İstanbul Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **45** (1980), 89-130

ÜBER EINIGE KOMPLEXE UND P-ADISCHE LÜCKENREIHEN MIT WERTEN AUS DEN MAHLERSCHEN UNTERKLASSEN U_m

B. M. ZEREN

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich zuerst um einige Lückenreihen mit rationalen Koeffizienten. Es wird gezeigt, dass eine solche Lückenreihe für von Null verschiedene algebraische Argumente unter gewissen Bedingungen über die Koeffizienten zu einer passenden U_m-Klasse gehört. Das Ergebnis wird dann auf Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten verallgemeinert und auf solche mit Koeffizienten aus dem p-adischen Gebiet übertragen.

§ 1. EINLEITUNG

Im Jahre 1946 hatte Harvey Cohn [2] gezeigt, dass eine Lückenreihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i} \cdot z^{n_i} \quad (c_{n_i} \neq 0)\,, \qquad \lim_{i \to \infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = +\infty$$

mit rationalen Koeffizienten c_{n_i} für von Null verschiedene algebraische Argumente unter gewissen Bedingungen transzendente Werte annimmt. Die p-adische Übertragung dieses Satzes wurde in der Arbeit von H. Şenkon [10] gegeben. Andererseits hatte K. Mahler (1965) in seiner Arbeit mit dem Titel "Arithmetic properties of lacunary power series with integral coefficients" die allgemeinere Lückenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)$ mit $P_n(z) = \sum_{h=s_n}^{r_{n+1}} f_h \cdot z^h$, $f_h \neq 0$ und ganze rationale Zahlen und

$$0 \leq s_0 \leq r_1 < s_1 \leq r_2 < s_2 \leq r_3 < s_3 \leq \ldots\,, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{s_n}{r_n} = +\infty$$

untersucht und eine notwendige und hinreichende Bedingung gegeben, die ausdrückt, dass diese Reihe transzendente Werte für algebraische Argumente annimmt. Später hatte E. Braune (1977), unter Verwendung der Mahlerschen Ideen, in seiner Arbeit mit dem Titel "Über arithmetische Eigenschaften von Lückenreihen mit algebraischen Koeffizienten und algebraischem Argument" einige Ergebnisse erzielt. Nach einer von diesen Ergebnissen sind die Werte der oben erwähnten Reihe für im inneren des Konvergenzkreises liegende rationale Argumente keine (Mahlersche) S-Zahl. Andererseits hatte LeVeque [5] in 1953 bewiesen, dass die U_m-Unterklassen ($m = 1, 2, \dots$) in der Mahlerschen Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen nicht leer sind. K. Almaçık hat 1978 in seiner noch nicht veröffentlichten Dissertation [1] unter Verwendung der LeVequeschen Ideen bewiesen, dass eine rationale Funktion einer Liouvilleschen Zahl mit algebraischen Koeffizienten unter gewissen Bedingungen zu einer passenden U_m-Klasse gehört. Im Jahre 1979 hat M. H. Oryan in seiner noch nicht veröffentlichten Dissertation [8] mit Hilfe der Arbeiten von LeVeque und K. Almaçık gezeigt, dass eine ganze Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot z^n$, $c_n \neq 0$ $(n = 0, 1, \dots)$ mit rationalen Koeffizienten für von Null verschiedene algebraische Argumente vom Grade m unter gewissen Bedingungen Werte aus der Unterklasse U_m annimmt. Er hat dann diese Ergebnisse auf ganze Funktionen mit algebraischen Koeffizienten verallgemeinert und auf Potenzreihen mit Koeffizienten aus dem Henselschen p-adischen Körper übertragen.

In der vorliegenden Arbeit werden ähnliche Ergebnisse für die von H. Cohn betrachtete Lückenreihe erzielt. Auf diese Weise wird das Analogon der von M. H. Oryan gegebenen Ergebnisse für keine Lücke enthaltende Potenzreihen mit unendlichem Konvergenzradius, für Potenzreihen mit eventuell endlichem Konvergenzradius, aber dafür mit Lücken gegeben. Genauer : In Lückenreihen $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i} \cdot z^{n_i}$, mit einem positiven Konvergenzradius: a) Die Werte $F(\alpha)$ von $F(z)$ gehören zu U_m, wobei $z = \alpha$ eine von Null verschiedene algebraische Zahl von Grade m bedeutet, wenn die Bedingungen 1) die Koeffizienten c_{n_i} sind von Null verschiedene rationale Zahlen, 2) $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{n_{i+1}}{n_i} = +\infty$ und 3) $\lim\limits_{i \to \infty} \dfrac{\log A_{n_i}}{n_i} = +\infty$ mit $A_{n_i} = [a_{n_0}, \dots, a_{n_i}]$ [1] erfüllt werden (§2, Satz 1). b) Unter gewissen Bedingungen gehören die Werte $F(\alpha)$ zu U_m an, wobei α eine rationale Zahl ist, wenn c_{n_i} Elemente ($\neq 0$) eines algebraischen Zahlkörpers K vom Grade m sind (§ 2, Satz 2). Dann werden die Ergebnisse in a) und b) auf eine Lückenreihe mit Koeffizienten aus dem Henselchen p-adischen Körper übertragen und es wird gezeigt, dass die hiesigen Funktionswerte zu der p-adischen U_m-Unterklasse [2] gehören (§3, Satz 1 und 2).

[1] Dabei bedeutet $[a_{n_0}, \dots, a_{n_i}]$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $a_{n_0}, \dots, a_{n_i}$, wo $c_{n_i} = \dfrac{b_{n_i}}{a_{n_i}}$ $(a_{n_i}, b_{n_i} \in \mathbf{Z}\,;\, i = 0, 1, \dots)$ ist.

[2] Siehe [6].

Der Beweisplan der Sätze 1 und 2 vom §2 ist folgender :

Es ist bekannt, dass die Klassen A, S, T, U der Mahlerschen Klasseneinteilung [3] identisch mit den Klassen A^*, S^*, T^*, U^* der Klassifikation von Koksma [3] sind und weiter $U_m = U_m^*$ ist, wobei m irgendeine natürliche Zahl bedeutet [4]. Daher handelt es sich um die U_m^*-Klassen in der oben erwähnten Sätze und es wird gezeigt, dass die Zahl $\xi = F(\alpha)$ zu U_m^* angehört. Nach der Definition ist : $\xi = F(\alpha) \in U_m^* \Leftrightarrow \mu^*(\xi) = m$. Um die letzte Gleichung zu verifizieren, müssen wir folgende zwei Bedingungen betrachten. Nämlich : Gelten für die Zahl ξ und unendlich viele algebraische Zahlen η_n vom Grade m die Ungleichungen

$$0 < |\xi - \eta_n| \leq C \,.\, H(\eta_n)^{-\omega^*(n)}\,, \lim_{n\to\infty} \omega^*(n) = +\infty \qquad (A^*)$$

und wird ausserdem für alle algebraischen Zahlen β, deren Grade kleiner als m sind,

$$|\xi - \beta| > c' \,.\, H(\beta)^{-s}\,, \qquad (B^*)$$

so gilt

$$\mu^*(\xi) = m\,.$$

Dabei sind c' und s von der Höhe von β unabhängige positive Konstanten.

(Beweis. Aus (A^*) ergeben sich

$$W_m^*(H_n, \xi) = \underset{\eta_n^\circ \leq m}{\mathrm{Min}} \; |\xi - \eta_n| \leq \frac{c}{H_n^{\omega^*(n)}}\,, \lim_{n\to\infty} \omega^*(n) = +\infty$$

die Höhe von $\eta_n \leq H_n$

$\eta_n \neq \xi$

und

$$\frac{\log \dfrac{1}{H_n \,.\, W_m^*(H_n, \xi)}}{\log H_n} \geq \frac{\log \dfrac{1}{c}}{\log H_n} + [\omega^*(n) + 1]\,.$$

Die rechte Seite strebt für $H_n \to +\infty$ gegen $+\infty$, d.h. $W_m^* = +\infty$. Dann ist $m \geq \mu^*$. Aus (B^*) folgt

$$W_{m-1}^*(H_n, \xi) > \frac{c'}{H(\beta)^s}\,,$$

woraus lässt sich

[3] Siehe [9], Kapitel 3.

[4] Siehe [11].

$$\frac{\log \dfrac{1}{H \, . \, W^*_{m-1}(H, \xi)}}{\log H} < \frac{\log \dfrac{1}{c'}}{\log H} + (s-1)$$

schreiben. Die rechte Seite strebt gegen $(s-1)$ für $H \to \infty$, d.h. $W^*_{m-1} < +\infty$. Daraus bekommt man $\mu^* \geq m$).

Der Beweisplan der Sätze 1 und 2 vom § 3 ist folgender :

Hier handelt es sich direkt um die Unterklasse U_m in der p-adischen Mahlerschen Klasseneinteilung. Wegen der Definition ist : $\xi = F(\alpha) \in U_m \Leftrightarrow \mu(\xi) = m$. Daher wollen wir folgende zwei Bedingungen zeigen: Wenn für die p-adische Zahl ξ und die unendlich viele Polynome $P_n(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten

$$0 < | P_n(\xi) |_p \leq c \, . \, H(P_n)^{-\omega(n)} , \ \lim_{n \to \infty} \omega(n) = +\infty \tag{A}$$

gilt, und für alle Polynome $P(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, deren Grade kleiner als m sind,

$$| P(\xi) |_p > c' \, . \, H(P)^{-s} \tag{B}$$

ist, so gilt

$$\mu(\xi) = m \, .$$

Dabei sind c' und s von der Höhe von $P(x)$ unabhängige positive Konstanten (Der Beweis wird wie oben geführt).

§ 2. LÜCKENREIHEN IM KOMPLEXEN GEBIET

Zunächst wollen wir einige Hilfssätze angeben, die bei den Beweisen der in diesem Paragraphen gegebenen Sätzen benutzt werden.

Hilfssatz 1. Es seien α_j $(j = 1, \ldots, k; k \geq 1)$ aus einem bestimmten algebraischen Zahlkörper K vom Grad g entnommen und die Höhen derselben mit $H(\alpha_j)$ bezeichnet.

Es sei ferner η eine weitere algebraische Zahl, die von α_j $(j = 1, \ldots, k)$ durch die Relation

$$F(\eta, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) = 0$$

abhängt, wobei $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Zahlenkoeffizienten in seinen sämtlichen Argumenten bedeutet.

Es sei ausserdem der Grad von $F(y, x_1, \ldots, x_k)$ nach y mindestens 1.

Dann ist der Grad von $\eta \leq dg$ und es gilt für die Höhe $H(\eta)$ von η folgende Abschätzung :

$$H(\eta) \leq 3^{2dg+(l_1+\dots+l_k)g} \cdot H^g \cdot H(\alpha_1)^{l_1 g} \dots H(\alpha_k)^{l_k g} . \tag{1}$$

Dabei bedeutet d den Grad von $F(y, x_1, \dots, x_k)$ nach y, l_j den Grad desselben nach x_j $(j = 1, \dots, k)$ und H das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten von $F(y, x_1, \dots, x_k)$.

Beweis. Siehe [4].

Hilfssatz 2. Es seien α_1, α_2 zwei algebraische und zueinander konjugierte Zahlen, h ihre Höhe und n ihr Grad. Dann gilt

$$|\alpha_1 - \alpha_2| > (4n)^{-(n-2)/2} \cdot \{(n+1)\,h\}^{-(2n-1)/2} . \tag{2}$$

Beweis. Siehe [3].

Hilfssatz 3. Es seien γ, δ zwei algebraische Zahlen mit den jeweiligen Graden n_1, n_2 und den jeweiligen Höhen h_1, h_2. Dann gilt

$$|\gamma - \delta| > \frac{1}{2^{\mathrm{Max}\,(n_1, n_2)-1} \cdot ((n_1+1)\,h_1)^{n_2} \cdot ((n_2+1)\,h_2)^{n_1}} . \tag{3}$$

Beweis. Siehe [3].

Satz 1. Wir betrachten die Lückenreihe

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i} \cdot z^{n_i} \quad \left(c_{n_i} = \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} ;\ b_{n_i}, a_{n_i} \text{ ganz rational, } b_{n_i} \neq 0 \text{ und } a_{n_i} \geq 1 \right) \tag{4}$$

unter folgenden Bedingungen

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = +\infty , \tag{5}$$

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{\log A_{n_i}}{n_i} < +\infty \quad (A_{n_i} = [a_{n_0}, \dots, a_{n_i}]) , \tag{6}$$

und wir setzen voraus, dass der Konvergenzradius R_F dieser Reihe positiv ist. Es sei zugleich α eine algebraische Zahl vom Grade m, die die Bedingung $0 < \overline{|\alpha|} < R_F$ erfüllt und deren Konjugierten dem Absolutbetrage nach voneinander sämtlich verschieden sind. Dann gilt : $F(\alpha) \in U_m$.

Beweis. α sei eine algebraische Zahl, die den Ungleichungen $0 < \overline{|\alpha|} < R_F$ genügt und deren Konjugierten mit sämtlich verschiedenem Absolutbetrag sind. Wir bezeichnen ihre Höhe mit $H(\alpha)$ und wir bedienen uns der Abkürzung ξ für $F(\alpha)$. Dann lassen sich

$$\xi = \eta_{n_k} + r_{n_k}, \tag{7}$$

$$\eta_{n_k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \cdot \alpha^{n_i}, \tag{8}$$

$$r_{n_k} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \cdot \alpha^{n_i} \tag{9}$$

schreiben. Andererseits folgt aus (6) : $[a_{n_0} \cdot \ldots , a_{n_i}] \leq A^{n_i}$, wobei A eine von n unabhängige positive Konstante ist. Multiplizieren wir die beiden Seiten von (8) mit A_{n_k}, so erhalten wir die Gleichung

$$P(\eta_{n_k}, \alpha) : = A_{n_k} \cdot \eta_{n_k} - A_{n_k} \cdot \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} \cdot \alpha^{n_0} - \ldots - A_{n_k} \cdot \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \cdot \alpha^{n_k} = 0,$$

wobei die Koeffizienten von η_{n_k} und α^{n_i} $(i = 0, \ldots , k)$ ganze rationale Zahlen sind. Wenden wir den Hilfssatz 1 von §1 auf die Relation $P(\eta_{n_k}, \alpha) = 0$ an : Ist H die Höhe von $P(y, x)$, so ist nach der Cauchyschen Ungleichung

$| c_{n_i} | \leq \frac{M}{\rho^{n_i}} \left(|\alpha| < \rho < R_F, \rho = \frac{|\alpha| + R_F}{2} \right.$[5], M bezeichnet das Maximum der auf $| z | = \rho$ angenommenen Werte von $\left. | F(z) | \right)$. Hieraus ergibt sich

$$H \leq \begin{cases} M \cdot \left(\frac{A}{\rho}\right)^{n_k}, & \text{falls } \rho < 1 \\ M \cdot A^{n_k} & \text{, falls } \rho \geq 1 \end{cases},$$

woraus man

$$H \leq M \cdot B^{n_k}$$

mit $\operatorname{Max}\left(\frac{A}{\rho}, A\right) = B$ erhält. Andererseits, da $[Q(\alpha) : Q] = m$ ist, ist $g = m$. Ferner sind $l = n_k$, $d = 1$. Dann kann man eine obere Abschätzung der Höhe $H(\eta_{n_k})$ von η_{n_k} mit Max $(1, M) = M_1$ in der Form

$$\begin{aligned} H(\eta_{n_k}) &\leq 3^{2m + n_k \cdot m} \cdot M_1^{\ m} \cdot B^{n_k \cdot m} \cdot [H(\alpha)]^{n_k \cdot m} \\ &\leq 3^{4n_k \cdot m} \cdot M_1^{\ n_k \cdot m} \cdot B^{n_k \cdot m} \cdot [H(\alpha)]^{n_k \cdot m} \end{aligned} \tag{10}$$

schreiben. Aus (10) folgt mit $3^{4m} \cdot (M_1 B)^m \cdot H(\alpha)^m = c_0$

---

[5] Ist $R_F = + \infty$, so lässt sich eine beliebige Zahl, die der Bedingung $\rho > |\alpha|$ genügt, als ρ nehmen.

$$H(\eta_{n_k}) \leq c_0^{\,n_k}, \tag{11}$$

wobei c_0 eine von α abhängige, aber von n unabhängige positive reelle Zahl ist. Es ist sogar $c_0 > 1$.

Jetzt zeigen wir die Ungleichung (A^*) von §1. Dazu wollen wir $|\xi - \eta_{n_k}| = |r_{n_k}|$ nach oben abschätzen.

Wegen (9), $\overline{|\alpha|} < \rho < R_F$ und $\left|\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}\right| \leq \frac{M}{\rho^{n_k}}$ ist

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \left|\frac{b_{n_i}}{a_{n_i}}\right| . |\alpha|^{n_i} \leq \frac{M}{\rho^{n_{k+1}}} . \overline{|\alpha|}^{n_{k+1}} . \left[1 + \frac{\overline{|\alpha|}}{\rho} + \frac{\overline{|\alpha|}^2}{\rho^2} + \ldots\right]$$

$$= \left(\frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}\right)^{n_{k+1}} . M . \frac{1}{1 - \frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}}.$$

Die letzte Ungleichung lässt sich mit $M . \frac{1}{1 - \frac{\overline{|\alpha|}}{\rho}} = c_1$ ($c_1 = c_1(\alpha) > 0$) und $\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}} = c_2$ ($c_2 = c_2(\alpha) > 1$) in der Form

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \frac{c_1}{c_2^{\,n_{k+1}}} \tag{12}$$

schreiben. Aus (12) folgt mit Berücksichtigung von (11)

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \frac{c_1}{(e^{n_k . \log c_0})^{\frac{n_{k+1} . \log c_2}{n_k . \log c_0}}} \leq \frac{c_1}{H(\eta_{n_k})^{\frac{n_{k+1}}{n_k} . c_3}},$$

wobei

$$\frac{\log c_2}{\log c_0} = c_3 \quad (c_3 > 0) \tag{13}$$

gesetzt wurde, d.h.

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \frac{c_1}{H(\eta_{n_k})^{\frac{n_{k+1}}{n_k} . c_3}}, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} c_3 = +\infty. \tag{14}$$

Nun betrachten wir wieder η_{n_k}, die durch (8) gegeben ist. Im Falle $m = 1$ ist der Grad von η_{n_k} gleich m. Im Falle $m > 1$ sind alle Körperkonjugierten von η_{n_k} in bezug auf $Q(\alpha)$ nach einer bestimmten Stelle ab voneinander verschieden. Dadurch ist der Grad von η_{n_k} gleich m. Die erste Behauptung ist klar. Um die zweite Behauptung zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle: Für ein festes Paar (i, j) $(i \neq j)$:

a) von einer bestimmten Stelle an folgt aus $\eta_{n_k}^{(i)} \neq \eta_{n_k}^{(j)}$ die Ungleichung $\eta_{n_{k+1}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k+1}}^{(j)}$,

b) für jede Zahl n_k ist mindestens eine der beiden Ungleichungen $\eta_{n_k}^{(i)} \neq \eta_{n_k}^{(j)}$ und $\eta_{n_{k+1}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k+1}}^{(j)}$ richtig.

Zu a). Aus

$$\left.\begin{aligned} \eta_{n_{k+1}}^{(i)} &= \eta_{n_k}^{(i)} + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot (\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} \\ \eta_{n_{k+1}}^{(j)} &= \eta_{n_k}^{(j)} + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

gewinnt man

$$\left|\eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)}\right| \geq \left|\eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)}\right| - \left|\frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}}\right| \cdot \left|(\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} - (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}}\right|. \tag{16}$$

Bezeichnen wir den Grad von η_{n_k} mit ν. Dann ist $\nu \leq m$. Betrachten wir den Hilfssatz 2 vom § 1, so erhalten wir unter der Voraussetzung $\eta_{n_k}^{(i)} \neq \eta_{n_k}^{(j)}$

$$\left|\eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)}\right| \geq \frac{c_4}{H(\eta_{n_k})^{\frac{2m-1}{2}}} \tag{17}$$

mit $\dfrac{1}{(4m)^{(m-2)/2} \cdot (m+1)^{(2m-1)/2}} = c_4$. Aus (11) und (17) folgert man

$$\left|\eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)}\right| \geq \frac{c_4}{c_0^{\frac{2m-1}{2} \cdot n_k}}. \tag{18}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von (16) lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}}\right| \cdot \left|(\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} - (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}}\right| &\leq \left|\frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}}\right| \cdot 2\,\overline{|\alpha|}^{n_{k+1}} \\ &\leq \frac{2M}{\rho^{n_{k+1}}} \cdot \overline{|\alpha|}^{n_{k+1}} \end{aligned} \tag{19}$$

nach oben abschätzen. Es lässt sich (16) mit Hilfe von (18) und (19) als

$$\left|\eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)}\right| \geq \frac{c_4}{c_0^{\frac{2m-1}{2} \cdot n_k}} - \frac{2M}{\left(\frac{\rho}{\overline{|\alpha|}}\right)^{n_{k+1}}} \tag{20}$$

schreiben. Da $\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$ ist, können wir jetzt behaupten, dass mit einer passenden Zahl k_0 folgendes gilt :

$$\frac{2M}{\left(\frac{\rho}{|\alpha|}\right)^{n_{k+1}}} < \frac{c_4}{c_0^{\frac{2m-1}{2}\cdot n_k}} \quad \text{für } k > k_0 \tag{21}$$

(Denn (21) ist der Ungleichung

$$\log 2M - n_{k+1} \cdot \log\left(\frac{\rho}{|\alpha|}\right) < \log c_4 - \frac{2m-1}{2} \cdot n_k \log c_0$$

äquivalent. Dividieren wir die letzte Ungleichung durch n_k, so erhalten wir

$$\frac{2m-1}{2} \cdot \log c_0 + \frac{\log 2M}{n_k} < \frac{\log c_4}{n_k} + \frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \log\left(\frac{\rho}{|\alpha|}\right).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung strebt, wegen $\frac{\rho}{|\alpha|} > 0$, gegen $\frac{2m-1}{2} \cdot \log c_0$ für $k \to \infty$, die rechte Seite derselben strebt gegen $+\infty$ für $k \to \infty$. Damit ist (21) bewiesen).

Aus (20) und (21) ergibt sich nun die Behauptung a).

Zu b). Wir setzen voraus, dass sowohl $\eta^{(i)}_{n_k} = \eta^{(j)}_{n_k}$ als auch $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} = \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$ sind. Aus (15) folgt dann

$$(\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} = (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}} .$$

Hieraus, durch Übergang zu den absoluten Beträgen und Bildung der n_{k+1}-ten positiven Wurzel, ergibt sich

$$|\alpha^{(i)}| = |\alpha^{(j)}| ,$$

was nun der für α gegebenen Hypothese des Satzes widerspricht. Damit ist auch die Behauptung b) bewiesen.

Nun vereinigen wir a) und b). Ist $\eta^{(i)}_{n_{k^*}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k^*}}$, so ist wegen a) $\eta^{(i)}_{n_{k^*+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k^*+1}}$. Wenn $\eta^{(i)}_{n_{k^*}} = \eta^{(j)}_{n_{k^*}}$ ist, ist wegen b) $\eta^{(i)}_{n_{k^*+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k^*+1}}$. Also für $k \geq k^* + 1$ und ein beliebiges Paar i, j ist $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$, weil k^* offenbar von i, j unabhängig ist. Oder anders ausgedrückt : der Grad von η_{n_k} wird für $k \geq k^* + 1$ gleich m, weil alle Körperkonjugierten von η_{n_k} voneinander verschieden sind. Der Grad von η_{n_k} ist also für $k \geq k^*$ gleih m. Nun wollen wir zeigen, dass wir aus der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ eine unendliche Teilfolge herausgreifen können, deren Glieder vom m. Grad und voneinander und von ξ verschieden sind: Weil α und $\frac{b_{n_k}}{a_{n_k}}$

von Null verschieden sind, ist $\eta_{n_{k+1}} \neq \eta_{n_k}$. In der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ gibt es dann wenigstens zwei Gliedern, die voneinander verschieden sind. Wenn die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ endlich viele voneinander verschiedene Glieder hätte, würde sich eine positive untere Schranke der Zahlenfolge $\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}|\}$ geben (Wären die verschiedenen Werte $u_1, \ldots, u_t \, (t \geq 2)$, so würde diese untere Schranke gleich $\underset{\substack{r,s=1\\ r\neq s}}{\overset{t}{\mathrm{Min}}} |u_r - u_s|$, was nicht möglich ist. Denn man kann die Differenz $|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}| = \left| \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot \alpha^{n_{k+1}} \right|$ beliebig klein machen, weil die rechte Seite das allgemeine Glied einer konvergierenden Reihe ist). Danach enthält die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ unendlich viele voneinander verschiedene Glieder.

Die Höhenfolge $H(\eta_{n_k})$ dieser letzten Folge ist nach oben unbeschränkt. Sonst enthielte die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ nur endlich viele voneinander verschiedene Glieder, weil die Grade von η_{n_k} kleiner als oder gleich m sind. Nun wählen wir eine Teilfolge, die streng monoton gegen $+\infty$ strebt. Alle Glieder der entsprechenden Teilfolge $\{\eta_{n_{k_j}}\}$ sind voneinander verschieden und höchstens eins dieser Glieder kann gleich ξ sein. Man kann aus dieser Folge durch Weglassung endlich vieler Glieder eine neue Folge herleiten, so dass alle Zahlen $\eta_{n_{k_j}}$ der neuen Folge von m. Grad und von ξ und voneinander verschieden sind. Hierzu genügt $k_j > k^*$ und eventuell $k_j > k'$, falls $\eta_{k'} = \xi$, zu nehmen.

Ferner strebt die Folge $\{H(\eta_{n_{k_j}})\}$ monoton gegen $+\infty$, und unter Mitberücksichtigung von (14) die folgende Annäherung gilt :

$$0 < |\xi - \eta_{n_{k_j}}| \leq \frac{c_1}{H(\eta_{n_{k_j}})^{\frac{n_{k_{j+1}}}{n_{k_j}} \cdot c_3}} . \tag{22}$$

Dabei sind die Grade von $\eta_{n_{k_j}}$ gleich m. Nennt man $\frac{n_{k+1}}{n_k} = s_k$, so wird $\frac{n_{k_{j+1}}}{n_{k_j}} = s_{k_j}$.

Die obige Ungleichung kann man in der Form

$$0 < |\xi - \eta_{n_{k_j}}| < \frac{c_1}{H(\eta_{n_{k_j}})^{s_{k_j} \cdot c_3}} \tag{23}$$

schreiben. Da $c_3 > 0$ ist und $s_k \to \infty$, gilt $s_k \cdot c_3 \to +\infty$. Es muss also $\xi \in U_1 \cup \ldots \cup U_m$, d.h.

$$\mu^*(\xi) \leq m . \tag{24}$$

a) Ist $m = 1$, so ist immer $\mu^*(\xi) \geq 1$. Wenn wir auch (24) betrachten, erhalten wir

$$\mu^*(\xi) = 1 .$$

b) Nun wollen wir die Relation (B^*) von §1 für alle algebraischen Zahlen β zeigen, deren Grade kleiner als m sind. Dazu fassen wir die Ungleichung

$$|\xi - \beta| = |(\eta_{n_l} - \beta) + (\xi - \eta_{n_l})| \geq |\eta_{n_l} - \beta| - |\eta_{n_l} - \xi| \tag{25}$$

ins Auge: Wir wollen eine untere Schranke für den Ausdruck $|\eta_{n_l} - \beta|$ und eine obere Schranke für $|\eta_{n_l} - \xi|$ finden. Es sei die Höhe von η_{n_l} mit $H(\eta_{n_l})$ bezeichnet. Der Grad von η_{n_l} war für $l \geq k^* + 1$ gleich m. $H(\beta)$ und t seien die Höhe von β und der Grad desselben. Für t gilt die Ungleichung $1 \leq t \leq m-1$. Aus Hilfssatz 3 folgt

$$|\eta_{n_l} - \beta| \geq \frac{c_5}{H(\beta)^m \,.\, H(\eta_{n_l})^{m-1}}, \quad c_5 = 2^{1-m} \,.\, m^{-m} \,.\, (m+1)^{1-m}, \tag{26}$$

wobei c_5, wie man sieht, eine von $H(\beta)$ unabhängige Konstante ist. Die Relation (25), wegen (11), (12) und (24), kann man als

$$|\xi - \beta| \geq \frac{c_5}{H(\beta)^m \,.\, c_0^{(m-1)n_l}} - \frac{c_1}{c_2^{n_{l+1}}} \tag{27}$$

schreiben. Aus (27), mit Berücksichtigung von (13), ergibt sich

$$|\xi - \beta| \geq \frac{c_5}{H(\beta)^m \,.\, c_0^{(m-1)n_l}} - \frac{c_1}{c_0^{c_3 . n_{l+1}}} . \tag{28}$$

Es sei $H(\beta)$ gegeben. Betrachten wir die Doppelungleichung

$$c_0^{n_k} \leq H(\beta) < c_0^{n_{k+1}} . \tag{29}$$

Die Zahl n_k, die (29) genügt, ist eindeutig bestimmt, weil die Zahlen $c_0^{n_k}$ im engeren Sinne monoton wachsen. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $H(\beta)$ zum ersten oder zum zweiten der folgenden Teilintervallen gehört :

1) $$c_0^{n_k} \leq H(\beta) < c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}}$$

2) $$c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}} \leq H(\beta) < c_0^{n_{k+1}} .$$

Dabei ist $\lambda > 1$ eine später zu erklärende natürliche Zahl.

Im Falle 1). Es sei abkürzend $H(\beta) = H$ gesetzt. Gehen wir mit $l = k$ ($k \geq k^* + 1$) in (28) ein, so wird diese Ungleichung unter Benutzung von 1) zu

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5}{H(\beta)^{2m-1}} - \frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \cdot \lambda}}. \tag{30}$$

Wenn die Zahl λ so gewählt wird, dass sie der Ungleichung

$$\lambda > \frac{2m-1}{c_3} \tag{31}$$

genügt, wird

$$\frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \lambda}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{c_5}{H(\beta)^{2m-1}}$$

für $H > H_1$, d.h. es gilt

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5/2}{H(\beta)^{2m-1}} \tag{32}$$

für $H(\beta) > H_1$.

Im Falle 2). Gehen wir mit $l = k + 1$ ($k \geq k^* + 1$) in (28) ein. Dann gilt unter Benutzung von 2) in (28):

$$\begin{aligned} |\xi - \beta| &\geq \frac{c_5}{H(\beta)^m \cdot c_0^{(m-1)\, n_{k+1}}} - \frac{c_1}{c_0^{c_3 \cdot n_{k+2}}} \\ &> \frac{c_5}{H(\beta)^m \cdot H(\beta)^{\lambda(m-1)}} - \frac{c_1}{c_0^{c_3 \cdot n_{k+2}}}. \end{aligned} \tag{33}$$

Aus (5) folgt

$$\frac{n_{k+2}}{n_{k+1}} > \mu \quad (k > k^{**}) \tag{34}$$

für eine hinreichend grosse Zahl k^{**}. Dabei ist μ eine positive Zahl, deren Wert später erklärt werden wird. Aus (33) und (34) ergibt sich

$$\begin{aligned} |\xi - \beta| &> \frac{c_5}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}} - \frac{c_1}{c_0^{c_3 \cdot \mu \cdot n_{k+1}}} \\ &> \frac{c_5}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}} - \frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \cdot \mu}} \end{aligned} \tag{35}$$

für $k > k^{***}$ mit $k^{***} = \text{Max}\,(k^* + 1, k^{**})$. Nun wählen wir die Zahl μ so, dass

$$\mu > \frac{m + \lambda\,(m-1)}{c_3} \tag{36}$$

erfüllt ist. Für $H > H_2$ gilt

$$\frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 u}} < \frac{c_5/2}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}},$$

wobei H_2 eine passend gross gewählte positive Zahl ist, und (35) gibt uns die folgende Ungleichung :

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5/2}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}}. \tag{37}$$

Nun vereinigen wir 1) und 2) : Es sei $c_0^{\,nk^{***}} = H_0$. Nimmt man $H > H_0$, so wird $k \geq k^{***}$. Für genügend grosse Zahlen H und $H(\beta) > \operatorname{Max}(H_0, H_1, H_2)$ erhält man

$$|\xi - \beta| > \frac{c_6}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}} \tag{38}$$

mit $\frac{c_5}{2} = c_6$.

Somit ist die Relation (B^*) gezeigt worden, d.h.

$$\mu^*(\xi) \geq m. \tag{39}$$

Aus (22) und (39) folgt nun $\mu^*(\xi) = m$. Mit anderen Worten ist $\xi \in U_m^*$, d.h. $\xi \in U_m$.

Satz 2. Wir betrachten die Lückenreihe

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_{n_i} . z^{n_i} \tag{40}$$

mit algebraischen Koeffizienten aus einem festen Zahlkörper unter folgenden Bedingungen :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = +\infty \tag{41}$$

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \frac{\log h_{n_i}}{n_i} < +\infty \qquad (h_{n_i} = H(\gamma_{n_i})). \tag{42}$$

Mit m bezeichnen wir den Grad des algebraischen Zahlkörpers

$$K = Q(\gamma_{n_0}, \gamma_{n_1}, \ldots, \gamma_{n_i}, \ldots)$$

über Q (Körper der rationalen Zahlen) und wir setzen voraus, dass unendlich viele Zahlen unter den algebraischen Zahlen γ_{n_i} existieren, deren Grade gleich m sind. Es sei ferner der Konvergenzradius R der Reihe $\sum h_{n_i} . z^{n_i}$ positiv. Dann ist $F(r) \in U_m$ für $z = r \in Q$, die die Bedingung $0 < |r| < R$ erfüllt.

Beweis. Die Reihe (40) konvergiert für $z=r$, weil die Relation $\overline{|\gamma_{n_i}|} < 2 h_{n_i}$ gilt. Wir bilden $F(r) = \xi$, wobei $z = r = \dfrac{b}{a}$ $(a, b \in Z\,;\, a \geq 1)$ ist. Wir haben

$$\xi = \eta_{n_k} + r_{n_k} \tag{43}$$

mit

$$\eta_{n_k} = \sum_{i=0}^{k} \gamma_{n_i} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_i}, \tag{44}$$

$$r_{n_k} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \gamma_{n_i} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_i}. \tag{45}$$

Multiplizieren wir die beiden Seiten von (44) mit a^{n_k}, so erhalten wir die Gleichung

$$P(\eta_{n_k}, \gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_k}) := a^{n_k} \cdot \eta_{n_k} - a^{n_k} \cdot \gamma_{n_0} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_0} - \ldots - a^{n_k} \cdot \gamma_{n_k} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_k} = 0\,.$$

Dabei sind die Koeffizienten von P nach $\eta_{n_k}, \gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_k}$ ganze rationale Zahlen. Wenden wir den Hilfsatz 1 vom § 2 auf die Relation $P(\eta_{n_k}, \gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_k}) = 0$ an, so bekommen wir - wenn wir die Höhe von P mit H bezeichnen-

$$H \leq a^{n_k} \cdot |b|^{n_k},$$

woraus man

$$H \leq A^{n_k} \tag{46}$$

mit $a \cdot |b| = A$ erhält. Aus (42) folgt

$$h_{n_i} = H(\gamma_{n_i}) \leq B^{n_i} \quad (i = 0, 1, \ldots), \tag{47}$$

wobei B eine passende, von n_i unabhängige positive reelle Zahl ist. Dann mit Berücksichtigung von (46) und (47) erhält man folgende obere Abschätzung für die Höhe $H(\eta_{n_k})$:

$$\begin{aligned} H(\eta_{n_k}) &\leq 3^{2m+(k+1)m} \cdot A^{n_k \cdot m} \cdot H(\gamma_{n_0})^m \ldots H(\gamma_{n_k})^m \\ &\leq 3^{4n_k \cdot m} \cdot A^{n_k \cdot m} \cdot (B^{n_0})^m \ldots (B^{n_k})^m \\ &= 3^{4n_k \cdot m} \cdot A^{n_k \cdot m} \cdot B^{(n_0+\cdots+n_k)m}\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Wegen der Relation (41) ist $\dfrac{n_k}{n_{k-1}} > 2$ für $k > k^*$ mit einer passenden natürlichen Zahl k^*. Hieraus ergibt sich $\sum_{j=0}^{k} n_j < 2n_k$ (für $k > k^*$). Aus (48) folgt

$$H(\eta_{n_k}) \leq c_0^{n_k} \qquad (\text{für } k > k^*) \tag{49}$$

mit $B^{n_0+\dots+n_{k^*}-1} \,.\, 3^{4m} \,.\, A^m \,.\, B^{2m} = c_0\,(>1)$.

Um die Ungleichung (A^*) von § 1 zu zeigen, wollen wir $|\xi - \eta_{n_k}| = |r_{n_k}|$ nach oben abschätzen. Wegen (45), $|r| < \rho < R$ $\left(\rho = \frac{|r| + R}{2}\right)$[6] und $|\gamma_{n_i}| \leq \frac{M}{\rho^{n_i}}$ (M bezeichnet das Maximum der auf $|z| = \rho$ angenommenen Werte von $|F(z)|$) ist

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |\gamma_{n_i}| \,.\, |r|^{n_i} \leq \frac{M}{\rho^{n_{k+1}}} \,.\, |r|^{n_{k+1}} \,.\, \left[1 + \frac{|r|}{\rho} + \frac{|r|^2}{\rho^2} + \dots\right]$$

$$\leq \left(\frac{|r|}{\rho}\right)^{n_{k+1}} \,.\, M \,.\, \frac{1}{1 - \frac{|r|}{\rho}} \,.$$

Die letzte Ungleichung lässt sich mit $M \,.\, \frac{1}{1 - \frac{|r|}{\rho}} = c_1$ ($c_1 = c_1(r) > 0$) und $\frac{\rho}{|r|} = c_2$ ($c_2 = c_2(r) > 1$) in der Form

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \frac{c_1}{c_2^{n_{k+1}}} \tag{50}$$

schreiben. Aus (50) folgt mit Berücksichtigung von (49)

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \frac{c_1}{H(\eta_{n_k})^{\frac{n_{k+1}}{n_k} \,.\, c_3}} \qquad (\text{für } k > k^*)\,,$$

wobei

$$\frac{\log c_2}{\log c_0} = c_3\,(c_3 > 0) \tag{51}$$

gesetzt wurde, d.h. man erhält

$$|\xi - \eta_{n_k}| \leq \frac{c_1}{H(\eta_{n_k})^{\frac{n_{k+1}}{n_k} \,.\, c_3}}\,, \tag{52}$$

wobei

[6] Ist $R = +\infty$, so lässt sich eine beliebige Zahl, die der Bedingung $\rho > |r|$ genügt, als ρ nehmen.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot c_3 = +\infty$$

ist.

Nun betrachten wir wieder η_{n_k}, die durch (44) gegeben ist.

Ist $m = 1$, so ist der Grad von η_{n_k} immer gleich m. Im Falle $m > 1$ sind alle Körperkonjugierten von η_{n_k} in bezug auf $Q(\gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_i}, \ldots)$ nach einer bestimmten Stelle ab voneinander verschieden; daher ist auch in diesem Falle der Grad von η_{n_k} gleich m. Die erste Behauptung ist klar. Um die zweite Behauptung zu beweisen, bemerken wir zweierlei. Es gelten für ein festes Paar (i, j) $(i \neq j)$:

a) Von einer bestimmten Stelle an, folgt aus $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$ die Ungleichung $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$.

b) Wie gross die natürliche Zahl N auch gewählt wird, gibt es immer ein n_k, so dass mindestens eine der beiden Ungleichungen $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$ und $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$ richtig ist.

Zu a). Aus

$$\left.\begin{aligned} \eta^{(i)}_{n_{k+1}} &= \eta^{(i)}_{n_k} + \gamma^{(i)}_{n_{k+1}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_{k+1}} \\ \eta^{(j)}_{n_{k+1}} &= \eta^{(j)}_{n_k} + \gamma^{(j)}_{n_{k+1}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

gewinnt man

$$\left|\eta^{(i)}_{n_{k+1}} - \eta^{(j)}_{n_{k+1}}\right| \geq \left|\eta^{(i)}_{n_k} - \eta^{(j)}_{n_k}\right| - \left|\frac{b}{a}\right|^{n_{k+1}} \cdot \left|\gamma^{(i)}_{n_{k+1}} - \gamma^{(j)}_{n_{k+1}}\right|. \tag{54}$$

Bezeichnen wir den Grad von η_{n_k} mit ν. Also ist $\nu \leq m$. Mit Benutzung des Hilfssatzes 2 vom § 1 erhalten wir

$$\left|\eta^{(i)}_{n_k} - \eta^{(j)}_{n_k}\right| \geq \frac{c_4}{H(\eta_{n_k})^{\frac{2m-1}{2}}}, \tag{55}$$

wobei $\dfrac{1}{(4m)^{(m-2)/2} \cdot (m+1)^{(2m-1)/4}} = c_4$ gesetzt wurde.

Aus (49) und (55) folgert man

$$\left|\eta^{(i)}_{n_k} - \eta^{(j)}_{n_k}\right| \geq \frac{c_4}{c_0^{\frac{2m-1}{2}}} \qquad (\text{für } k > k'). \tag{56}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von (54), wegen $\overline{|\gamma_{n_l}|} < 2\, H(\gamma_{n_l})$ und der Hypothese des Satzes, lässt sich in der Form

$$\left|\frac{b}{a}\right|^{n_{k+1}} \cdot \left|\gamma^{(i)}_{n_{k+1}} - \gamma^{(j)}_{n_{k+1}}\right| \leq \left|\frac{b}{a}\right|^{n_{k+1}} .\, 2\, \overline{|\gamma_{n_{k+1}}|} \leq 4\, .\, h_{n_{k+1}} \,.\, |r|^{n_{k+1}} \tag{57}$$

nach oben abschätzen. Aus (57) mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichung

$$|h_{n_{k+1}}| < \frac{M'}{\rho^{n_{k+1}}} \quad \left(|r| < \rho < R\,,\ \ \rho = \frac{|r| + R}{2}\right),$$

wobei M' das Maximum von $\left|\sum_{i=0}^{\infty} h_{n_i} \,.\, z^{n_i}\right|$ auf dem Kreis $|z| = \rho$ bedeutet, erhält man

$$\left|\frac{b}{a}\right|^{n_{k+1}} \cdot \left|\gamma^{(i)}_{n_{k+1}} - \gamma^{(j)}_{n_{k+1}}\right| \leq \frac{4M'}{\left|\frac{\rho}{r}\right|^{n_{k+1}}} .$$

Es lässt sich (54) mit Berücksichtigung von (56) und der letzten Ungleichung als

$$\left|\eta^{(i)}_{n_{k+1}} - \eta^{(j)}_{n_{k+1}}\right| \geq \frac{c_4}{c_0^{\frac{2m-1}{2} . n_k}} - \frac{4M'}{\left|\frac{\rho}{r}\right|^{n_{k+1}}} \quad (\text{für } k > k^*) \tag{58}$$

schreiben. Da $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$ ist, so gilt

$$\frac{4M'}{\left|\frac{\rho}{r}\right|^{n_{k+1}}} < \frac{c_4}{c_0^{\frac{2m-1}{2} . n_k}} \tag{59}$$

mit einer passenden Zahl k^{**} für $k > \text{Max}\,(k^*, k^{**})$. Aus (58) und (59) ergibt sich nun die Behauptung a).

Zu b). Wählen wir k so, dass $\gamma_{n_{k+1}}$ vom m. Grad ist. Das ist nach der Hypothese des Satzes für unendlich viele k der Fall, und setzen wir voraus, dass sowohl $\eta^{(i)}_{n_k} = \eta^{(j)}_{n_k}$ als auch $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} = \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$ sind. Aus (53) folgt dann

$$\gamma^{(i)}_{n_{k+1}} = \gamma^{(j)}_{n_{k+1}} ,$$

was der Hypothese des Satzes widerspricht.

Nun vereinigen wir a) und b). Wählen wir k' so, dass $k' > \text{Max}\,(k^*, k^{**})$ und $\gamma_{n_{k'+1}}$ vom m. Grad ist. Dann ist nach b) mindestens eine von $\eta^{(i)}_{n_{k'}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k'}}$ und $\eta^{(i)}_{n_{k'+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k'+1}}$ richtig. Ist $\eta^{(i)}_{n_{k'}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k'}}$, so ist, weil $k' > \text{Max}\,(k^*, k^{**})$ wegen

a) $\eta^{(i)}_{n_{k'+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k'+1}}$. Wenn $\eta^{(i)}_{n_{k'}} = \eta^{(j)}_{n_{k'}}$ ist, dann ist wegen b) $\eta^{(i)}_{n_{k'+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k'+1}}$. Also für $k \geq k' + 1$ und ein beliebiges Paar i, j ist wegen a) immer $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$, weil k' offenbar von i, j unabhängig ist. Oder anders ausgedrückt: Der Grad von η_{n_k} wird für $k \geq k' + 1$ gleich m, weil alle Körperkonjugierten von η_{n_k} voneinander verschieden sind. Der Grad von η_{n_k} ist also für $k \geq k' + 1$ gleich m. Nun wollen wir zeigen, dass wir aus der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ eine unendliche Teilfolge herausgreifen können, deren Glieder vom m. Grad und voneinander und von ξ verschieden sind: Weil r und γ_{n_i} von Null verschieden sind, ist $\eta_{n_{k+1}} \neq \eta_{n_k}$. In der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ gibt es dann wenigstens zwei Glieder, die voneinander verschieden sind. Wenn die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ endlich viele voneinander verschiedene Glieder hätte, so würde sich eine positive untere Schranke der Zahlenfolge $\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}|\}$ gehen (Wären die verschiedenen Werte $u_1, \ldots, u_t$ $(t \geq 2)$, so würde diese untere Schranke gleich $\underset{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}{\overset{t}{\operatorname{Min}}} |u_r - u_s|$), was nicht möglich ist. Denn man kann die Differenz $|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}| = |\gamma_{n_{k+1}} \cdot r^{n_{k+1}}|$ beliebig klein machen, weil die rechte Seite das allgemeine Glied einer konvergierenden Reihe ist. Danach enthält die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ unendlich viele voneinander verschiedene Glieder. Die Höhenfolge $H(\eta_{n_k})$ dieser letzten Folge ist nach oben unbeschränkt. Sonst enthielte die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ nur endlich viele voneinander verschiedene Glieder, weil die Grade von η_{n_k} kleiner als oder gleich m sind. Nun wählen wir eine Teilfolge, die streng monoton gegen $+\infty$ strebt. Alle Glieder der entsprechenden Teilfolge $\{\eta_{n_{k_j}}\}$ sind voneinander verschieden und höchstens eine dieser Glieder kann gleich ξ sein. Man kann aus dieser Folge durch Weglassung endlich vieler Anfangsglieder eine neue Folge herleiten, so dass alle Zahlen $\eta_{n_{k_j}}$ der neuen Folge von m. Grad und von ξ und voneinander verschieden sind (für $j > j_0$ mit einem passenden j_0). Hierzu genügt $k_j > k'$ und eventuell $k_j > k''$, falls $\eta_{n_{k''}} = \xi$, zu nehmen. Ausserdem strebt die Folge $\{H(\eta_{n_{k_j}})\}$ monoton gegen $+\infty$, und es gilt unter Mitberücksichtigung von (52) die folgende Annäherung:

$$0 < |\xi - \eta_{n_{k_j}}| < \frac{c_1}{H(\eta_{n_{k_j}})^{\frac{n_{k_{j+1}}}{n_{k_j}} \cdot c_3}} \quad (j > j_0). \tag{60}$$

Dabei sind die Grade von $\eta_{n_{k_j}}$ $(j > j_0)$ gleich m. Nennt man $\frac{n_{k+1}}{n_k} = s_k$, so kann man die obige Ungleichung in der Form

$$0 < |\xi - \eta_{n_{k_j}}| < \frac{c_1}{H(\eta_{n_{k_j}})^{s_{k_j} \cdot c_3}} \tag{61}$$

schreiben. Da $c_3 > 0$ ist und $s_k \to +\infty$, gilt: $s_{k_j} \cdot c_3 \to +\infty$. Es muss also $\xi \in U_1 \cup \ldots \cup U_m$, d.h.

$$\mu^*(\xi) \leq m \tag{62}$$

sein.

Jetzt wollen wir den Beweis zu Ende führen, indem wir zwei Fälle unterscheiden.

a) Ist $m = 1$, so ist immer $\mu^*(\xi) \geq 1$. Wenn wir auch (62) betrachten, erhalten wir

$$\mu^*(\xi) = 1 .$$

b) Es sei $m > 1$. Jetzt wollen wir die Relation (B^*) von § 1 für alle algebraischen Zahlen verifizieren, deren Grade kleiner als m sind. Dazu, wie beim Beweis von Satz 1, betrachten wir die folgende Ungleichung:

$$|\xi - \beta| = |(\eta_{n_l} - \beta) + (\xi - \eta_{n_l})| \geq |\eta_{n_l} - \beta| - |\eta_{n_l} - \xi| . \tag{63}$$

Es sei t der Grad von β. Dann gilt $1 \leq t < m$. Aus Hilfssatz 3 folgt mit Hilfe von (49)

$$|\eta_{n_l} - \beta| \geq \frac{c_5}{H(\beta)^m \cdot c_0^{(m-1)n_l}} \qquad (\text{für } k > k'') . \tag{64}$$

Mit Berücksichtigung von (50) und (49) erhält man

$$|\xi - \eta_{n_l}| \leq \frac{c_1}{c_0^{c_8 \cdot n_{l+1}}} . \tag{65}$$

Die Relation (63), wegen (64) und (65), schreibt man als

$$|\xi - \beta| \geq \frac{c_5}{H(\beta)^m \cdot c_0^{(m-1)n_l}} - \frac{c_1}{c_0^{c_8 \cdot n_{l+1}}} \qquad (\text{für } k > k'') . \tag{66}$$

Es sei nun β gegeben. Betrachten wir die Doppelungleichung

$$c_0^{n_k} \leq H(\beta) < c_0^{n_{k+1}} . \tag{67}$$

Die Zahl n_k, die (67) genügt, ist eindeutig bestimmt, weil die Zahlen $c_0^{n_k}$ im engeren Sinne monoton wachsen. Jetzt unterscheiden wir wieder zwei Fälle, je nachdem $H(\beta)$ zum ersten oder zweiten der folgenden Teilintervallen gehört:

1) $$c_0^{n_k} \leq H(\beta) < c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}}$$

2) $$c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}} \leq H(\beta) < c_0^{n_{k+1}} .$$

Dabei ist $\lambda > 1$ eine später zu erklärende natürliche Zahl.

Im Falle 1) gehen wir mit $l = k$ $(k \geq k'' + 1)$ in (62) ein, so wird diese Ungleichung unter Benutzung von 1) zu

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5}{H(\beta)^{2m-1}} - \frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \lambda}}. \tag{68}$$

Wenn die Zahl λ so gewählt wird, dass sie der Ungleichung

$$\lambda > \frac{2m-1}{c_3} \tag{69}$$

genügt, wird

$$\frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \lambda}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{c_5}{H(\beta)^{2m-1}}$$

für $H(\beta) > H_1$ mit passend gross gewähltem H_1. Es gilt also

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5/2}{H(\beta)^{2m-1}} \tag{70}$$

für $H(\beta) > H_1$.

Im Falle 2) gehen wir mit $l = k + 1$ $(k \geq k'' + 1)$ in (66) ein. Dann gilt unter Benutzung von 2) in (66):

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5}{H(\beta)^m \cdot H(\beta)^{\lambda(m-1)}} - \frac{c_1}{c_0^{c_3 \cdot n_{k+2}}}. \tag{71}$$

Aus (41) folgt ausserdem

$$\frac{n_{k+2}}{n_{k+1}} > \mu \quad \text{für} \quad k > k''' \tag{72}$$

für eine hinreichend grosse Zahl k'''. Dabei ist μ eine positive Zahl, deren Wert später erklärt wird. Aus (71) und (72) ergibt sich

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}} - \frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \mu}}$$

für $k > \check{k}$ mit $\check{k} = \text{Max}\,(k'' + 1, k''')$. Nun wählen wir die Zahl μ so, dass

$$\mu > \frac{m + \lambda(m-1)}{c_3} \tag{73}$$

erfüllt ist. Für $H(\beta) > H_2$ gilt

$$\frac{c_1}{H(\beta)^{c_3 \mu}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{c_5}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}},$$

wobei H_2 eine passend gross gewählte positive Zahl ist, und (71) gibt uns die folgende Ungleichung:

$$|\xi - \beta| > \frac{c_5/2}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}} \qquad \text{für } H(\beta) > H_2 . \tag{74}$$

Nun vereinigen wir 1) und 2) : Es sei $c_0^{n_{k''}} = H_0$. Nimmt man $H > H_0$, so wird $k \geq k''$. Dann erhält man für $H(\beta) > \operatorname{Max}(H_0, H_1, H_2)$

$$|\xi - \beta| > \frac{c_6}{H(\beta)^{m+\lambda(m-1)}} \tag{75}$$

mit $\frac{c_5}{2} = c_6$.

Somit ist die Relation (B^*) gezeigt werden, d.h.

$$\mu^*(\xi) \geq m . \tag{76}$$

Aus (62) und (76) folgt nun $\mu^*(\xi) = m$. Mit anderen Worten ist $\xi \in U_m^*$, also $\xi \in U_m$.

§ 3. LÜCKENREIHEN IM P-ADISCHEN GEBIET

Zunächst wollen wir einige Hilfssätze angeben, die bei den Beweisen der in diesem Paragraphen gegebenen Sätzen benutzt werden.

Hilfssatz 1. Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade n und der Höhe $H(\alpha)$ und $Q(x)$ sei ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade m und der Höhe $H(Q)$, für das $Q(\alpha)$ nicht verschwindet. Dann gilt

$$|Q(\alpha)|_p \geq \frac{p^{(n-1)t}}{(n+m)!\,.\,H(\alpha)^m\,.\,H(Q)^n} . \tag{1}$$

Hier ist $t = \operatorname{Min}(0, h)$, wo $|\alpha|_p = p^{-h}$.

Beweis. Siehe [9].

Hilfssatz 2. Es sei $P(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grade n und der Höhe $H(P)$. Die Nullstellen von $P(x)$ bezeichnen wir mit α_i $(i = 1, \ldots, n)$. Dann gilt

$$|\alpha_i - \alpha_j|_p > \frac{c}{H(P)^{n-1}} \qquad \text{für } \alpha_i \neq \alpha_j , \tag{2}$$

wobei c eine von n abhängige, aber von $H(P)$ unabhängige positive Konstante ist.

Beweis. Siehe [10].

Satz 1. Wir betrachten die Lückenreihe

$$F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n_i} \,.\, z^{n_i} \tag{3}$$

$$\left(c_{n_i} = \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \,;\; b_{n_i}\,,\, a_{n_i} \text{ ganz rational, } b_{n_i} \neq 0 \text{ und } a_{n_i} \geq 1 \right)$$

über Q_p unter folgenden Bedingungen

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = +\infty \,, \tag{4}$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log|b_{n_i}|}{n_i} < +\infty \,, \tag{5}$$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log A_{n_i}}{n_i} < +\infty \qquad (A_{n_i} = [a_{n_0}, \ldots, a_{n_i}])\,, \tag{6}$$

und wir setzen voraus, dass der Konvergenzradius R_F dieser Reihe positiv ist. Es sei α eine algebraische Zahl vom Grade m, die die Bedingung $0 < \overline{|\alpha|}_p < R_F$ mit $\overline{|\alpha|}_p = \operatorname{Max}_{j=1}^{m} |\alpha^{(j)}|_p$ erfüllt und deren Konjugierten der p-adischen Bewertung nach voneinander sämtlich verschieden sind. Dann gehört $F(\alpha)$ der p-adischen Unterklasse U_m an.

Beweis. Wir bezeichnen die Höhe von α mit $H(\alpha)$ und setzen $\xi = F(\alpha)$. ξ lässt sich in der Form

$$\gamma = \eta_{n_k} + r_{n_k} \tag{7}$$

schreiben, wobei

$$\eta_{n_k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \,.\, \alpha^{n_i} \,, \tag{8}$$

$$r_{n_k} = \sum_{r=k+1}^{\infty} \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \,.\, \alpha^{n_i} \tag{9}$$

sind. Andererseits folgt aus (6): $[a_{n_0}, \ldots, a_{n_k}] \leq A^{n_k}$, wobei A eine von n unabhängige positive Konstante bedeutet. Multiplizieren wir die beiden Seiten von (8) mit A_{n_k}, so erhalten wir die Gleichung

$$P(\eta_{n_k}, \alpha) := A_{n_k} \cdot \eta_{n_k} - A_{n_k} \cdot \frac{b_{n_0}}{a_{n_0}} \cdot \alpha^{n_0} - A_{n_k} \cdot \frac{b_{n_1}}{a_{n_1}} \cdot \alpha^{n_1} - \ldots - A_{n_k} \cdot \frac{b_{n_k}}{a_{n_k}} \cdot \alpha^{n_k} = 0 .$$

Dabei sind die Koeffizienten von α^{n_i} $(i = 0, \ldots, k)$ und η_{n_k} ganze rationale Zahlen. Wenden wir den Hilfssatz 1 von § 2 auf diese Relation an. Ist H die Höhe von $P(y, x)$, so ist wegen (5) und (6)

$$A_{n_k} \cdot \left| \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \right| \leq A^{n_k} \cdot B^{n_i} \quad (i = 0, 1, \ldots, k \; ; A \text{ und } B \geq 1),$$

wobei B eine von n unabhängige positive Konstante ist. Hieraus ergibt sich

$$H \leq (AB)^{n_k} . \tag{10}$$

Die Anwendung des Hilfssatzes 1 mit Berücksichtigung von (10) gibt folgende obere Abschätzung für die Höhe $H(\eta_{n_k})$ von η_{n_k}:

$$H(\eta_{n_k}) \leq 3^{2m+n_k m} \cdot (AB)^{n_k m} \cdot [H(\alpha)]^{n_k m} \leq 3^{4 n_k m} \cdot (AB)^{n_k m} \cdot [H(\alpha)]^{n_k m} . \tag{11}$$

Aus (11) folgt

$$H(\eta_{n_k}) \leq c_0^{\,n_k} \tag{12}$$

mit $3^{4m} \cdot (AB)^m \cdot [H(\alpha)]^m = c_0$.

Nun verifizieren wir die Ungleichung (A) von § 1. Dazu betrachten wir das Minimalpolynom der algebraischen Zahl η_{n_k} und schreiben wir dieses Polynom als $P_{n_k}(x) = f_0 + f_1 x + \ldots + f_l \cdot x^l$ $(l \leq m)$. Bilden wir $P_{n_k}(\xi)$ (ξ aus (7)), so erhalten wir, wegen $P_{n_k}(\eta_{n_k}) = 0$,

$$P_{n_k}(\xi) = r_{n_k} \cdot \beta_{n_k} , \tag{13}$$

wobei

$$\beta_{n_k} = f_1 + f_2 (2\eta_{n_k} + r_{n_k}) + \ldots + f_l \cdot \left[\binom{l}{1} \cdot \eta_{n_k}^{l-1} + \binom{l}{2} \eta_{n_k}^{l-2} \cdot r_{n_k} + \ldots + \binom{l}{l} r_{n_k}^{l-1} \right] \tag{14}$$

ist.

Jetzt betrachten wir $R_F = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n_i \to \infty}} \sqrt[n_i]{\left| \dfrac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \right|_p}}$ und es sei $0 < R_F < +\infty$. Für genügend grosse Zahlen n_i gilt $\sqrt[n_i]{\left| \dfrac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \right|_p} < \dfrac{1}{R_F - \varepsilon}$ oder $\left| \dfrac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \right|_p < \dfrac{1}{(R_F - \varepsilon)^{n_i}}$, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl ist. Sogar gibt es eine Zahl $M_1 (> 0)$ derart, dass

$$\left| \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \right|_p < \frac{M}{(R_F - \varepsilon)^{n_i}} \quad (i = 0, 1, \ldots) \tag{15}$$

für jede i erfüllt ist. Wenn wir $\varepsilon (> 0)$ als genügend kleine Zahl wählen, wird die Ungleichung $R_F - \varepsilon > \overline{|\alpha|}_p$ erfüllt $\left(\text{z.B. } \varepsilon = \frac{-\overline{|\alpha|}_p + R_F}{2}\right)$. Aus (9), mit Berücksichtigung von (15) und $\frac{\overline{|\alpha|}_p}{R_F - \varepsilon} < 1$, erhält man

$$|r_{n_k}|_p \leq M_1 \,.\, \text{Max}\left[\left(\frac{\overline{|\alpha|}_p}{R_F - \varepsilon}\right)^{n_k+1}, \ldots\right] = M_1 \,.\left(\frac{\overline{|\alpha|}_p}{R_F - \varepsilon}\right)^{n_k+1}. \tag{16}$$

Ist $R_F = +\infty$, so lässt sich ρ als eine beliebige Zahl wählen, die der Bedingung $\rho > \overline{|\alpha|}_p$ genügt. Da die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \,.\, \rho^{n_i}$ konvergiert, gibt es eine Zahl $M_2 (> 0)$ derart, dass $\left|\frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \,.\, \rho^{n_i}\right|_p \leq M_2$ $(i = 0, 1, \ldots)$ ist, d.h.

$$\left|\frac{b_{n_i}}{a_{n_i}}\right|_p \leq \frac{M_2}{\rho^{n_i}} \quad (i = 0, 1, \ldots)\,. \tag{17}$$

Aus (9), da $\frac{\overline{|\alpha|}_p}{\rho} < 1$ ist, folgt

$$|r_{n_k}|_p \leq M_2 \,.\, \text{Max}\left(\left(\frac{\overline{|\alpha|}_p}{\rho}\right)^{n_k+1}, \ldots\right) = M_2 \,.\left(\frac{\overline{|\alpha|}_p}{\rho}\right)^{n_k+1}. \tag{18}$$

Aus (15) und (17) ergibt sich nun

$$\left|\frac{b_{n_i}}{a_{n_i}}\right|_p \leq \frac{M^*}{\rho^{*n_i}} \quad (i = 0, 1, \ldots)\,, \tag{19}$$

wobei Max $(M_1, M_2) = M^*$ und Min $(\rho, R_F - \varepsilon) = \rho^*$ sind, und die für $|r_{n_k}|_p$ erhaltenen Ungleichungen (16) und (18) lassen sich vereinigen zu

$$|r_{n_k}|_p \leq M^* \,.\left(\frac{\overline{|\alpha|}_p}{\rho^*}\right)^{n_k+1} (k = 0, 1, \ldots)\,. \tag{20}$$

Da $\lim_{k \to \infty} |\eta_{n_k}|_p = |\xi|_p$ ist, gibt es eine Konstante $M (> 0)$ derart, dass $|\eta_{n_k}|_p < M$ $(k = 0, 1, \ldots)$ erfüllt ist. Aus (13), (20) und den Eigenschaften der p-adischen Bewertung erhält man

$$|\beta_{n_k}|_p \leq c_1 \tag{21}$$

mit $c_1 = \text{Max}(1, M, M^*)^{m-1}$. Dann lässt sich (13) mit Hilfe von (20) und (21) in der Form

$$|P_{n_k}(\xi)|_p = |r_{n_k}|_p \,.\, |\beta_{n_k}|_p \leq c_1 \,.\, M^* \,.\left(\frac{\overline{|\alpha|}_p}{\rho^*}\right)^{n_k+1} \tag{22}$$

$$= \frac{c_1 \,.\, M'}{\left(\frac{\rho'}{|\alpha|_p}\right)^{n_{k+1}}}$$

schreiben. Andererseits, da $P_{n_k}(x)$ das Minimalpolynom von η_{n_k} ist, ist $H(\eta_{n_k}) = H(P_{n_k})$. Aus (22), wegen (12), ergibt sich

$$| P_{n_k}(\xi) |_p \leq \frac{c_1 \,.\, M'}{c_2^{\,n_{k+1}}} = \frac{c_1 \,.\, M'}{e^{n_{k+1} \cdot \log c_2}} = \frac{c_1 \,.\, M'}{\left(e^{n_k \,.\, \log c_0}\right)^{\frac{n_{k+1} \,.\, \log c_2}{n_k \,.\, \log c_0}}}$$

$$\leq \frac{c_1 \,.\, M'}{[H(P_{n_k})]^{\frac{n_{k+1} \,.\, \log c_2}{n_k \,.\, \log c_0}}},$$

wobei $\frac{\rho'}{|\alpha|_p} = c_2$ $(c_2 > 1)$ ist. Mit

$$\frac{\log c_2}{\log c_0} = c_3 \;\; (> 0) \tag{23}$$

und $c_1 \,.\, M' = c_4$ erhalten wir die Ungleichung

$$| P_{n_k}(\xi) |_p \leq \frac{c_4}{H(P_{n_k})^{\frac{n_{k+1}}{n_k} \,.\, c_3}} \tag{24}$$

mit $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = + \infty$.

Nun betrachten wir wieder η_{n_k}, die durch (8) gegeben ist. Im Falle $m = 1$ ist der Grad von η_{n_k} immer gleich m. Im Falle $m > 1$ sind alle Körperkonjugierten von η_{n_k} in bezug auf $Q(\alpha)$ nach einer bestimmten Stelle ab voneinander verschieden; daher ist auch in diesem Falle der Grad von η_{n_k} von dieser Stelle ab gleich m. Die erste Behauptung ist klar. Um die zweite Behauptung zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle. Für ein festes Paar (i, j) $(i \neq j)$ gilt folgendes :

a) Von einer bestimmten Stelle an folgt aus $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$ die Ungleichung $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$,

b) für jede Zahl n_k ist mindestens eine der beiden Ungleichungen $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$ und $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$ richtig.

Zu a). Aus

$$\left.\begin{aligned} \eta_{n_{k+1}}^{(i)} &= \eta_{n_k}^{(i)} + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot (\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} \\ \eta_{n_{k+1}}^{(j)} &= \eta_{n_k}^{(j)} + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

gewinnt man

$$\eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)} = [\eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)}] + \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot [(\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} - (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}}] . \tag{26}$$

Ist

$$\left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p > \left| \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot [(\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} - (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}}] \right|_p \tag{27}$$

in (26), so gilt

$$\left| \eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)} \right|_p = \left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p . \tag{28}$$

Nun wollen wir verifizieren, dass (27) für hinreichend grosse Zahlen k erfüllt ist. Ist ν der Grad von η_{n_k}, so gilt $\nu \leq m$. Wenn wir Hilfssatz 2 von § 3 betrachten, so erhalten wir

$$\left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p > \frac{c_5}{H(\eta_{n_k})^{m-1}} , \tag{29}$$

wobei c_5 eine von m abhängige, aber von $H(\eta_{n_k})$ unabhängige Konstaute ist. Aus (12) und (20) folgert man

$$\left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p > \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k}} . \tag{30}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von (26) lässt sich mit Hilfe von (19), der Hypothese des Satzes und den Eigenschaften der p-adischen Bewertung in der Form

$$\left| \frac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \right|_p \cdot \left| (\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} - (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}} \right|_p \leq \tag{31}$$

$$\leq \frac{M'}{(\rho')^{n_{k+1}}} \cdot \operatorname{Max}\left(|\alpha^{(i)}|_p , |\alpha^{(j)}|_p\right) \leq \frac{M'}{(\rho')^{n_{k+1}}} \cdot \overline{|\alpha|}_p^{\,n_{k+1}} = \frac{M'}{\left(\dfrac{\rho'}{\overline{|\alpha|}_p}\right)^{n_{k+1}}}$$

nach oben abschätzen. Da $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$ ist, gilt die Ungleichung

$$\frac{M'}{\left(\dfrac{\rho'}{\overline{|\alpha|}_p}\right)^{n_{k+1}}} < \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k}} \tag{32}$$

für $k > k^*$ mit einer passenden Zahl k^*. Denn (32) ist der Ungleichung

$$\log M' - n_{k+1} \cdot \log\left(\frac{\rho'}{|\alpha|_p}\right) < \log c_5 - (m-1)\, n_k \cdot \log c_0$$

äquivalent. Dividieren wir die letzte Ungleichung durch n_k, so erhalten wir

$$\frac{\log M'}{n_k} + (m-1)\log c_0 < \frac{\log c_5}{n_k} + \frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot \log\left(\frac{\rho'}{|\alpha|_p}\right).$$

Die linke Seite dieser Ungleichung strebt, wegen $c_0 > 1$ und $\dfrac{\rho'}{|\alpha|_p} > 1$, gegen $(m-1)\log c_0$, die rechte Seite derselben strebt gegen $+\infty$ für $k \to \infty$. Damit ist (32) bewiesen. Aus (30), (31) und (32) sieht man, dass (27) erfüllt ist. Damit ergibt sich nun die Behauptung a).

Zu b). Wir setzen voraus, dass $\eta^{(i)}_{n_k} = \eta^{(j)}_{n_k}$ und $\eta^{(i)}_{n_{k+1}} = \eta^{(j)}_{n_{k+1}}$ zugleich erfüllt sind. Aus (22) folgt dann

$$(\alpha^{(i)})^{n_{k+1}} = (\alpha^{(j)})^{n_{k+1}}.$$

Hieraus, durch Übergang zu der p-adischen Bewertung und Bildung der n_{k+1}-ten positiven Wurzel, ergibt sich

$$|\alpha^{(i)}|_p = |\alpha^{(j)}|_p,$$

was nun der für α gegebenen Hypothese des Satzes widerspricht. Damit ist auch die Behauptung b) bewiesen.

Nun vereinigen wir a) und b). Ist $\eta^{(i)}_{n_{k^*}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k^*}}$, so ist nach a) auch $\eta^{(i)}_{n_{k^*+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k^*+1}}$. Wenn $\eta^{(i)}_{n_{k^*}} = \eta^{(j)}_{n_{k^*}}$ ist, ist nach b) $\eta^{(i)}_{n_{k^*+1}} \neq \eta^{(j)}_{n_{k^*+1}}$. Also für $k \geq k^*+1$ und ein beliebiges Paar i, j ist in beiden Fällen $\eta^{(i)}_{n_k} \neq \eta^{(j)}_{n_k}$, wobei k^* von i, j unabhängig ist. Mit anderen Worten wird der Grad von η_{n_k} gleich m für $k > k^*$, weil alle Körperkonjugierten von η_{n_k} voneinander verschieden sind. Nun wollen wir zeigen, dass wir aus der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ eine unendliche Teilfolge herausgreifen können, deren Glieder vom m. Grad sind und voneinander und von ξ verschieden sind: Da α und $\dfrac{b_{n_l}}{a_{n_l}}$ von Null verschieden sind, ist $\eta_{n_{k+1}} \neq \eta_{n_k}$. In der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ gibt es dann wenigstens zwei Glieder, die voneinander verschieden sind. Wenn die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ endlich viele voneinander verschiedene Glieder hätte, so würde sich eine positive untere Schranke der Zahlenfolge $\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}|_p\}$ geben (Wären die verschiedenen Werte $u_1, \ldots, u_t$ $(t \geq 2)$, so würde diese untere Schranke gleich $\operatorname*{Min}_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{t} |u_r - u_s|_p$, was nicht möglich ist. Denn man kann die Differenz $|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}|_p = \left|\dfrac{b_{n_{k+1}}}{a_{n_{k+1}}} \cdot \alpha^{n_{k+1}}\right|_p$ beliebig klein machen, weil die rechte Seite das allgemeine Glied einer konvergierenden Reihe ist). Danach enthält die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ unendlich viele voneinander verschiedene Glieder. Unter den Minimalpolynomen P_{n_k}, die den Gliedern der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ zugeordnet sind, gibt es unendlich viele voneinander verschiedene. Sonst würde die Glieder η_{n_k} endlich viele voneinander verschiedene Zahlen wiederholen. Ferner ist die Höhenfolge $H(P_{n_k})$ nach oben unbeschränkt, denn sonst müsste die zugeordnete Polynomenfolge $\{P_{n_k}\}$ endlich viele Polynome enthalten, weil die Grade von P_{n_k} kleiner als oder gleich m sind. Nun wählen wir eine Teilfolge $\{P_{n_{k_j}}\}$ aus der Folge $\{P_{n_k}\}$ derart, dass die Höhenfolge der Glieder dieser Teilfolge im engeren Sinne monoton gegen $+\infty$ strebt. Wir betrachten die algebraischen Zahlen $\eta_{n_{k_j}}$, die dieser Teilfolge entsprechen. Diese Zahlen $\eta_{n_{k_j}}$ sind voneinander verschieden und deren Höhenfolge strebt streng monoton gegen $+\infty$. Da $H(P_{n_{k_j}}) \neq H(P_{n_{k_l}})$ für $j \neq l$ ist (denn $H(P_{n_{k_j}})$ ist im engeren Sinne monoton), sind die Polynome $P_{n_{k_j}}$ voneinander verschieden. Ferner sind $\eta_{n_{k_j}}$ auch voneinander verschieden, weil die Polynome $P_{n_{k_j}}$ irreduzibel sind. Damit ist die Behauptung wegen $H(\eta_{n_{k_j}}) = H(P_{n_{k_j}})$ bewiesen. Da höchstens eine dieser algebraischen Zahlen gleich ξ wird, gilt dann für $k_j \geq k^{**}$, mit passendem k^{**}, $\eta_{n_{k_j}} \neq \xi$ und

$$0 < | P_{n_{k_j}}(\xi) |_p < \frac{c_4}{H(\eta_{n_{k_j}})^{\frac{n_{k_{j+1}}}{n_{k_j}} \cdot c_3}} .$$

Dabei sind alle Polynome $P_{n_{k_j}}(x)$ vom Grade m. Nennt man $\frac{n_{k+1}}{n_k} = s_k$, so kann man die obige Ungleichung für $k_j \geq k^{**}$ in der Form

$$0 < | P_{n_{k_j}}(\xi) |_p < \frac{c_4}{H(\eta_{n_{k_j}})^{s_{k_j} \cdot c_3}}$$

schreiben. Da $c_3 > 0$ ist und $s_k \to \infty$, gilt $s_{k_j} \cdot c_3 \to +\infty$. Es muss also

$$\mu(\xi) \leq m \tag{33}$$

sein.

Um den Beweis zu vollenden, wollen wir noch die komplementäre Ungleichung $\mu(\xi) \geq m$ zeigen.

a) Ist $m = 1$, so ist immer $\mu(\xi) \geq 1$. Unter Beachtung von (33) erhalten wir hieraus

$$\mu(\xi) = \mathrm{i} .$$

b) Es sei $m > 1$. Nun wollen wir die Relation (B) von §1 für alle Polynome $P(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten zeigen, deren Grade kleiner als m sind. Dazu betrachten wir das Polynom

$$P(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_l x^l\,, \quad 1 \leq l < m\,, \quad d_i \in \mathbf{Z} \quad (i = 0, 1, \ldots, l)$$

und wir setzen $x = \xi$ in diesem Polynom. Dann gilt

$$P(\xi) = P(\eta_{n_\nu} + r_{n_\nu}) = P(\eta_{n_\nu}) + r_{n_\nu} \,.\, \beta_{n_\nu}\,, \tag{34}$$

wobei ξ, η_{n_ν} und r_{n_ν} mit (7), (8) und (9) gegeben sind. Aus Hilfssatz 1 in §3, da $1 \leq l < m$ ist, erhält man

$$\begin{aligned} |\, P(\eta_{n_\nu})\,|_p &\geq \frac{p^{(m-1)t}}{(l+m)!\,.\, H(\eta_{n_\nu})^l \,.\, H(P)^m} \\ &\geq \frac{p^{(m-1)t}}{(2m-1)!\,.\, H(\eta_{n_\nu})^{m-1} \,.\, H(P)^m}\,, \quad t = \min(0, h)\,. \end{aligned} \tag{35}$$

Die letzte Ungleichung lässt sich mit $\dfrac{p^{(m-1)t}}{(2m-1)!} = c_5$ $(c_5(m, \alpha) > 0)$ in der Form

$$|\, P(\eta_{n_\nu})\,|_p \geq \frac{c_5}{H(\eta_{n_\nu})^{m-1} \,.\, H(P)^m} \tag{36}$$

schreiben. Aus (36) folgt mit Berücksichtigung von (12)

$$|\, P(\eta_{n_\nu})\,|_p \geq \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_\nu} \,.\, H(P)^m}\,. \tag{37}$$

Ferner gilt wegen (20) und (21)

$$|\, r_{n_\nu}\,|_p \,.\, |\, \beta_{n_\nu}\,|_p \leq c_4 \,.\, c_2^{-n_{\nu+1}}\,, \tag{38}$$

wobei $\dfrac{\rho'}{|\alpha|_p} = c_2\,(>1)$ und $c_1 \,.\, M' = c_4$ sind. Da $\dfrac{\log c_2}{\log c_0} = c_3$ (>0) ist, schreiben wir die Ungleichung (38) als

$$|\, r_{n_\nu}\,|_p \,.\, |\, \beta_{n_\nu}\,|_p \leq c_4 \,.\, c_0^{-c_3 \,.\, n_{\nu+1}}\,. \tag{39}$$

Es sei nun $H(P)$ gegeben. Betrachten wir

$$c_0^{n_k} \leq H(P) < c_0^{n_{k+1}}\,. \tag{40}$$

Die Zahl n_k, die (40) genügt, ist eindeutig bestimmt, weil die Zahlen $c_0^{n_k}$ im engeren Sinne monoton wachsen. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $H(P)$ zum ersten oder zum zweiten der folgenden Teilintervallen gehört :

a) $$c_0^{n_k} \leq H(P) < c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}}\,,$$

b) $$c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}} \leq H(P) < c_0^{n_{k+1}}\,.$$

Dabei ist $\lambda > 1$ eine später zu erklärende natürliche Zahl.

Zu a). Es sei $H(P) = H$. Da $c_0^{n_k} \leq H$ und $H^\lambda < c_0^{n_{k+1}}$ sind, erhalten wir

$$\frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k} \cdot H^m} > \frac{c_5}{H^{(m-1)+m}} = \frac{c_5}{H^{2m-1}} \tag{41}$$

und

$$c_4 \cdot c_0^{-c_3 \cdot n_{k+1}} < c_4 \cdot H^{-\lambda c_3}. \tag{42}$$

Wenn die Zahl λ so gewählt wird, dass sie der Ungleichung

$$\lambda > \frac{2m-1}{c_3} \tag{43}$$

genügt, wird

$$H^{\lambda c_3} > \frac{c_4}{c_5} \cdot H^{2m-1}$$

für $H > H_1$ mit passend gross gewähltem H_1, d.h.

$$\frac{c_5}{H^{2m-1}} > \frac{c_4}{H^{\lambda c_3}} \quad (\text{für } H > H_1). \tag{44}$$

Nun gehen wir mit $\nu = k$ in (37) und (38) ein. Dann sind

$$|P(\eta_{n_k})|_p \geq \frac{c_6}{c_0^{(m-1)n_k} \cdot H(P)^m} \tag{45}$$

und

$$|r_{n_k}|_p \cdot |\beta_{n_k}|_p \leq c_4 \cdot c_0^{-c_3 \cdot n_{k+1}} \tag{46}$$

erfüllt. Aus (41), (42), (43), (44), (45) und (46) ergibt sich

$$|P(\eta_{n_k})|_p > |r_{n_k}|_p \cdot |\beta_{n_k}|_p. \tag{47}$$

$|P(\xi)|_p = |P(\eta_{n_k}) + r_{n_k} \cdot \beta_{n_k}|_p$ und (47) geben uns

$$|P(\xi)|_p = |P(\eta_{n_k})|_p \tag{48}$$

für $H > H_1$. Unter Beachtung von (41), (45) und (48) gewinnt man

$$|P(\xi)|_p > \frac{c_5}{H^{2m-1}}. \tag{49}$$

Zu b). In diesem Falle sind $c_0^{n_{k+1}} \leq H^\lambda$ und $H < c_0^{n_{k+1}}$. Wir gehen mit $\nu = k+1$ in (37) und (38) ein. Dann erhalten wir

$$|P(\eta_{n_{k+1}})|_p \geq \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_{k+1}} \cdot H^m} \geq \frac{c_5}{H^{\lambda(m-1)+m}} \tag{50}$$

und

$$|r_{n_{k+1}}|_p \cdot |\beta_{n_{k+1}}|_p \leq c_4 \cdot c_0^{-c_8 \cdot n_{k+2}} . \tag{51}$$

Aus (4) folgt

$$\frac{n_{k+2}}{n_{k+1}} > \mu \quad (\text{für } k > k^{***}) \tag{52}$$

für eine hinreichend grosse Zahl k^{***}. Dabei ist μ eine positive Zahl, dessen Wert später erklärt werden wird. Aus (51) und (52) ergibt sich

$$|r_{n_{k+1}}|_p \cdot |\beta_{n_{k+1}}|_p \leq c_4 \cdot c_0^{-c_8\mu \cdot n_{k+1}} \leq c_4 \cdot H^{-c_8\mu} \tag{53}$$

für $k > k'$ mit $k' = \text{Max}\,(k^* + 1, k^{**}, k^{***})$. Nun wählen wir die Zahl μ so, dass

$$\mu\, c_3 > \lambda(m-1) + m \tag{54}$$

ist. Für $H > H_2$, wobei H_2 eine genügend grosse Zahl ist, gilt dann

$$H^{\mu c_8} > \frac{c_4}{c_5} \cdot H^{\lambda(m-1)+m} .$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{c_5}{H^{\lambda(m-1)+m}} > \frac{c_4}{H^{\mu c_8}} . \tag{55}$$

Wegen (50), (53), (54) und (55) erhält man

$$|P(\eta_{n_{k+1}})|_p > |r_{n_{k+1}}|_p \cdot |\beta_{n_{k+1}}|_p . \tag{56}$$

Aus $|P(\xi)|_p = |P(\eta_{n_{k+1}}) + r_{n_{k+1}} \cdot \beta_{n_{k+1}}|_p$ folgt unter Beachtung von (56)

$$|P(\xi)|_p = |P(\eta_{n_{k+1}})|_p \quad \text{für } H > H_2 .$$

Diese Gleichung und (50) geben uns die folgende Ungleichung :

$$|P(\xi)|_p > \frac{c_5}{H^{\lambda(m-1)+m}} . \tag{57}$$

Nun vereinigen wir a) und b) : Es sei $c_0^{n_{k'}} = H_0$. Nimmt man $H > H_0$, so wird $k \geq k'$. Für $H > \text{Max}\,(H_0, H_1, H_2)$ erhält man

$$|P(\xi)|_p > \frac{c_5}{H(P)^{m+\lambda(m-1)}} . \tag{58}$$

Somit ist die Relation (B) von §1 gezeigt worden, d.h.

$$\mu(\xi) \geq m . \tag{59}$$

Aus (33) und (59) folgt $\mu(\xi) = m$. Mit anderen Worten, $F(\alpha)$ gehört der p-adischen Unterklasse U_m an.

Satz 2. Wir betrachten die Lückenreihe

$$F(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{n_i} \, . \, z^{n_i} \, . \tag{60}$$

Es seien γ_{n_i} nichtverschwindende algebraische Zahlen, die einem festen Zahlkörper K angehören und es sei $[K : Q] = m$. Wir setzen voraus, dass unendlich viele Zahlen unter den algebraischen Zahlen γ_{n_i} existieren, deren Grade gleich m sind. Ferner sei

$$\overline{\lim_{n_i \to \infty}} \sqrt[n_i]{|\gamma_{n_i}^{(j)}|_p} < +\infty \qquad (j = 1, \dots, m) \tag{61}$$

(Mit $\gamma_{n_i}^{(j)}$ bezeichnen wir die Konjugierten von γ_{n_i} im Zahlkörper K). Es seien ausserdem

$$\lim_{i \to \infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = +\infty \tag{62}$$

und

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \frac{\log h_{n_i}}{n_i} < +\infty \quad (h_{n_i} = H(\gamma_{n_i}))\, . \tag{63}$$

Dann gehört $F(r)$ der p-adischen Unterklasse U_m für $z = r \in Q$ an, die die Bedingung $0 < |r|_p < R$ mit $R = \operatorname*{Min}_{j=1}^{m} \left[\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{i \to \infty}} \sqrt[n_i]{|\gamma_{n_i}^{(j)}|_p}} \right]$ erfüllt.

Beweis. Wir bilden $F(r)$, wobei $z = r = \dfrac{b}{a}$ $(a, b \in Z; a \geq 1)$ ist. Bezeichnen wir $F(r)$ mit ξ, und schreiben wir

$$\xi = \eta_{n_k} + r_{n_k} \, , \tag{64}$$

wobei

$$\eta_{n_k} = \sum_{i=0}^{k} \gamma_{n_i} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_i} \tag{65}$$

und

$$r_{n_k} = \sum_{i=k+1}^{\infty} \gamma_{n_i} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n} \tag{66}$$

sind. Multipliziren wir die beiden Seiten von (65) mit a^{n_k}, so erhalten wir die Relation

$$P(\eta_{n_k}, \gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_k}) := a^{n_k} \cdot \eta_{n_k} - a^{n_k} \cdot \gamma_{n_0} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_0} - \ldots - a^{n_k} \cdot \gamma_{n_k} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{n_k} = 0 .$$

Dabei sind die Koeffizienten von $\eta_{n_k}, \gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_k}$ ganze rationale Zahlen. Wenden wir den Hilfssatz 1 von §2 auf die Relation $P(\eta_{n_k}, \gamma_{n_0}, \ldots, \gamma_{n_k}) = 0$ an: Bezeichnen wir die Höhe von $P(y, x_0, \ldots, x_k)$ mit H, so wird

$$H \leq a^{n_k} \cdot |b|^{n_k} ,$$

woraus man

$$H \leq A^{n_k} \tag{67}$$

mit $a \cdot |b| = A$ erhält. Aus (63) folgt

$$h_{n_i} = H(\gamma_{n_i}) \leq B^{n_i} \quad (i = 0,1,\ldots) , \tag{68}$$

wobei B eine von n_i unabhängige positive Konstante ist. Unter Beachtung von (67) und (68) erhält man folgende obere Abschätzung für die Höhe $H(\eta_{n_k})$:

$$\begin{aligned} H(\eta_{n_k}) &\leq 3^{2m+(k+1)m} \cdot A^{n_k m} \cdot H(\gamma_{n_0})^m \ldots H(\gamma_{n_k})^m \\ &\leq 3^{2m+2n_k m} \cdot A^{n_k m} \cdot (B^{n_0})^m \ldots (B^{n_k})^m \\ &\leq 3^{4n_k m} \cdot A^{n_k m} \cdot B^{(n_0+\ldots+n_k)m} . \end{aligned} \tag{69}$$

Wegen der Relation (62) ist $\frac{n_k}{n_{k-1}} > 2$ für $k > k^*$ mit passendem k^*. Hieraus ergibt sich $\sum_{j=k^*}^{k} n_j < 2\, n_k$ (für $k > k^*$). Aus (69) folgt

$$H(\eta_{n_k}) \leq c_0^{\,n_k} \quad (\text{für } k > k^*) \tag{70}$$

mit $B^{n_0+\ldots+n_{k^*-1}} \cdot 3^{4m} \cdot A^m \cdot B^{2m} = c_0 \quad (c_0 > 1)$.

Nun verifizieren wir die Ungleichung (A) von §1. Dazu betrachten wir das Minimalpolynom der algebraischen Zahl η_{n_k} und schreiben wir dieses Polynom als $P_{n_k}(x) = f_0 + f_1 x + \ldots + f_l x^l$ ($l \leq m$). Bilden wir $P_{n_k}(\xi)$ (ξ aus (64)), so erhalten wir, wegen $P_{n_k}(\eta_{n_k}) \neq 0$,

$$P_{n_k}(\xi) = r_{n_k} \cdot \beta_{n_k} , \tag{71}$$

wobei

$$\begin{aligned} \beta_{n_k} = f_1 &+ f_2 (2\eta_{n_k} + r_{n_k}) + \ldots + \\ &+ f_l \cdot \left[\binom{l}{1} \eta_{n_k}^{l-1} + \binom{l}{2} \eta_{n_k}^{l-2} \cdot r_{n_k} + \ldots + \binom{l}{l} r_{n_k}^{l-1}\right] . \end{aligned} \tag{72}$$

Jetzt betrachten wir $R = \operatorname*{Min}_{j=1}^{m} \left[\dfrac{1}{\varlimsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[n_i]{\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p}} \right]$. Es seien $0 < R < +\infty$ und $\rho_j = \dfrac{1}{\varlimsup\limits_{i\to\infty} \sqrt[n_i]{\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p}}$. Dann ist $R \leq \rho_j$ $(j = 1, \dots, m)$. Für genügend grosse Zahlen n_i gilt $\dfrac{1}{\sqrt[n_i]{\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p}} > \rho_j - \varepsilon \geq R - \varepsilon$ oder $\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p < \dfrac{1}{(R-\varepsilon)^{n_i}}$, wobei ε eine behebig kleine positive Zahl ist. Sogar gibt es eine Zahl $M_1\,(>0)$ derart, dass

$$\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p < \frac{M_1}{(R-\varepsilon)^{n_i}} \quad (i = 0, 1, \dots) \tag{73}$$

für jede i erfüllt ist. Wenn wir $\varepsilon\,(>0)$ als eine genügend kleine Zahl wählen, wird die Ungleichung $R - \varepsilon > |r|_p$ $\left(\text{z.B.} \quad \varepsilon = \dfrac{-|r|_p + R}{2}\right)$ erfüllt. Aus (66) mit Berücksichtigung von (73) und $\dfrac{|r|_p}{R-\varepsilon} < 1$ erhält man

$$|r_{n_k}|_p \leq M_1 \,.\, \operatorname{Max}\left[\left(\frac{|r|_p}{R-\varepsilon}\right)^{n_{k+1}}, \dots\right] = M_1 \,.\, \left(\frac{|r|_p}{R-\varepsilon}\right)^{n_{k+1}}. \tag{74}$$

Ist $R = \infty$, so lässt sich ρ als eine beliebige Zahl wählen, die der Bedingung $\rho > |r|_p$ genügt. Da die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma_{n_i}^{(j)} \,.\, \rho^{n_i}$ konvergiert, gibt es eine Zahl $M_2\,(>0)$ derart, dass $\left|\gamma_{n_i}^{(j)} \,.\, \rho^{n_i}\right|_p \leq M_2$ $(i = 0, 1, \dots)$ ist, d.h.

$$\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p \leq \frac{M_2}{\rho^{n_i}} \quad (i = 0, 1, \dots). \tag{75}$$

Aus (66), da $\dfrac{|r|_p}{\rho} < 1$ ist, folgt

$$|r_{n_k}|_p \leq M_2 \,.\, \operatorname{Max}\left[\left(\frac{|r|_p}{\rho}\right)^{n_{k+1}}, \dots\right] = M_2 \,.\, \left(\frac{|r|_p}{\rho}\right)^{n_{k+1}}. \tag{76}$$

Aus (73) und (75) ergibt sich nun

$$\left|\gamma_{n_i}^{(j)}\right|_p \leq \frac{M'}{(\rho')^{n_i}} \quad (i = 0, 1, \dots), \tag{77}$$

wobei Max $(M_1, M_2) = M'$ und Min $(\rho, R - \varepsilon) = \rho'$ sind, und die für $|r_{n_k}|_p$ erhaltenen Ungleichungen (74) und (76) lassen sich vereinigen zu

$$|r_{n_k}|_p \leq M' \cdot \left(\frac{|r|_p}{\rho'}\right)^{n_{k+1}}. \tag{78}$$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} |\eta_{n_k}|_p = |\xi|_p$ ist, gibt es eine Konstante $M\,(>0)$ derart, dass $|\eta_{n_k}|_p < M$ $(k = 0, 1, \ldots)$ erfüllt ist. Aus (71), (72) und den Eigenschaften der p-adischen Bewertung erhält man

$$|\beta_{n_k}|_p \leq c_1 \tag{79}$$

mit $c_1 = \text{Max}\,(1, M, M')^{m-1}$. Dann lässt sich (71) mit Hilfe von (78) und (79) in der Form

$$|P_{n_k}(\xi)|_p = |r_{n_k}|_p \cdot |\beta_{n_k}|_p \leq c_1 \cdot M' \cdot \left(\frac{|r|_p}{\rho'}\right)^{n_{k+1}} = \frac{c_1 \cdot M'}{\left(\dfrac{\rho'}{|r|_p}\right)^{n_{k+1}}} \tag{80}$$

schreiben. Andererseits, da $P_{n_k}(x)$ das Minimalpolynom von η_{n_k} ist, ist $H(\eta_{n_k}) = H(P_{n_k})$. Aus (80) ergibt sich wegen (70)

$$\begin{aligned} |P_{n_k}(\xi)|_p &\leq \frac{c_1 \cdot M'}{c_2^{n_{k+1}}} = \frac{c_1 \cdot M'}{(e^{n_k \log c_0})^{\frac{n_{k+1} \cdot \log c_2}{n_k \cdot \log c_0}}} \\ &\leq \frac{c_1 \cdot M'}{[H(P_{n_k})]^{\frac{n_{k+1} \cdot \log c_2}{n_k \cdot \log c_0}}} \quad (\text{für } k > k^*), \end{aligned} \tag{81}$$

wobei $\dfrac{\rho'}{|r|_p} = c_2\,(>1)$ ist. Mit

$$\frac{\log c_2}{\log c_0} = c_3\,(>0) \tag{82}$$

nnd $c_1 \cdot M' = c_4$ erhalten wir die Ungleichung

$$|P_{n_k}(\xi)|_p \leq \frac{c_4}{H(P_{n_k})^{\frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot c_3}} \;(\text{für } k > k^*), \quad \lim_{k\to\infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} \cdot c_3 = +\infty \tag{83}$$

Nun betrachten wir wieder η_{n_k}, was durch (65) gegeben ist. Im Falle $m = 1$ ist der Grad von η_{n_k} immer gleich m. Im Falle $m > 1$ sind alle Körperkonjugierten von η_{n_k} in bezug auf K nach einer bestimmten Stelle ab voneinander verschieden; daher ist der Grad von η_{n_k} gleich m. Die erste Behauptung ist klar. Um die zweite Behauptung zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle für ein festes Paar (i, j) $(i \neq j)$:

a) Von einer bestimmten Stelle an folgt aus $\eta_{n_k}^{(i)} \neq \eta_{n_k}^{(j)}$ die Ungleichung $\eta_{n_{k+1}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k+1}}^{(j)}$,

b) wie gross die natürliche Zahl N auch gewählt wird, gibt es ein n_k, so dass mindestens eine von den Ungleichungen $\eta_{n_k}^{(i)} \neq \eta_{n_k}^{(j)}$ und $\eta_{n_{k+1}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k+1}}^{(j)}$ richtig ist.

Zu a). Aus

$$\left.\begin{aligned} \eta_{n_{k+1}}^{(i)} &= \eta_{n_k}^{(i)} + r^{n_k+1} \cdot \gamma_{n_{k+1}}^{(i)} \\ \eta_{n_{k+1}}^{(j)} &= \eta_{n_k}^{(j)} + r^{n_k+1} \cdot \gamma_{n_{k+1}}^{(j)} \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

gewinnt man

$$\eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)} = [\eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)}] + [r^{n_k+1} \cdot (\gamma_{n_{k+1}}^{(i)} - \gamma_{n_{k+1}}^{(j)})] . \tag{85}$$

Ist

$$\left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p > \left| r^{n_k+1} \cdot (\gamma_{n_{k+1}}^{(i)} - \gamma_{n_{k+1}}^{(j)}) \right|_p \tag{86}$$

in (85), so gilt

$$\left| \eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)} \right|_p = \left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p . \tag{87}$$

Nun wollen wir verifizieren, dass (86) für hinreichend grosse Zahlen k erfüllt ist. Ist ν der Grad von η_{n_k}, so gilt $\nu \leq m$. Wenn wir den Hilfssatz 2 in §3 betrachten, so erhalten wir

$$\left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p > \frac{c_5}{H(\eta_{n_k})^{m-1}} , \tag{88}$$

wobei c_5 eine von m abhängige, aber von $H(\eta_{n_k})$ unabhängige Konstante ist. Aus (70) und (88) folgert man für $k > k^*$

$$\left| \eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)} \right|_p > \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k}} . \tag{89}$$

Das zweite Glied der rechten Seite von (85) lässt sich mit Hilfe von (77) und den Eigenschaften der p-adischen Bewertung in der Form

$$\begin{aligned} \left| r \right|_p^{n_k+1} \cdot \left| \gamma_{n_{k+1}}^{(i)} - \gamma_{n_{k+1}}^{(j)} \right|_p &\leq \left| r \right|_p^{n_k+1} . \operatorname{Max} \left(\left| \gamma_{n_{k+1}}^{(i)} \right|_p , \left| \gamma_{n_{k+1}}^{(j)} \right|_p \right) \\ &\leq \left| r \right|_p^{n_k+1} . \frac{M'}{(\rho')^{n_k+1}} = \frac{M'}{\left(\dfrac{\rho'}{|r|_p} \right)^{n_k+1}} \end{aligned} \tag{90}$$

nach oben abschätzen. Da $\lim_{k \to \infty} \dfrac{n_{k+1}}{n_k} = +\infty$ ist, gilt die Ungleichung

$$\frac{M'}{\left(\frac{\rho'}{|r|_p}\right)^{n_{k+1}}} < \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k}} \tag{91}$$

für $k > k^{***}$ mit $k^{***} = \mathrm{Max}\,(k^*, k^{**})$, wobei k^{**} eine passende Zahl ist. Aus (89), (90) und (91) sieht man, dass (86) erfüllt ist. Wenn $\left|\eta_{n_k}^{(i)} - \eta_{n_k}^{(j)}\right|_p > 0$, ist wegen (87) $\left|\eta_{n_{k+1}}^{(i)} - \eta_{n_{k+1}}^{(j)}\right|_p > 0$.

Zu **b**). Wählen wir k so, dass $\gamma_{n_{k+1}}$ vom m. Grad ist. Das ist nach der Hypothese des Satzes für unendlich viele k der Fall, und setzen wir voraus, dass $\eta_{n_k}^{(i)} = \eta_{n_k}^{(j)}$ und $\eta_{n_{k+1}}^{(i)} = \eta_{n_{k+1}}^{(j)}$ zugleich erfüllt sind. Aus (77) folgt dann

$$\gamma_{n_{k+1}}^{(i)} = \gamma_{n_{k+1}}^{(j)},$$

was der Hypothese des Satzes widerspricht.

Nun vereinigen wir a) und b). Ist $\eta_{n_{k^{***}}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k^{***}}}^{(j)}$, so ist nach a) $\eta_{n_{k^{***}+1}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k^{***}+1}}^{(j)}$. Wenn $\eta_{n_{k^{***}}}^{(i)} = \eta_{n_{k^{***}}}^{(j)}$ ist, ist nach b) $\eta_{n_{k^{***}+1}}^{(i)} \neq \eta_{n_{k^{***}+1}}^{(j)}$. Dann für $k > k^{***} + 1$ und ein beliebiges Paar i, j ist $\eta_{n_k}^{(i)} \neq \eta_{n_k}^{(j)}$, wobei k^{***} von i, j unabhängt. Mit anderen Worten wird der Grad von η_{n_k} gleich m, weil alle Körperkonjugierten von η_{n_k} voneinander verschieden sind. Nun wollen wir zeigen, dass wir aus der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ eine unendliche Teilfolge herausgreifen können, deren Glieder vom m. Grad sind und voneinander und von ξ verschieden sind: Da r und γ_{n_i} von Null verschieden sind, ist $\eta_{n_{k+1}} \neq \eta_{n_k}$. In der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ gibt es dann wenigstens zwei Glieder, die voneinander verschieden sind. Wenn die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ endlich viele voneinander verschiedene Glieder hätte, so würde sich eine positive untere Schranke der Zahlenfolge $\{|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}|_p\}$ geben, was nicht möglich ist. Denn man kann die Differenz $|\eta_{n_{k+1}} - \eta_{n_k}|_p = |\gamma_{n_{k+1}} \cdot r^{n_{k+1}}|_p$ beliebig klein machen, weil die rechte Seite das allgemeine Glied einer konvergierenden Reihe ist. Danach enthält die Folge $\{\eta_{n_k}\}$ unendlich viele Glieder, die voneinander verschieden sind. Unter den Minimalpolynomen P_{n_k}, die den Gliedern der Folge $\{\eta_{n_k}\}$ zugeordnet sind, gibt es unendlich viele voneinander verschiedene. Sonst würden die Glieder η_{n_k} endlich viele voneinander verschiedene Zahlen wiederholen. Ferner ist die Höhenfolge $H(P_{n_k})$ nach oben unbeschränkt, denn wäre sie es nicht, so müsste die zugeordnete Polynomenfolge $\{P_{n_k}\}$ endlich viele Polynome enthalten, weil die Grade von P_{n_k} kleiner als oder gleich m sind. Nun wählen wir eine Teilfolge $\{P_{n_{k_j}}\}$ aus der Folge $\{P_{n_k}\}$, derart, dass die Höhenfolge dieser Teilfolge im engeren Sinne monoton gegen $+\infty$ strebt. Wir betrachten die algebraischen Zahlen $\eta_{n_{k_j}}$, die dieser Teilfolge entsprechen. Diese Zahlen $\eta_{n_{k_j}}$, deren Höhen monoton gegen $+\infty$ streben, sind voneinander verschieden. Da $H(P_{n_{k_j}}) \neq H(P_{n_{k_l}})$ für $j \neq l$ ist (denn $\{H(P_{n_{k_j}})\}$ ist im engeren Sinne monoton), sind die Polynome $P_{n_{k_j}}$ voneinander verschieden. Ferner sind $\eta_{n_{k_j}}$ auch voneinander verschieden, weil die Polynome $P_{n_{k_j}}$ irreduzibel sind. Damit ist die Behauptung wegen $H(\eta_{n_{k_j}}) = H(P_{n_{k_j}})$ bewiesen. Da höchstens eine dieser algebraischen Zahlen gleich ξ sein kann, gilt dann für $k_j \geq k'$ mit einer passenden Zahl k'

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{n_{k_j}} \neq \xi \quad \text{und} \\ &0 < | P_{n_{k_j}}(\xi) |_p < \frac{c_4}{H(\eta_{n_{k_j}})^{\frac{\eta_{n_{k_{j+1}}}}{\eta_{n_{k_j}}} \cdot c_3}} \,. \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Dabei sind alle Polynome $P_{n_{k_j}}$ vom Grade m. Nennt man $\frac{n_{k+1}}{n_k} = s_k$, kann man die obige Ungleichung für $k_j \geq k'$ in der Form

$$0 < | P_{n_{k_j}}(\xi) |_p < \frac{c_4}{H(\eta_{n_{k_j}})^{s_{k_j} \cdot c_3}} \tag{93}$$

schreiben. Da $c_3 > 0$ ist und $s_k \to +\infty$, gilt $s_{k_j} \cdot c_3 \to +\infty$. Es muss also

$$\mu(\xi) \leq m \tag{94}$$

sein.

Um den Beweis zu vollenden, wollen wir noch die komplementäre Ungleichung $\mu(\xi) \geq m$ zeigen.

a) Ist $m = 1$, so ist immer $\mu(\xi) \geq 1$. Unter Beachtung von (94) erhalten wir hieraus

$$\mu(\xi) = 1 \,.$$

b) Es sei $m > 1$. Nun wollen wir die Relation (B) von § 1 für alle Polynome $P(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten zeigen, deren Grade kleiner als m sind. Dazu betrachten wir das Polynom

$$P(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_l x^l \,, \; 1 \leq l < m, \; d_i \in \mathrm{Z} \; (i = 0, \ldots, l)$$

und setzen wir $x = \xi$ in diesem Polynom. Dann gilt

$$P(\xi) = P(\eta_{n_\nu} + r_{n_\nu}) = P(\eta_{n_\nu}) + r_{n_\nu} \cdot \beta_{n_\nu} \,, \tag{95}$$

wobei ξ, η_{n_ν} und r_{n_ν} mit (64), (65) und (66) gegeben sind. Aus Hilfssatz 1 in §3, da $1 \leq l < m$ ist, erhält man

$$| P(\eta_{n_\nu}) |_p \geq \frac{c_5}{H(\eta_{n_\nu})^{m-1} \cdot H(P)^m} \quad (c_5 = c_5(m, r) > 0) \,.$$

Die letzte Ungleichung kann mit Berücksichtigung von (70) in der Form

$$| P(\eta_{n_\nu}) |_p \geq \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_\nu} \cdot H(P)^m} \tag{96}$$

geschrieben werden. Ferner gilt wegen (78) und (79)

$$| r_{n_\nu} |_p \cdot | \beta_{n_\nu} |_p \leq c_4 \cdot c_2^{-n_{\nu+1}}, \tag{97}$$

wobei $\dfrac{\rho'}{|r|_p} = c_2 (> 1)$ und $c_1 \cdot M' = c_4$ sind. Mit Hilfe von (82) schreiben wir die letzte Ungleichung als

$$| r_{n_\nu} |_p \cdot | \beta_{n_\nu} |_p \leq c_4 \cdot c_0^{-c_8 \cdot n_{\nu+1}}. \tag{98}$$

Es sei nun $H(P)$ gegeben; betrachten wir die Doppelungleichung

$$c_0^{n_k} \leq H(P) < c_0^{n_{k+1}}. \tag{99}$$

Die Zahl n_k, die (99) genügt, ist eindeutig bestimmt, weil die Zahlen $c_0^{n_k}$ im engeren Sinne monoton wachsen. Jetzt unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem $H(P)$ zum ersten oder zum zweiten der folgenden Teilintervalle gehört:

a) $$c_0^{n_k} \leq H(P) < c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}},$$

b) $$c_0^{\frac{n_{k+1}}{\lambda}} \leq H(P) < c_0^{n_{k+1}}.$$

Dabei ist $\lambda > 1$ eine später zu erklärende natürliche Zahl.

Zu a). Es sei $H(P) = H$. Da $c_0^{n_k} \leq H$ und $H^\lambda < c_0^{n_{k+1}}$ sind, erhalten wir

$$\frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k} \cdot H^m} > \frac{c_5}{H^{2m-1}} \tag{100}$$

und

$$c_4 \cdot c_0^{-c_8 \cdot n_{k+1}} < c_4 \cdot H^{-\lambda c_8}. \tag{101}$$

Wenn die Zahl λ so gewählt wird, dass sie der Ungleichung

$$c_3 \lambda > 2m - 1 \tag{102}$$

genügt, wird

$$H^{\lambda c_8} > \frac{c_4}{c_5} \cdot H^{2m-1}$$

für $H > H_1$ mit passend gross gewähltem H_1, d.h.

$$\frac{c_5}{H^{2m-1}} > \frac{c_4}{H^{\lambda c_8}} \quad (\text{für } H > H_1). \tag{103}$$

Nun gehen wir mit $\nu = k$ in (96) und (98) ein. Dann sind

$$| P(\eta_{n_k}) |_p \geq \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_k} \cdot H^m} \tag{104}$$

und

$$| r_{n_k} |_p \cdot | \beta_{n_k} |_p \leq c_4 \cdot c_0^{-c_3 \cdot n_{k+1}} \tag{105}$$

erfüllt. Aus (100), (101), (102), (103), (104) und (105) ergibt sich

$$| P(\eta_{n_k}) |_p > | r_{n_k} |_p \cdot | \beta_{n_k} |_p \,. \tag{106}$$

(106) und (95) geben uns nun

$$| P(\xi) |_p = | P(\eta_{n_k}) |_p$$

für $H > H_1$. Unter Beachtung von (100), (104) und dieser letzten Gleichung erhält man

$$| P(\xi) |_p > \frac{c_5}{H^{2m-1}} \,. \tag{107}$$

Zu b). In diesem Falle sind $c_0^{n_{k+1}} \leq H^\lambda$ und $H < c_0^{n_{k+1}}$. Wir gehen mit $\nu = k + 1$ in (96) und (98) ein. Dann erhalten wir

$$| P(\eta_{n_{k+1}}) |_p \geq \frac{c_5}{c_0^{(m-1)n_{k+1}} \cdot H^m} \geq \frac{c_5}{H^{\lambda(m-1)+m}} \tag{108}$$

und

$$| r_{n_{k+1}} |_p \cdot | \beta_{n_{k+1}} |_p \leq c_4 \cdot c_0^{-c_3 \cdot n_{k+2}} \,. \tag{109}$$

Aus (62) folgt

$$\frac{n_{k+2}}{n_{k+1}} > \mu \quad \text{für } k > \check{k} \tag{110}$$

für eine hinreichend grosse Zahl $\check{k}$. Dabei ist μ eine positive Zahl, deren Wert später erklärt werden wird. Aus (109) und (110) ergibt sich

$$| r_{n_{k+1}} |_p \cdot | \beta_{n_{k+1}} |_p \leq c_4 \cdot H^{-c_3 \cdot \mu} \tag{111}$$

für $k > \overline{\overline{k}}$ mit $\overline{\overline{k}} = \text{Max}\,(k^{***} + 1, k', \check{k})$. Nun wählen wir die Zahl μ so, dass

$$\mu c_3 > \lambda(m-1) + m \tag{112}$$

ist. Für $H > H_2$, wobei H_2 eine genügend grosse Zahl ist, gilt dann

$$H^{\mu c_3} > \frac{c_4}{c_5} \cdot H^{\lambda(m-1)+m} \,.$$

Hieraus ergibt sich

$$\frac{c_5}{H^{\lambda(m-1)+m}} > \frac{c_4}{H^{\mu c_8}}. \tag{113}$$

Wegen (108), (111), (112), und (101) erhält man

$$|P(\eta_{n_{k+1}})|_p > |r_{n_{k+1}}|_p \cdot |\beta_{n_{k+1}}|_p. \tag{114}$$

Aus (114) und (95) folgt

$$|P(\xi)|_p = |P(_{n_{k+1}})|_p$$

für $H > H_2$. Diese Gleichung und (108) geben uns endlich die folgende Ungleichung :

$$|P(\xi)|_p > \frac{c_5}{H^{\lambda(m-1)+m}}. \tag{115}$$

Nun vereinigen wir a) und b). Es sei $c_0^{n_{\bar{\bar{k}}}} = H_0$. Nimmt man $H > H_0$, so wird $k \geq \bar{\bar{k}}$. Also für $H >$ Max (H_0, H_1, H_2) erhält man in beiden Fällen

$$|P(\xi)|_p > \frac{c_5}{H(P)^{m+\lambda(m-1)}}, \tag{116}$$

weil $m + \lambda(m-1) > 2m - 1$ wegen $\lambda > 1$ ist. Damit ist die Relation (B) von §1 gezeigt worden, d.h.

$$\mu(\xi) \geq m. \tag{117}$$

Ans (94) und (115) folgt jetzt $\mu(\xi) = m$. Mit anderen Worten gehört $F(r)$ der p-adischen Unterklasse U_m an.

LITERATUR

[1] ALNIAÇIK, K. : *On the subclasses U_m in Mahler's classification of the transcendental numbers*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **44** (1979), 39—82.

[2] COHN, H. : *Note on almost-algebraic numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 1042-1045.

[3] GÜTING, R. *Approximation of algebraic numbers by algebraic numbers*, Michigan Math. J. **8** (1961), 149-159.

[4] İÇEN, O.Ş. : *Anhang zu den Arbeiten "Über die Funktionswerte der p-adisch elliptischen Funktionen I und II"*, Ist. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, **38** (1973), 25-35.

[5] LEVEQUE, W.J. : *On Mahler's U numbers*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 220-229.

[6] MAHLER, K. : *Über eine Klassen-Einteilung der p-adischen Zahlen*, Math. (Leiden) 3 (1935), 177-185.

[7] MORRISON, J.F. : *Approximation of p-adic numbers by algebraic numbers of bounded degree*, Journal of Number Theory **10** (1978), 334-350.

[8] ORYAN, M.H. : *Über gewisse Potenzreihen, die für algebraische Argumente Werte aus den Mahlerschen Unterklassen U_m nehmen*, İst. Üniv. Fen Fak. Mec. Seri A, 45 (1980), 1—42.

[9] SCHNEIDER, Th. : Einführung in die Transzendenten Zahlen, Berlin, Göttingen-Heidelberg (1957).

[10] ŞENKON, H. : *p-adik alanda bazı kuvvet serilerinin değerlerinin transandantlığı* (*Türkisch*), Silivri'de yapılan 2. yurtiçi matematikçiler toplantısı, 22-25 Nisan 1976, İstanbul (1977).

[11] WIRSING, E. : *Approximation mit algebraischen Zahlen beschränkten Grades*, J. reine angew. Math. 206 (1961), 67-77.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ
VEZNECİLER-İSTANBUL

ÖZET

Bu çalışmada katsayıları rasyonel olan bazı boşluk serileri ele alınmakta ve bu tür boşluk serilerinin belirli koşullar altında, sıfırdan farklı cebirsel argümanlar için U_m sınıfına ait değerler aldığı gösterilmektedir. Daha sonra bu sonuç, cebirsel katsayılı kuvvet serilerine genelleştirilmekte ve ayrıca, p-adik alana aktarılmaktadır.