SUR LE GROUPE DES UNITES DE $\mathbf{Z}D_4$

E. GÜZEL

En réduisant les conditions déterminées par Milies [4] on obtient une caractérisation de $V(\mathbf{Z}D_4)$. Cette caractérisation est utilisée pour demontrer que D_4 a un complément normal torsion-libre dans $V(\mathbf{Z}D_4)$.

1. Introduction. Soit $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels. On détermine le groupe des unités du groupe-anneau $\mathbf{Z}G$ par $U(\mathbf{Z}G)$. On sait que $U(\mathbf{Z}G) = \{\pm 1\} \times V(\mathbf{Z}G)$;

$$V(\mathbf{Z}G) = \left\{ \alpha \in U(\mathbf{Z}G) \,\middle|\, \alpha = \sum a_i g_i \,;\, a_i \in \mathbf{Z} \,;\; g_i \in G \,;\, \sum a_i = 1 \right\}.$$

Milies [4] a obtenu pour $\mathbf{Z}D_4$ les résultats suivants comme Huges et Pearson [2] avaient déjà faits pour $\mathbf{Z}S_3$, ici D_4 et S_3 sont respectivement le groupe Dihedral d'ordre 8 et le groupe symétrique à 3 variables :

Soit $X \in GL(2, \mathbf{Z})$. On note

$$X = \begin{bmatrix} x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) $V(\mathbf{Z}D_4)$ est isomorphe à un sous-groupe Ω du groupe $GL(2, \mathbf{Z})$ telque les éléments de Ω vérifient les conditions (2), (3) et l'une des conditions (i), (ii), (iii) :

(*) (2) $x_5 + x_8 \equiv 0 \pmod 2$

(3) $x_6 + x_7 \equiv 0 \pmod 2$

(i) $x_8 \equiv 1 \pmod 2$; $x_5 + x_6 + x_7 - x_8 \equiv 0 \pmod 4$; $x_5 + x_8 \equiv 2 \pmod 4$

(ii) $x_8 \equiv 1 \pmod 2$; $x_5 + x_6 + x_7 - x_8 \equiv 2 \pmod 4$; $x_5 + x_8 \equiv 0 \pmod 4$

(iii) $x_8 \equiv 0 \pmod 2$; $x_5 + x_8 \equiv 0 \pmod 4$.

(b) L'indice de Ω dans $GL(2, \mathbf{Z})$ est 6.

(c) La détermination des sous-groupes maximaux de $U(\mathbf{Z}D_4)$.

(d) Une unité quelconque de $\mathbf{Z}D_4$ n'est pas conjuguée à une unité triviale.

(e) Un automorphisme quelconque de $\mathbf{Z}D_4$ n'est pas le produit d'un automorphisme intérieur de $\mathbf{Z}D_4$ et d'un automorphisme de D_4.

En réduisant les conditions (*), on obtient ici une caractérisation de $V(\mathbf{Z}D_4)$ comme celle donnée par Allen et Hobby [1] pour $V(\mathbf{Z}A_4)$; A_4 est le groupe alterné à 4 variables. Cette caractérisation sera utilisée pour démontrer que D_4 a un complément normal torsion-libre dans $V(\mathbf{Z}D_4)$.

2. Caractérisation. Soit $X \in GL(2, \mathbf{Z})$ de forme (1), posons

$$t_0 = x_5 + x_8\,,\ t_1 = x_6 + x_7\,,\ t_2 = x_5 - x_8\,,\ t_3 = x_6 - x_7\,.$$

Notre caractérisation de $V(\mathbf{Z}D_4)$ possédera les conditions suivantes :

$$(4) \qquad X \equiv B^i \ (\mathrm{mod}\ 2)\ ;\ i = 0, 1\ ;\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5) trois des quatre t_0, t_1, t_2, t_3 sont congrus modulo 4 à 0.

Si X vérifie ces conditions, il est immédiat que

$$(6) \qquad \begin{aligned} X \equiv B^0 \ (\mathrm{mod}\ 2) &\Leftrightarrow t_0 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ou } t_2 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ X \equiv B \ (\mathrm{mod}\ 2) &\Leftrightarrow t_1 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ou } t_3 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \end{aligned}$$

et pour le déterminant de X on obtient

$$(7) \qquad \begin{aligned} |X| \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4) &\Leftrightarrow t_0 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ou } t_3 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \\ |X| \equiv -1 \ (\mathrm{mod}\ 4) &\Leftrightarrow t_1 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4) \text{ ou } t_2 \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 4). \end{aligned}$$

A l'aide de la méthode utilisée par Allen et Hobby [1] on peut obtenir l'isomorphisme :

$$V(\mathbf{Z}D_4) \simeq H = \{\, X \in GL(2, \mathbf{Z}) \mid X \text{ vérifie (4) et (5)} \,\}.$$

Mais on remarque que les conditions (*) et ((4), (5)) sont équivalentes. C'est à dire $H = \Omega$.

3. Résultat. Un complément normal de G dans $V(\mathbf{Z}G)$ est un sous-groupe normal N de $V(\mathbf{Z}G)$ telque $G \cap N = 1$ et $V(\mathbf{Z}G) = GN$.

Théorème. D_4 a un complément normal torsion-libre dans $V(\mathbf{Z}D_4)$.

En effet, pour

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

on peut écrire $D_4 = \langle A, B \mid A^4 = B^2 = I\,;\, BAB = A^{-1} \rangle$; I est la matrice carrée identique d'ordre 2. La diagonale de X de forme (1) étant $\mathrm{diag}\, X = [x_5, x_8]$ prenons

$$N = \{\, X \in H \mid \mathrm{diag}\, X \equiv [1, 1] \ (\mathrm{mod}\ 4) \,\}.$$

Pour tout $X \in N$ on a $|X| \equiv 1$ (mod 4) donc $X^{-1} \in N$. De plus, $AXA^{-1} \in N$ et $BXB \in N$. Alors, D_4 normalise N. Soit $X \in H$ et posons $Y = B^{-i}X$; $i=0, 1$. D'après la condition (4) on a $Y \equiv 1$ (mod 2). Alors, d'après (6) on obtient $t_0 \equiv 2$ (mod 4) ou $t_2 \equiv 2 \pmod 4$. Si $t_0 \equiv 2 \pmod 4$, d'après (7) on sait que $|Y| \equiv 1 \pmod 4$. diag Y est donc congrue modulo 4 à $[1, 1]$ ou à $[-1, -1]$. Dans le cas où diag $Y \equiv [1, 1] \pmod 4$ il est évident que $Y \in N$. Dans l'autre cas $A^2 Y \in N$. Si $t_2 \equiv 2 \pmod 4$ on a $|Y| \equiv -1 \pmod 4$. diag Y est alors congrue modulo 4 à $[1, -1]$ ou à $[-1, 1]$, dans ces cas $BAY \in N$ ou $BA^3 \in N$. C'est à dire pour tout $X \in H$, $X \in D_4 N$. De plus, il est clair que $D_4 \cap N = \{1\}$, on obtient donc $H = D_4 N$.

On sait que l'ordre d'un élément d'ordre fini de $GL(2, \mathbf{Z})$ peut être 2, 3, 4 ou 6 [3]. Si l'ordre d'un élément X de $GL(2, \mathbf{Z})$ est 3 ou 6, d'après les valeurs-propres possibles de X on a respectivement $t_0 = 1$ ou $t_0 = -1$, il en résulte $X \notin H$. Dans les deux autres cas, on obtient $t_0 = 0$ on a donc $X \notin N$. Alors N est torsion-libre.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALLEN, P.J. and HOBBY, C. : *A characterization of units in* $\mathbf{Z}(A_4)$, Journal of Algebra, **66** (1980), 534-543.

[2] HUGHES, I. and PEARSON, K.R. : *The group of the integral group ring* $\mathbf{Z}S_3$, Canad. Math. Bull., **15** (1972), 529-534.

[3] NEWMAN, M. : Integral Matrices, Academic Press, New York, 1972.

[4] MILIES, C.P. : *The units of the integral group ring* $\mathbf{Z}D_4$, Bol. Soc. Brasil Mat., 4 (1972), 85-92.

ÖZET

Milies [4] tarafından elde edilmiş olan koşullar indirgenerek, $V(\mathbf{Z}D_4)$ grubunun bir karakterizasyonu veriliyor. Bu karakterizasyon kullanılarak D_4 grubunun bir burulmasız normal tümleyeninin varlığı gösteriliyor.