NOTE SUR LES RÉSEAUX DE TISSOT

F. ŞEMİN

Si un réseau de lignes othogonales R d'une surface S est transformé par un point P', invariablement attaché au trièdre trirectangle défini par les tangentes aux lignes du réseau et par la normale à S, en un autre réseau orthogonal, c'est un réseau de TISSOT. Seul le cylindre quelconque satisfait à la condition de posséder un réseau de TISSOT indépendant du choix de P'. Les lignes du réseau R se composent alors d'une part des sections droites et d'autre part des génératrices du cylindre.

Dans l'espace euclidien à trois dimensions soit S une surface de classe au moins 3. Considérons sur S un réseau orthogonal de lignes R et soient a, a* leurs vecteurs tangents unitaires. A chaque point P de S attachons le trièdre trirectangle P(a, a*, n), n étant le vecteur normal unitaire de S en P. Soit alors P' un point invariablement lié à ce trièdre, qui décrit une surface S' quand P décrit S. Si le réseau orthogonal R que l'on a envisagé sur S se transforme par P' en un autre réseau orthogonal R' sur S', R sera appelé un *réseau de* TISSOT. S. V. DENISCO a cherché [1] les *surfaces pour lesquelles le fait de posséder un réseau de* TISSOT *est indépendant du choix de* P'. D'après la revue (Mathematical Review) - Volume **53** p. 1611 - voici ce qui a *été* obtenu par DENISCO à ce sujet: *La condition nécessaire et suffisante pour que le fait d'être un réseau de* TISSOT *soit indépendant du choix de P' est que le réseau R soit un réseau formé de géodésiques, ce qui entraîne que S, s'il n'est pas plane, soit une surface réglée dont les génératrices constituent le réseau en question.*

Au premier abord, ce résultat semble loin de refléter la réalité, puisqu' une surface possédant un réseau orthogonal de géodésiques n'est, avant tout, qu'une surface développable. Ce fait bien connu, se déduit immédiatement de la formule de GAUSS [3, 178]

$$K = g_2 - \bar{g}_1 - (g^2 + \bar{g}^2) \tag{1}$$

où K est la courbure totale, g et $\bar{g}$ étant les courbures géodésiques des lignes du réseau, et les indices inférieurs 1, 2 désignant les dérivations invariantes effectuées dans les directions définies par les vecteurs $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^*$. De plus, nous verrons dans un instant qu'on ne sera pas en présence d'une surface développable quelconque, mais tout simplement, d'un cylindre général. Ajoutons encore que le réseau R sera constitué dans ce cas, par les génératrices et par les sections droites dudit cylindre qui lui sont alors les lignes de courbure.

En effet, si $\mathbf{x}$ est le vecteur position de P, P' sera défini par le vecteur

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + m\,\mathbf{a} + n\,\mathbf{a}^* + p\,\mathbf{n}, \tag{2}$$

où m, n, p sont des constantes.

D'après les formules de DARBOUX - RIBAUCOUR, relatives aux lignes du réseau R [3, (1 — 3a)], c'est-à-dire, d'après les formules

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_1 = \quad g\,\mathbf{a}^* + \mathrm{r}\,\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{a}_1^* = -g\,\mathbf{a} + t\,\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{n}_1 = -\mathrm{r}\,\mathbf{a} - t\,\mathbf{a}^*, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{a}_2 = \quad \bar{g}\,\mathbf{a}^* + t\,\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{a}_2^* = -\bar{g}\,\mathbf{a} + \bar{\mathrm{r}}\,\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{n}_2 = -t\,\mathbf{a} - \bar{\mathrm{r}}\,\mathbf{a}^*, \end{array}\right. \tag{3}$$

les tangentes aux lignes coordonnées de S' sont données par

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \quad (1 - ng - pr)\,\mathbf{a} + (mg - pt)\,\mathbf{a}^* + (mr + nt)\,\mathbf{n}\,, \\ \mathbf{y}_2 &= -(n\bar{g} + pt)\,\mathbf{a} + (1 + m\bar{g} - p\bar{r})\,\mathbf{a}^* + (mt + n\bar{r})\,\mathbf{n}\,, \end{aligned} \tag{4}$$

où r, $\bar{\mathrm{r}}$ sont les courbures normales relatives aux directions $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^*$, tandis que t est la torsion géodésique correspondant à la direction $\mathbf{a}$ au point P.

La condition d'orthogonalité des lignes coordonnées de S' étant $y_1 \cdot y_2 = 0$ cela donnera

$$(5) \quad (g\bar{g} + rt)\,m^2 + (g\bar{g} + \bar{r}t)\,n^2 + (r + \bar{r})\,tp^2 + (gt + \bar{g}r)\,np - (\bar{g}t + g\bar{r})\,mp$$
$$+ (r\bar{r} + t^2)\,mn + gm - \bar{g}n - 2tp = 0.$$

Pour que cette orthogonalité ait lieu quelle que soit la donnée du point P', c'est-à-dire, celle des valeurs de m, n, p, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$(6) \quad \begin{array}{l} g\bar{g} + rt = 0, \quad g\bar{g} + \bar{r}t = 0, \quad (r + \bar{r})\,t = 0, \quad gt + \bar{g}r = 0, \\ \bar{g}t + g\bar{r} = 0, \quad K = r\bar{r} + t^2 = 0, \quad g = 0, \quad \bar{g} = 0, \quad t = 0, \end{array}$$

tout le long des lignes du réseau R.

Si on laisse de côté le cas du plan, c'est-à-dire, celui où on a à la fois $r = \bar{r} = 0$, ce système est satisfait si

$$(7) \qquad t = 0, \quad g = 0, \quad \bar{g} = 0, \quad r = 0 \quad (\text{ou bien } \bar{r} = 0)$$

tout le long des lignes du réseau R.

Si dans les formules (3) on tient compte des relations (7), on voit immédiatement que

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0.$$

Ce qui montre que la direction définie par le vecteur a est une direction fixe. Il en résulte que l'une des familles du réseau R est constituée par des droites ayant toutes la même direction. Cela veut-dire que la surface correspondante S est un cylindre.

On arrive à la même conclusion en interprétant les relations (7). En effet, d'après les trois premières relations (7), les deux familles du réseau R sont à la fois des lignes de courbure et des lignes géodésiques de S. Ce sont donc des courbes planes dont les plans coupent S orthogonalement. Mais il suit aussi de $g = 0$ et $r = 0$ que l'une des familles de R sont des droites. Ces droites devant couper orthogonalement les plans des lignes de l'autre famille, constituent donc un cylindre.

Théorème. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un réseau de* TISSOT *d'une surface S soit indépendant du choix du point P', invariablement lié au trièdre trirectangle dont les deux premiers axes sont tangents aux lignes du réseau, est que la surface S soit, le plan mis à part, un cylindre quelconque. Les lignes du réseau sont alors les sections droites et les génératrices de ce cylindre.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] DENISCO, S. V. : Visnic L'viv Derz. Univ. Ser. Meh. - Mat. 1972, no. 7, 91-95, 136.

[2] ŞEMİN, F. : *Notes sur les dérivées invariantes*, Ist. Univ. Fen Fak, Mec. seri A, 19 (1954), 175-179.

[3] ŞEMİN, F. : *Sur les champs de vecteurs tangentiels*, Ist. Univ. Fen Fak. Mec. seri A, 39 (1975), 69-106.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL - TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 19 février 1976)

ÖZET

Bir S yüzeyinin birbirini dik kesen iki eğri ailesinden oluşan bir R eğri ağı, ağ eğrilerinin teğetleri ve yüzey normalinin tanımladıkları dik üçyüzüyle değişmez biçimde bağlı bir P' noktasınca yeni bir dik ağa dönüştürülüyorsa, R bir TISSOT ağıdır. P' nün seçimine bağlı olmayan TISSOT ağlı tek yüzey, genel silindirdir. Bunun dik kesitleriyle anadoğruları, R nin eğrileridir.