İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Der. 50 (1991), 147-158 

# ÜBER EINE KLASSE VON VERALLGEMEINERTEN LÜCKENREIHEN, DEREN WERTE FÜR ALGEBRAISCHE ARGUMENTE TRANSZENDENT, ABER KEINE U-ZAHLEN SIND III

B.M. ZEREN

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um einige verallgemeinerte Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten, deren Konvergenzradius unendlich ist. Es wird gezeigt, dass eine solche Lückenreihe für von Null verschiedene algebraische Argumente unter gewissen Bedingungen über die Koeffizienten und das Argument transzendente Werte annimmt, deren Platz in der Mahler'schen Klasseneinteilung durch Benutzung eines Satzes von A. Baker präzisiert wird.

## EINLEITUNG

In einer früheren Arbeit (Siehe [4]) hatte ich 1990 unter Anwendung des Baker'schen Satzes gezeigt, dass die verallgemeinerten Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten unter gewissen Bedingungen über diese Koeffizienten für von Null verschiedene algebraische Argumente transzendente Werte annehmen, welche keine $U$-Zahlen sind. Der Konvergenzradius dieser Reihen war endlich.

In der vorliegenden Arbeit wird ein ähnliches Ergebnis für einige verallgemeinerte Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten, deren Konvergenzradius unendlich ist, erzielt. Dies kann als eine Verallgemeinerung von einer früheren Arbeit von M. H. Oryan (Siehe [2]) über die Natur der Transzendenz der Funktionswerte einiger einfachen Lückenreihen mit unendlichem Konvergenzradius auf einige verallgemeinerte Lückenreihen mit demselben Konvergenzradius betrachtet werden.

## DAS HAUPTERGEBNIS

Satz. Betrachten wir die Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h z^h = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(z) \tag{1}$$

mit rationalen Koeffizienten $c_h$ $(h = 0, 1, \dots)$ und eine Indexfolge

$$0 \leqslant s_0 \leqslant r_1 < s_1 \leqslant r_2 < s_2 \leqslant \dots \leqslant r_n < s_n \leqslant \dots ,$$

wobei $c_h = 0$, wenn $r_n < h < s_n$ (falls es ein solches $h$ gibt), aber $c_{s_n} \neq 0$ $(n = 0, 1, \dots)$ und $c_{r_n} \neq 0$ $(n = 1, 2, \dots)$. Dabei wurde $P_k(z) = \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} c_h z^h$ gesetzt.

Man schreibe $c_h = \dfrac{b_h}{a_h}$ $(s_k \leqslant h \leqslant r_{k+1})$, wobei $(a_k, b_{s_k}, \dots, b_{r_{k+1}}) = 1$ und $a_k > 0$. Es sei von einer gewissen Stelle ab $a_k > 1$. Es sei gesetzt $\operatorname*{Max}_{h=s_k}^{r_{k+1}} |b_h| = B_k$.

Es seien ferner folgende Bedingungen erfüllt:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} : = \sigma > 1, \tag{2}$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log B_n}{\log a_n} : = \theta > 1, \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{r_{n+1}} = + \infty . \tag{4}$$

Dann ist der Konvergenzradius dieser Reihe unendlich. Es sei $\alpha$ eine nichtverschwindende algebraische Zahl vom Grade $m < \dfrac{\sigma(1-\theta)}{2u}$. Ausserdem sei $P_n(\alpha) = 0$ für höchstens endlichviele $n$.

1°) Ist

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} : = z < + \infty , \tag{5}$$

so ist $F(\alpha)$ transzendent, aber keine $U$-Zahl.

2°) Ist

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = + \infty , \tag{6}$$

so ist $F(\alpha)$ eine $U$-Zahl.

Dabei ist $u$ eine durch

$$u : = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log [a_0, a_1, \dots, a_n]^{1)}}{\log a_n} \tag{7}$$

---

1) $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ bedeutet, wie üblich, das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_0, a_1, \dots, a_n$.

definierte endliche Zahl $\left(\text{Für } u \text{ gilt genauer: } 1 \leqslant u \leqslant \dfrac{\sigma}{\sigma - 1}\right)$.

Beweis. 1°) Der Konvergenzradius der gegebenen Reihe ist unendlich:

Es sei $\varepsilon_1 > 0$ eine später beliebig klein zu wählende Zahl, wofür auch gilt $\sigma_1 := \sigma - \varepsilon_1 > 1$, was wegen (2) möglich ist.

Für eine passend grosse natürliche Zahl $N_1 = N_1(\varepsilon_1)$ folgert man aus (2) und aus der Hypothese, dass von einer gewissen Stelle ab $a_k > 1$ ist, dass

$$\log a_{n+1} > \sigma_1 \log a_n \quad \text{für} \quad n \geqslant N_1 \tag{8}$$

und

$$a_{N_1} > 1 \tag{8'}$$

und folglich

$$\log a_n > \sigma_1^{n-N_1} . \log a_{N_1} \quad (n > N_1) \tag{9}$$

mit $\log a_{N_1} > 0$.

Hieraus ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty , \tag{10}$$

und sogar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n} = +\infty . \tag{11}$$

Und weiter folgt aus (8):

$$a_{n+1} > a_n^{\sigma_1} \quad (n \geqslant N_1) . \tag{11'}$$

Und sogar

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > a_n^{\sigma_1} \quad (n \geqslant N_1) \tag{11''}$$

und da $\sigma_1 - 1 > 0$, folgt wegen (10):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty . \tag{12}$$

Es sei weiter $\varepsilon_2 > 0$ eine später beliebig klein zu wählende Zahl, wofür auch gilt $\theta + \varepsilon_2 < 1$, was wegen (3) möglich ist. Für eine passende natürliche Zahl $N_2 = N_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geqslant N_1$ erhält man aus (3):

$$B_n < a_n^{\theta+\varepsilon_2} \quad (n > N_2) . \tag{13}$$

Hieraus ergibt sich, da $h \leqslant r_{k+1}$,

$$0 \leqslant \sqrt[h]{|c_h|} = \sqrt[h]{\frac{|b_h|}{a_k}} \leqslant \sqrt[h]{\frac{B_k}{a_k}} \leqslant \sqrt[r_{k+1}]{\frac{1}{a_k^{1-\theta-\varepsilon_2}}} \quad (n > N_2),$$

woraus man mit Hilfe von (4)

$$\lim_{h \to 0} \sqrt[h]{|c_h|} = 0 \tag{14}$$

gewinnt, also ist der gesuchte Konvergenzradius $R = 1 \,/\, \overline{\lim\limits_{h \to \infty}} \sqrt[h]{|c_h|} = +\infty$ .

2°) Es sei $A_n := [a_0, a_1, \ldots, a_n]$ . Nun erhalten wir, genau wie beim Beweise des Satzes 1 in [3],

$$a_n \leqslant A_n < C_0 a_n^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1}} \quad (n > N_1), \tag{15}$$

wobei $a_0 a_1 \ldots a_{N_1 - 1} = C_0 \ (> 0)$ gesetzt wurde.

Aus (15) bekommt man

$$1 \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\log A_n}{\log a_n} \leqslant \frac{\sigma - \varepsilon_1}{\sigma - \varepsilon_1 - 1} .$$

Da $\varepsilon_1 > 0$ beliebig klein gewählt werden konnte, ergibt dies :

$$1 \leqslant u \leqslant \frac{\sigma}{\sigma - 1} . \tag{16}$$

3°) Wir bilden nun $\beta = F(\alpha)$. Wir setzen

$$\beta = \beta_n + \rho_n \tag{17}$$

mit

$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} P_k(\alpha) = \sum_{h=0}^{r_{n+1}} c_h \alpha^h , \tag{18}$$

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k(\alpha) = \sum_{h=s_{n+1}}^{\infty} c_h \alpha^h . \tag{19}$$

Wir wollen jetzt die Höhe $H(\beta_n)$ von $\beta_n$ nach oben abschätzen :

Multiplizieren wir die beiden Seiten von (18) mit $A_n$, so erhalten wir

$$A_n \beta_n - \sum_{h=0}^{r_{n+1}} A_n c_h \alpha^h = 0 . \tag{20}$$

Um nun $H(\beta_n)$ abzuschätzen, wenden wir den Hilfssatz 7 in [4] auf die Relation (20) an mit $k = 1$, $\alpha_1 = \alpha$, $l = r_{n+1}$, $\eta = \beta_n$ und

$$F(y, x) = A_n\, y - \sum_{h=0}^{r_{n+1}} A_n\, c_h\, x^h.$$

Ist $H$ die Höhe von $F(y, x)$, so ist

$$H = \operatorname{Max}\ (A_n\,,\, A_n \mid c_0 \mid, \ldots, A_n \mid c_{r_{n+1}} \mid)\,. \tag{21}$$

Wegen (13) ist

$$\mid c_h \mid = \frac{\mid b_h \mid}{a_h} \leqslant \frac{B_k}{a_k} < \frac{1}{a_k^{1-\theta-\varepsilon_2}} < 1 \quad (k > N_2\ ;\ h = s_k\,, \ldots, r_{k+1})\,. \tag{22}$$

Hieraus folgt die Beschränktheit der Koeffizientenfolge $c_h$, also

$$\mid c_h \mid < C_1 \tag{22'}$$

mit einer passenden positiven Zahl $C_1\ (\geqslant 1)$. Mit Hilfe von (22′) ergibt sich aus (21):

$$H \leqslant C_1\,.\,A_n\,. \tag{23}$$

Andererseits, wegen (7), kann man zu jeder beliebig klein wählbaren Zahl $\varepsilon_3 > 0$ eine natürliche Zahl $N_3 = N_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\ (\geqslant N_2)$ finden, so dass gilt:

$$A_n < a_n^{u+\varepsilon_3} \quad (n > N_3)\,. \tag{24}$$

Unter Benutzung der letzten Ungleichung ergibt sich aus (23):

$$H \leqslant C_1\,.\,a_n^{u+\varepsilon_3}\,. \tag{25}$$

Durch Anwendung des Hilfssatzes 7 (Siehe [4]) erhält man dann

$$\begin{aligned} H_K(\beta_n) &< 2^m\,.\,(r_{n+1}+1)^m\,.\,H^m\,.\,(s_K(\alpha))^{r_{n+1}} \\ &< C_2^{m r_{n+1}}\,.\,a_n^{m(u+\varepsilon_3)} \quad (n > N_3)\,, \end{aligned} \tag{26}$$

wobei $C_2 = 4\,C_1\, s_K(\alpha) = 4\, C_1\, s(\alpha)$ [1] gesetzt wurde. Wegen (4) kann man zu jeder beliebig klein wählbaren Zahl $\varepsilon_4 > 0$ eine natürliche Zahl $N_4 = N_4(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_4) \geqslant N_3$ finden, so dass gilt

$$C_2^{r_{n+1}} < a_n^{\varepsilon_4} \quad (n > N_4)\,.$$

Dann folgt es aus (26):

$$H_K(\beta_n) < a_n^{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} \quad (n > N_4)\,. \tag{27}$$

4°) Nun wollen wir $\mid \rho_n \mid = \mid \beta - \beta_n \mid$ nach oben abschätzen:

Es ist $\mid \rho_n \mid \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mid P_k(\alpha) \mid$ und wegen (22)

[1]) Wegen $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ ist $s_K(\alpha) = s(\alpha)$.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(\alpha)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k^{1-\theta-\varepsilon_2}} \cdot \left( \sum_{h=s_k}^{r_{k+1}} |\alpha|^h \right)$$

$$< \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k^{1-\theta-\varepsilon_2}} \left[ (r_{k+1}+1) \left( \operatorname{Max}(1, |\alpha|) \right)^{r_{k+1}} \right] \tag{28}$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a_k^{1-\theta-\varepsilon_2}} \left( C_3(\alpha) \right)^{r_{k+1}} \quad (n > N_2),$$

wobei $C_3(\alpha) = 2 . \operatorname{Max}(1, |\alpha|)\ (>1)$ gesetzt wurde.

Andererseits, wegen (4), kann man zu jeder beliebig klein wählbaren Zahl $\varepsilon_5 > 0$ mit $1 - \theta - \varepsilon_2 - \varepsilon_5 > 0$ eine natürliche Zahl $N_5 = N_5(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5) \geqslant N_4$ finden, so dass gilt :

$$a_{n+1}^{\varepsilon_5} > C_3^{r_{n+2}} \quad (n > N_5). \tag{29}$$

Dann folgt aus (28) :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(\alpha)| \leqslant \frac{1}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5}} \cdot \left[ 1 + \left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \right)^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5} + \left( \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} \right)^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5} + \ldots \right]$$
$$:= \bar{\rho}_n \quad (n > N_5). \tag{30}$$

Setzen wir

$$\left( \frac{a_n}{a_{n+1}} \right)^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5} = \lambda_n . \tag{31}$$

Dann lässt sich $\bar{\rho}_n$ auf folgende Weise schreiben :

$$\bar{\rho}_n = \frac{1}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5}} \left[ 1 + \lambda_{n+1} + \lambda_{n+1} . \lambda_{n+2} + \ldots \right]. \tag{32}$$

Wegen (12), da $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 0$ ist, kann man eine natürliche Zahl $N_6 = N_6(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_5) \geqslant N_5$ finden, so dass gilt :

$$\lambda_n < \frac{1}{2} \quad (n > N_6). \tag{33}$$

Aus (32) und (33) erhält man dann :

$$\bar{\rho}_n < \frac{1}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5}} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \right] \tag{34}$$
$$< \frac{2}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5}} \quad (n > N_6).$$

Andererseits folgt aus (10)

$$2 < a_{n+1}^{\varepsilon_6} \quad (n > N_7), \tag{35}$$

wobei $\varepsilon_6 > 0$ beliebig klein mit $1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6>0$ ist und $N_7 = N_7(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_6) \geqslant N_6$ passend gross gewählt werden muss.

Aus (34) und (35) erhält man endlich $\bar{\rho}_n < \dfrac{1}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}}$ $(n > N_7)$ und folglich

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(\alpha)| < \frac{1}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}} \quad (n > N_7). \tag{36}$$

Wegen $|\rho_n| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |P_k(\alpha)|$ ergibt sich hieraus

$$|\rho_n| < \frac{1}{a_{n+1}^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}} \quad (n > N_7) \tag{36'}$$

und durch Benutzung von (11'):

$$|\rho_n| < \frac{1}{a_n^{(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}} \quad (n > N_7). \tag{37}$$

Wenn wir (37) und (27) kombinieren, erhalten wir

$$|\rho_n| = |\beta - \beta_n| < \frac{1}{H_K(\beta_n)^{\frac{(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}}} \quad (n > N_7). \tag{38}$$

5°) Wir wollen jetzt $H_K(\beta_n)$ nach unten abschätzen:

Es ist laut der Voraussetzung des Satzes $\beta_n - \beta_{n-1} = P_n(\alpha) \neq 0$ für genügend grosses $n$, etwa für $n>N_8$ $(\geqslant N_7+1)$, und wegen (36) mit $n$ statt $n+1$

$$0 < |\beta_n - \beta_{n-1}| = |P_n(\alpha)| < \frac{1}{a_n^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}} \quad (n > N_8). \tag{39}$$

Andererseits folgt aus $\beta_n - \beta_{n-1} \neq 0$ für $n > N_8$ laut Hilfssatz 8 in [4]:

$$|\beta_n - \beta_{n-1}| > \frac{1}{\mathscr{C} \cdot H_K(\beta_n) \cdot H_K(\beta_{n-1})} \quad (n > N_8). \tag{40}$$

Dabei ist $\mathscr{C}$ eine nur von $m$ abhängende positive Konstante.

Wenn wir nun (39) und (40) verbinden, erhalten wir

$$\frac{1}{\mathscr{C} \cdot H_K(\beta_n) \cdot H_K(\beta_{n-1})} < \frac{1}{a_n^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}} \quad (n > N_8). \tag{41}$$

Die Einsetzung von $H_K(\beta_{n-1})$ aus (27) mit $n-1$ statt $n$ in (41) gibt uns

$$H_K(\beta_n) > \frac{a_n^{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}}{\mathscr{C} \cdot a_{n-1}^{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}} \quad (n > N_8). \tag{42}$$

Aus (8) erhalten wir

$$H_K(\beta_n) > \frac{C_4}{a_{n-1}^{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)-\sigma_1(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}} \quad (n > N_8). \tag{43}$$

Dabei wurde $C_4 = \dfrac{1}{\mathscr{C}}$ gesetzt, woraus $C_4 > 0$.

6°) Wir behaupten nun, dass für genügend grosse $n$ $\{H_K(\beta_n)\}$ eine monoton wachsende Folge bildet: Aus (43) folgt nun

$$H_K(\beta_{n+1}) > \frac{C_4}{a_n^{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)-(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}} \quad (n > N_8). \tag{44}$$

Andererseits war laut (27):

$$H_K(\beta_n) < a_n^{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} \quad (n > N_8). \tag{45}$$

Aus (45) und (44) erhält man durch Division:

$$\frac{H_K(\beta_{n+1})}{H_K(\beta_n)} > C_4 \cdot a_n^{(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)-2m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} \quad (n > N_8). \tag{45'}$$

Da laut der Voraussetzung des Satzes $m < \dfrac{\sigma(1-\theta)}{2u}$, d. h. $2mu < \sigma(1-\theta)$ war, durch genügend kleine Wahl von $\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ wird der Exponent von $a_n$ auf der rechten Seite von (45′) positiv und da laut (10) $a_n \to +\infty$ für $n \to \infty$, wird diese rechte Seite $> 1$ für genügend grosse $n$, etwa für $n > N_9$ $(\geqslant N_8)$.

Also gilt

$$H_K(\beta_{n+1}) > H_K(\beta_n) \quad (n > N_9), \tag{46}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Hieraus folgt, dass für $n > N_9$ die $\beta_n$ alle voneinander verschieden sind.

7°) Es sei nun $\varepsilon$ eine später zu präzisierende vorgegebene positive Zahl. Durch passende Wahl [1]) von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ kann man erreichen, dass

$$\frac{(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} > \frac{\sigma(i-\theta)}{mu} - \varepsilon \tag{47}$$

gilt. Durch diese Wahl von $\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ wird (38) zu

[1]) Diese Wahl ist mit der Wahl bei (45′) verträglich, da es in den beiden Fällen auf die beliebige Kleinheit von $\varepsilon_i$ $(i = 1, \ldots, 6)$ ankommt.

$$|\beta - \beta_n| < \frac{1}{H_K(\beta_n)^{\frac{\sigma(1-\theta)}{mu}-\varepsilon}} \quad (n > N_9), \tag{48}$$

wobei $N_9$ jetzt von $\varepsilon$ abhängt und $\{H_K(\beta_n)\}$ monoton wachsend ist. Wegen der Voraussetzung unseres Satzes ist $m < \frac{\sigma(1-\theta)}{2u}$, d. h.

$$2 < \frac{\sigma(1-\theta)}{mu}. \tag{49}$$

Man kann jetzt $\varepsilon > 0$ so klein wählen, dass

$$\frac{\sigma(1-\theta)}{mu} - \varepsilon \geqslant 2 + \varepsilon \tag{50}$$

wird. Dazu genügt es

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma(1-\theta)}{mu} - 2\right] \tag{51}$$

zu wählen. Dann stimmen wir $\varepsilon_i\,(i = 1,\dots,6)$ auf $\varepsilon$, und darauf $N_i\,(i = 1,\dots,9)$ auf $\varepsilon_i\,(i = 1,\dots,6)$ ab. Mit diesem $N_9$ haben wir damit

$$|\beta - \beta_n| < \frac{1}{H_K(\beta_n)^{2+\varepsilon}} \quad (n > N_9), \tag{52}$$

mit unendlich vielen verschiedenen $\beta_n$ aus einem festen algebraischen Zahlkörper.

Wenn wir in der Folgerung des Hilfssatzes 6 in [4] für $P = 0$ die definierende Gleichung von $\beta_n$ in $K$, für $P_1 = 0$ die absolute definierende Gleichung für derselben und für $n$ den Grad $m$ von $K$ nehmen, so ergibt sich

$$H(\beta_n) < C_5(m) \,.\, H_K(\beta_n) \tag{53}$$

mit $C_5(m) = 2^m \,.\, (m+1) > 0$. Aus (52) und (53) erhält man nun

$$|\beta - \beta_n| < \frac{C_6}{H(\beta_n)^{2+\varepsilon}} \quad (n > N_9) \tag{54}$$

mit einer von $n$ unabhängigen positiven Konstante $C_6$. Hier gilt $\lim\limits_{n\to\infty} H(\beta_n) = +\infty$, weil nach der Folgerung von Hilfssatzes 4 in [4] $H(\beta_n) \geqslant \frac{1}{2}[H_K(\beta_n)]^{\frac{1}{m}}$ und (da $\{H_K(\beta_n)\}$ für grosse $n$ monoton wachsend ist) $\lim\limits_{n\to\infty} H_K(\beta_n) = +\infty$ ist. Wenn man diese Tatsache berücksichtigt, folgt aus (54)

$$|\beta - \beta_n| < \frac{1}{H(\beta_n)^{2+\tilde{\varepsilon}}} \quad (n > N_{10}), \tag{55}$$

wobei $\tilde{\varepsilon} > 0$ gemäss $2 < 2+\tilde{\varepsilon} < 2+\varepsilon$ gewählt und $N_{10}\,(\geqslant N_9)$ darauf abgestimmt werden kann. Da die $\beta_n$ in (55) alle voneinander verschieden sind, widerspricht (55) dem Roth-LeVeque'schen Satz im Falle der Algebraizität von $\beta$. Also ist $\beta$ transzendent.

8°) Nun wollen wir auf $\{\beta_n\}$ den Satz von A. Baker [1] anwenden, um die Natur der Transzendenz von $\beta$ zu präzisieren:

Weil die Folge $\{H_K(\beta_n)\}$ nach (46) für $n > N_9$ monoton wachsend ist, sind alle $\beta_n$ für $n > N_9$ voneinander verschieden.

Nun bilden wir das Verhältnis $\dfrac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)}$. Wegen (27) mit $n+1$ statt $n$ und (43) erhält man

$$\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \frac{m\,(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\log a_{n+1}}{\log C_4 - [m\,(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4) - \sigma_1(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)]\log a_{n-1}} \quad (n > N_9),$$

oder mit einigen Umformungen und $\sigma_1 = \sigma - \varepsilon_1$:

$$\frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \frac{\dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_{n-1}}}{\dfrac{\log C_4}{m\,(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\log a_{n-1}} + \left[\dfrac{(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m\,(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} - 1\right]} \tag{56}$$

$$(n > N_9).$$

Halten wir nun $\varepsilon_i$ $(i=1,\ldots,6)$ fest. Da wegen (10) für $n \to \infty$ $a_n \to +\infty$ ist, ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log C_4}{m\,(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)\log a_{n-1}} = 0$.

Ausserdem ist laut Voraussetzung:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_{n-1}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} \cdot \frac{\log a_n}{\log a_{n-1}} \leqslant \tau^2.$$

Es folgt also aus (56)

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} \leqslant \frac{\tau^2}{\dfrac{(\sigma-\varepsilon_1)(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m\,(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} - 1}, \tag{57}$$

und da $\varepsilon_i$ $(i = 1,\ldots,6)$ beliebig klein gewählt werden können,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} \leqslant \frac{\tau^2}{\dfrac{\sigma(1-\theta)}{m u} - 1}, \tag{58}$$

und dies ergibt wegen $m < \dfrac{\sigma(1-\theta)}{2u}$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log H_K(\beta_{n+1})}{\log H_K(\beta_n)} < \tau^2, \tag{58'}$$

woraus in Verbindung mit (55) laut dem oben genannten Satz von A. Baker angewendet auf $\beta$ und die Folge $\{\beta_n\}$ mit $n > N_{10}$ folgt, dass $\beta$ keine $U$-Zahl ist.

Nun betrachten wir den 2. Teil des Satzes betreffend den Fall

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log a_{n+1}}{\log a_n} = +\infty, \tag{59}$$

die anderen Voraussetzungen seien erhalten:

Aus der Folge $\left\{\dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_n}\right\}$ wählen wir eine Teilfolge $\left\{\dfrac{\log a_{n_k+1}}{\log a_{n_k}}\right\}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log a_{n_k+1}}{\log a_{n_k}} = +\infty, \tag{60}$$

was laut (59) möglich ist.

Aus (27) und (36) erhält man

$$|\beta - \beta_{n_k}| < H_K(\beta_{n_k})^{-\frac{(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)} \cdot \frac{\log a_{n_k+1}}{\log a_{n_k}}} \quad (n_k > N_7). \tag{61}$$

Da $H_K(\beta_n) \to +\infty$ ist, ist auch $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$.

Andererseits ist, wegen der Folgerung des Hilfssatzes 4 und derjenigen des Hilfssatzes 6 in [4]:

$$\frac{1}{2} H_K(\beta_{n_k})^{\frac{1}{m}} < H(\beta_{n_k}) < c(m) \,.\, H_K(\beta_{n_k}). \tag{62}$$

Da $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$ für $n_k \to +\infty$, so wird $H(\beta_{n_k}) \to +\infty$ für $n_k \to \infty$ wegen der linken Hälfte von (62).

Wegen $H_K(\beta_{n_k}) \to +\infty$, wird für $n_k > N_{11}$ $(\geqslant N_9)$

$$H_K(\beta_{n_k}) > c(m). \tag{63}$$

Dann ist für $n_k > N_{11}$

$$H(\beta_{n_k}) < (H_K(\beta_{n_k}))^2 \tag{64}$$

wegen (63) und der rechten Hälfte von (62).

Aus (61) und (64) folgert man nun

$$|\beta-\beta_{n_k}|<H(\beta_{n_k})^{-\frac{1}{2}\frac{(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}\cdot\frac{\log a_{n_k+1}}{\log a_{n_k}}}\quad (n_k>N_{11}) \tag{65}$$

mit $\lim\limits_{n_k\to\infty} H(\beta_{n_k})=+\infty$ und $\lim\limits_{n_k\to\infty}\frac{\log a_{n_k+1}}{\log a_{n_k}}=+\infty$.

Wegen $H(\beta_{n_k})\to+\infty$, $n_k\to\infty$ kann man aus $\{\beta_{n_k}\}$ eine Teilfolge $\{\beta_{n_{k_j}}\}$ auswählen, so dass $\{H(\beta_{n_{k_j}})\}$ mit $n_{k_j}>N_{12}>N_{11}$ eine monoton wachsende Folge ist. Aus (65) erhält man nun

$$|\beta-\beta_{n_{k_j}}|<H(\beta_{n_{k_j}})^{-\frac{1}{2}\frac{(1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6)}{m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}\cdot\frac{\log a_{n_{k_j}+1}}{\log a_{n_{k_j}}}}\quad (n_{k_j}>N_{12}) \tag{66}$$

mit $H(\beta_{n_{k_j}})$ monoton wachsend und $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{\log a_{n_{k_j}+1}}{\log a_{n_{k_j}}}=+\infty$.

Hier kann man $\varepsilon_i$ $(i=1,\ldots,6)$ gleich am Anfang so wählen, dass auch $\frac{1-\theta-\varepsilon_2-\varepsilon_5-\varepsilon_6}{2m(u+\varepsilon_3+\varepsilon_4)}>0$ wird. Das ist wegen (3) möglich.

Aus (66) folgt nun, dass $\beta$ eine $U^*$-Zahl vom höchstens $m$-ten Grad und folglich eine $U$-Zahl vom höchstens $m$-ten Grad ist.

## LITERATUR


[1] BAKER, A. : *On Mahler's classification of transcendental numbers*, Acta Mathematica, **111** (1964), 97-120.

[2] ORYAN, M.H. : *On power series and Mahler's U-numbers*, Mathematica Scandinavica, **65** (1989), 143-151.

[3] ZEREN, B.M. : *Über die Transzendenz der Werte einiger schnell konvergenter Potenzreihen für algebraische Argumente*, Bulletin of the Technical University of İstanbul, **38** (1985), Number 4, 473-496.

[4] ZEREN, B.M. : *Über eine Klasse von verallgemeinerten Lückenreihen, deren Werte für algebraische Argumente transzendent aber keine U-Zahl sind I*, İst. Üniv. Fen Fak. Mat. Der., **50** (1991), 79-99


## ÖZET


Bu çalışmada rasyonel katsayılı ve yakınsaklık yarıçapı sonsuz olan bazı genelleştirilmiş boşluk serileri ele alınmakta ve bu boşluk serilerinin belirli koşullar altında cebirsel argümanlar için transandant değerler aldıkları ve bu değerlerin Mahler sınıflandırmasındaki yeri A. Baker'ın verdiği teoremi kullanmak suretiyle belirtilmektedir.