})^{\lambda_1} \dots (\alpha_k^{\{\nu\}})^{\lambda_k} \ (\nu = 1, \dots, g ; \mu = 0, \dots, d). \tag{7}$$

Also

$$F(y ; \alpha_1^{\{\nu\}}, \dots, \alpha_k^{\{\nu\}}) = \sum_{\mu=0}^{d} A_\mu^{\{\nu\}} y^\mu . \tag{8}$$

Wenn wir (8) in (3) einsetzen, so folgt

$$\widetilde{P}(y) = \sum_{\varkappa=0}^{dg} B_\varkappa y^\varkappa \tag{9}$$

mit

$$B_\varkappa = \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_g = \varkappa} A_{\mu_1}^{\{1\}} \cdot A_{\mu_2}^{\{2\}} \dots A_{\mu_g}^{\{g\}}. \tag{10}$$

Wenn wir nun (7) in (10) einsetzen, so sieht man, dass $B_\varkappa$ eine lineare Kombination mit ganzrationalzahligen Koeffizienten der Produkte von der Form

$$\begin{aligned} &[(\alpha_1^{\{1\}})^{\lambda_{11}} \dots (\alpha_k^{\{1\}})^{\lambda_{k1}}] \cdot [(\alpha_1^{\{2\}})^{\lambda_{12}} \dots (\alpha_k^{\{2\}})^{\lambda_{k2}}] \dots [(\alpha_1^{\{g\}})^{\lambda_{1g}} \dots (\alpha_k^{\{g\}})^{\lambda_{kg}}] \\ &= [(\alpha_1^{\{1\}})^{\lambda_{11}} \dots (\alpha_1^{\{g\}})^{\lambda_{1g}}] \dots [(\alpha_k^{\{1\}})^{\lambda_{k1}} \dots (\alpha_k^{\{g\}})^{\lambda_{kg}}] \end{aligned} \tag{11}$$

mit $\lambda_{j\nu} \leq l_j \ (j = 1, \dots, k ; \nu = 1, \dots, g)$.

Auf der rechten Seite von (11) ist ein typischer Faktor (Klammer)

$$(\alpha_j^{\{1\}})^{\lambda_{j1}} \cdot (\alpha_j^{\{2\}})^{\lambda_{j2}} \dots (\alpha_j^{\{g\}})^{\lambda_{jg}} \tag{12}$$

mit Max $(\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \dots, \lambda_{jg}) \leq l_j$. Also laut HS 2 von [4] wird (12) ganzalgebraisch durch Multiplizieren mit $a_{0j}^{l_j}$, wobei a_{0j} der (positiv genommene) Höchstkoeffizient der definierenden Gleichung von α_j in Bezug auf K ist. Also ist

$$a_{0j}^{l_j} (\alpha_j^{\{1\}})^{\lambda_{j1}} \cdot (\alpha_j^{\{2\}})^{\lambda_{j2}} \dots (\alpha_j^{\{g\}})^{\lambda_{jg}} \tag{13}$$

ganzalgebraisch. Aus (13) folgt nun, dass (11) und folglich $B_\varkappa$ ganzrational wird durch Multiplikation mit $a_{01}^{l_1} a_{02}^{l_2} \dots a_{0k}^{l_k}$ für $\varkappa = 0, 1, \dots, dg$. Also ist

$$\tilde{\tilde{P}}(y) = a_{01}^{l_1} \cdot a_{02}^{l_2} \dots a_{0k}^{l_k} \cdot \tilde{P}(y) \tag{14}$$

ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten und mit $\tilde{\tilde{P}}(\eta) = 0$. Nun wollen wir die Höhe von $\tilde{\tilde{P}}(y)$ abschätzen. Dazu bedienen wir uns der folgenden Majorantenrechnung : Laut (7)

$$\begin{aligned} |A_\mu^{\{\nu\}}| &\leq \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_k} |a_{\lambda_1\dots\lambda_k\mu}| \cdot (|\alpha_1^{\{\nu\}}|^+)^{\lambda_1} \dots (|\alpha_k^{\{\nu\}}|^+)^{\lambda_k} \\ &\leq H\,(l_1+1)\dots(l_k+1)(|\alpha_1^{\{\nu\}}|^+)^{l_1}\dots(|\alpha_k^{\{\nu\}}|^+)^{l_k} \\ &\qquad (\nu = 1,\dots,g\,;\ \mu = 0, 1,\dots, d), \end{aligned}$$

laut (8) :

$$F(y\,;\alpha_1^{\{\nu\}},\dots,\alpha_k^{\{\nu\}}) \prec H\,.\,(l_1+1)\dots(l_k+1)\,(|\alpha_1^{\{\nu\}}|^+)^{l_1}\dots(|\alpha_k^{\{\nu\}}|^+)^{l_k}\,. \\ .\,(1+y+\dots+y^d),$$

laut (3) :

$$\tilde{P}(y) \prec H^g\,.\,(l_1+1)^g\dots(l_k+1)^g\left[\prod_{\nu=1}^{g}|\alpha_1^{\{\nu\}}|^+\right]^{l_1}\dots\left[\prod_{\nu=1}^{g}|\alpha_k^{\{\nu\}}|^+\right]^{l_k}. \\ .\,(i+y+\dots+y^d)^g.$$

Hieraus erhält man wegen (14) :

$$\tilde{\tilde{P}}(y) \prec H^g\,.\,(l_1+1)^g\dots(l_k+1)^g\,.\left[a_{01}\prod_{\nu=1}^{g}|\alpha_1^{\{\nu\}}|^+\right]^{l_1}\dots\left[a_{0k}\prod_{\nu=1}^{g}|\alpha_k^{\{\nu\}}|^+\right]^{l_k}. \\ .\,(1+y+\dots+y^d)^g. \tag{15}$$

Aus (15) erhält man unter Anwendung des HS 3 von [4] auf die rechte Seite :

$$\tilde{\tilde{P}}(y) \prec H^g\,.\,(l_1+1)^g\dots(l_k+1)^g\,.\,[s_K(\alpha_1)]^{l_1}\dots[s_K(\alpha_k)]^{l_k}\,.\,(1+y+\dots+y^d)^g. \tag{16}$$

Da die Koeffizienten von $(1+y+\dots+y^d)^g$ sämtlich positiv sind mit der Summe $(1+\dots+1)^g = (d+1)^g$, so folgt aus (16) :

$$H(\tilde{\tilde{P}}) \leq (d+1)^g\,.\,H^g\,.\,(l_1+1)^g\dots(l_k+1)^g\,.\,(s_K(\alpha_1))^{l_1}\dots(s_K(\alpha_k))^{l_k}. \tag{17}$$

Wegen HS 4 von [4] gilt

$$s_K(\alpha_j) \leq (s(\alpha_j))^{\frac{g}{m_j}} \quad (j = 1,\dots,k).$$

Wenn wir dies in (17) eintragen, erhalten wir

$$H(\tilde{\tilde{P}}) \leq (d+1)^g(l_1+1)^g\dots(l_k+1)^g\,.\,H^g\,.\,[s(\alpha_1)]^{\frac{g}{m_1}l_1}\dots[s(\alpha_k)]^{\frac{g}{m_k}l_k}. \tag{18}$$

In (18) stehen die (absoluten) Grössen von α_j $(j=1,\dots,k)$ statt der in Bezug auf K genommenen in (17). Da das (absolute) Definitionspolynom von η das Polynom $\tilde{\tilde{P}}$ teilen muss, so gilt wegen der Folgerung von HS 6 von [4] :

$$H(\eta) < 2^{dg}(dg+1) \,.\, H(\tilde{\tilde{P}}). \tag{19}$$

Aus (18) und (19) erhält man endlich :

$$H(\eta) < 2^{dg}.(d+1)^g.(dg+1).(l_1+1)^g \dots (l_k+1)^g.H^g.[s(\alpha_1)]^{\frac{g}{m_1}l_1} \dots [s(\alpha_k)]^{\frac{g}{m_k}l_k}. \tag{20}$$

Durch diesen HS gegebene obere Schranke von $H(\eta)$ ist für grosse $l_1,\dots,l_k$ im allgemeinen kleiner als eine früher von O. Ş. İçen [3] gegebene und z. B. in [4] benutzte obere Schranke derselben, d. h.

$3^{2dg+(l_1+\cdots+l_k)g} \,.\, H^g \,.\, H(\alpha_1)^{l_1 g} \dots H(\alpha_k)^{l_k g}$. Man kann also die hiesige obere Schranke statt der früheren mit Vorteil benutzen.

LITERATUR

[1] BIEBERBACH, L. : Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Band II, Leipzig und Berlin, 1931.

[2] İÇEN, O.Ş. : *Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adisch elliptischen Funktionen I und II"*, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Ser. A., 38 (1973), 25-35.

[3] SCHNEIDER, Th. : Einführung in die transzendenten Zahlen, Berlin-Göttingen-Heideiberg, 1957.

[4] ZEREN, B.M. : *Über eine Klasse von verallgemeinerten Lückenreihen, deren Werte für algebraische Argumente transzendent, aber keine U-Zahlen sind I*, İst. Üniv. Fen Fak. Mat. Der., 50 (1991), 79-99.

ÖZET

Aynı adı ve I numarasını taşıyan çalışmanın [4] devamı olan bu çalışmada, orada ispat edilmiş olan teoreme dair bazı uygulama ve örnekler verilmektedir.