SUR LES COEFFICIENTS DES FONCTIONS UNIVALENTES

SUZAN KAHRAMANER

On pourrait employer les théorèmes fondamentaux de la distribution des valeurs [1] pour borner supérieurement les coefficients d'une fonction univalente. Bien que l'on n'arrive pas à une limite précise, il sera intéressant de constater la simplicité du procédé[1]).

1. Position du problème

Considérons la famille (S) des fonctions

$$w(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = u(z) + iv(z) \tag{1.1}$$

univalentes et normées dans le cercle unité. $\{w(0) = a_0 = 0,\ w'(0) = a_1 = 1\}$. Le module d'une fonction de la famille (S) est borné supérieurement et inférieurement à un point quelconque du cercle $|z| \leqq r < 1$:

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqq |w(z)| \leqq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{1.2}$$

Il s'agit de trouver une borne supérieure pour les modules des coefficients a_n de (1.1). Calculons d'abord a_n.

$z = re^{i\varphi}$ étant un point sur la circonférence, $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$ un point intérieur du cercle de rayon r et $u(z)$ la partie réelle de (1.1), la formule de Poisson donne:

$$w(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z) \left(\frac{z+\zeta}{z-\zeta} \right) d\varphi. \tag{1.3}$$

Comme $\left| \frac{\zeta}{z} \right| \leqq 1$,

1) Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à M. le Prof. R. NEVANLINNA qui comme toujours m'a soutenue avec ses précieux conseils.

$$\frac{z+\zeta}{z-\zeta}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n$$

représente la somme d'une série géométrique uniformément convergente à l'on peut intégrer terme à terme :

$$w(\zeta)=\zeta+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\zeta^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n\right]d\varphi, \tag{1.3'}$$

d'où l'on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\,d\varphi=0,\\ a_1&=\frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\,e^{-i\varphi}\,d\varphi=1,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_n&=\frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)\,e^{-in\varphi}\,d\varphi.\end{aligned}\right. \tag{1.4}$$

On a :

$$|a_n|\,r^n\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|\,d\varphi. \tag{1.5}$$

Désignons par u^+ le nombre u ou zéro suivant que $u\geq 0$ ou $u<0$ et par u^- le nombre $-u$ ou zéro suivant que $u\leq 0$ ou $u>0$.
Alors $u=u^+-u^-$ et on a de la première égalité de (1.4) :

$$\int_0^{2\pi}u^+(r,\varphi)\,d\varphi=\int_0^{2\pi}u^-(r,\varphi)\,d\varphi. \tag{1.6}$$

Comme $|u|=u^++u^-$, on déduit de (1.5) à l'aide de (1.6) :

$$|a_n|\,r^n\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(u^++u^-)\,d\varphi\leq\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u^+(r,\varphi)\,d\varphi. \tag{1.7}$$

2. Application des théorèmes fondamentaux des fonctions méromorphes

Formons maintenant une fonction méromorphe à l'aide de la fonction (1.1) :

$$f(w) \equiv e^w = 1 + z + (a_2 + 1/2) z^2 + \cdots \tag{2.1}$$

$$\{f(w) \neq 0, \ \infty, \qquad f(0) = 1\}.$$

Etant donnée une valeur a, désignons par $n(r, a)$ le nombre des racines de $f(w) = a$ comprises dans le domaine $|z| \leqq r < 1$, chaque racine étant comptée autant de fois que son ordre indique. Posons ensuite pour la distribution des modules des racines

$$N(r, a) = \int_0^r \frac{n(t, a) - n(0, a)}{t} dt + n(0, a) \log r \tag{2.2}$$

$\{$on a $N(r, f) = N(r, \infty)\}$ et pour la valeur moyenne du logarithme positif $\log^+ |f|$ $(a = \infty)$ sur la circonférence $|z| = r$:

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi \tag{2.3}$$

$\{\log^+ |f|$ désigne le nombre $\log |f|$ ou zéro suivant que $|f| \geqq 1$ ou $0 \leqq |f| < 1\}$.

D'après le premier théorème fondamental [1], étant donnée une fonction $f\{w(z)\}$ uniforme et méromorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, il existe une fonction réelle $T(r)$ appelée la fonction caractéristique indépendante de a et telle que l'on a pour toute valeur de a

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + h(r, a), \tag{I}$$

$h(r, a)$ restant borné pour $r < 1$.

Pour la fonction (2.1), $N(r, f) = 0$ et comme $\log^+ |f| = u^+$, on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(r, \varphi) \, d\varphi \tag{2.4}$$

d'où

$$m(r, f) = T(r), \tag{I'}$$

en négligeant la quantité bornée. Nous pouvons donc exprimer la borne supérieure de $|a_n|$ dans (1.7) en fonction de $m(r, f)$ ou $T(r)$:

$$(2.5) \qquad |a_n| r^n \leq 4m(r, f) = 4T(r).$$

Appliquons maintenant le second théorème fondamental : $f\{w(z)\}$ étant une fonction méromorphe avec un développement (2.1) $f(w) = c_0 + c_k z_k + \cdots$ dans le voisinage de l'origine ($c_0 \neq 0$, $c_k \neq 0$) et $z_1, z_2, \ldots, z_q$ $(q \geq 3)$ des nombres quelconques finis ou non, mais différents entre eux, on aura l'inégalité

$$\text{(II)} \qquad (q-2)\, T(r) < \sum_{\nu=1}^{q} N(r, z_\nu) - N_1(r) + S(r) \qquad (z_q = \infty)$$

où

$$N_1(r) = \{2N(r, f) - N(r, f') + N(r, 1/f')\}$$

et $S(r)$ est égal à

$$S(r) = m(r, \sum_{1}^{q-1} \frac{f'}{f - z_\nu}) + m(r, \frac{f'}{f}) + \log\left|\frac{3}{kc_k}\right| + (q-1)\log\frac{2(q-1}{\delta},$$

δ étant un nombre inférieur à chacune des distances $|z_h - z_k|$, $(h \neq k)$.

Prenons $z_1 = 0$, $z_2 = 1/2$ et $z_3 = \infty$ $(q = 3)$. Alors $\delta \leq 1/2$. Comme $f(w) \equiv e^w \neq 0, \infty$, on a $N(r, f) = N(r, 1/f) = 0$. $w(z)$ étant univalente, $w'(z) \neq 0$; alors $N(r, f') = N(r, 1/f') = 0$, d'où $N_1(r) = 0$.

(II) prend la forme

$$\text{(II}') \qquad T(r) < N(r, 1/2) + S(r)$$

qui est plus grande que la borne supérieure de (2.5) :

$$(2.6) \qquad \tfrac{1}{4}|a_n| r^n < N(r, 1/2) + S(r).$$

Evaluons d'abord $N(r, 1/2)$ puis $S(r)$.

$N(r, 1/2)$ est le nombre des points $f = 1/2$ dans le cercle $|z| \leq r < 1$:

$$w = -\log 2 + 2\pi i n.$$

Soient le cercle $|z| \leq r$ dans le plan z et le domaine correspondant G_r daus le plan w avec le diamètre maximum d_r. On a alors :

$$2\pi\, n(r, 1/2) \leq d_r.$$

En majorant d_r avec la borne supérieure du module (1.2) on obtient :

$$(2.7) \qquad n(r, 1/2) \leq \frac{r}{\pi(1-r)^2}.$$

Comme $n(0, 1/2) = 0$, on a :

$$N(r,\ 1/2) = \int_0^r \frac{n(t,\ 1/2)}{t}\, dt \leq \frac{r}{\pi(1-r)}. \tag{2.8}$$

D'autre part, d'après (II), nous avons pour $S(r)$:

$$S(r) = m\,\{(r,\ \sum_{\nu=1}^{2} f'/(f-z_\nu)\} + m\,(r,\ f'/f) + \log 3 + 6 \log 2$$

et pour $0 < r < \varrho < 1$:

$$m\,(r,\ f'/f) < 24 + 2 \log 1/r + 3 \log 1/(\varrho - r) + 4 \log^+ T(\varrho,\ f),$$

$$m\,\{r,\ \sum_{\nu=1}^{2} f'/(f-z_\nu)\} < 24 + 2 \log 1/r + 3 \log 1/(\varrho - r) + 3 \log 2 + 4 \log^+ T(\varrho, f\,(f - 1/2)$$

Or

$$\log^+ T(\varrho,\ f\,(f - 1/2)) \leq \log^+ T(\varrho,\ f) + 2 \log 2.$$

Donc

$$m\,\{r,\ \sum_{\nu=1}^{2} f'/(f-z_\nu)\} < 24 + 2 \log 1/r + 3 \log 1/(\varrho - r) + 4 \log^+ T(\varrho,\ f) + 11 \log 2.$$

De là on obtient :

$$S(r) < 48 + 17 \log 2 + \log 3 + 4 \log 1/r + 6 \log 1/(\varrho - r) + 8 \log^+ T(\varrho,\ f). \tag{2.9}$$

Nous pouvons estimer $T(\varrho,\ f)$ à partir de $m(\varrho,\ f)$ et le module maximum (1.2) de la fonction univalente w :

$$\log^+ T(\varrho,\ f) \leq \log 1/(1-\varrho)^2.$$

En posant $2\varrho = 1 + r$, on a :

$$\log^+ T(\varrho,\ f) < 2 \log 2 + 2 \log 1/(1 - r),$$

$$\log 1/(\varrho - r) = \log 2 + \log 1/(1 - r).$$

Désignons la partie constante de la borne supérieure de $S(r)$ par

$$C = 48 + 39 \log 2 + \log 3.$$

Nous obtenons alors :

(2.10) $$S(r) < C + 4 \log 1/r + 22 \log 1/(1-r).$$

Le quotient de $S(r)$ par $\log 1/(1-r)$ reste borné pour $r \to 1$. On pourra donc écrire

(2.11) $$S(r) = O\{\log 1/(1-r)\}.$$

Remplaçons les valeurs (2.8) de $N(r, 1/2$ et (2.11) de $S(r)$ dans (2.6) provenant de l'application du second théorème fondamental (II′) :

(2.12) $$\tfrac{1}{4} \mid a_n \mid r^n < r/\pi(1-r) + O\{\log 1/(1-r)\}$$

d'où :

(2.13) $$\mid a_n \mid < 4/\pi\, r^{n-1}(1-r) + 4\, O\{\log 1/(1-r)\} / r^n.$$

Le second terme du second membre de (2.13) qui est de l'ordre de $\log 1/(1-r)$ est négligeable par rapport au premier terme de l'ordre de $1/(1-r)$ pour $r \to 1$. Ce premier terme atteint sa plus petite valeur pour $r = 1 - 1/n$:

$$1/r^{n-1}(1-r) < ne.$$

On obtient ainsi :

(2.14) $$\mid a_n \mid < 4ne/\pi.$$

Remarque. Pour les coefficients des fonctions univalentes, il existe déjà l'estimation de LITTLEWOOD avec $\mid a_n \mid < en$ et celle de BAZILEVIC avec $\mid a_n \mid < en/2 + 1{,}51$.. HAYMAN [2] a démontré pour une fonction déterminée de la famille (S), $\mid a_n \mid \leqq n$ pour toutes les grandes valeurs de n.

Pour obtenir la borne (2.14), nous avons estimé le nombre $n(r, 1/2)$ des racines de $f(w) = 1/2$ comprises dans le domaine $\mid z \mid \leqq r < 1$, en le majorant avec le diamètre maximum d_r du domaine image Gr dans le plan w et nous avons borné le diamètre d_r avec le double du module $\mid w(z) \mid \leqq r/(1-r)^2$, d'où :

(2.7) $$n(r, 1/2) \leqq d_r/2\pi \leqq r/\pi \cdot (1-r)^2.$$

On pourrait esssyer d'améliorer le résultant précédent en prenant une fonction $f(\eta w)$ à la place de la fonction $f(w)$, η étant une constante quelconque $(\eta \neq 0)$. Alors on peut présumer ce qui suit : lorsque la famille des fonctions (1.1) représente d'une manière univalente le cercle unité $\mid z \mid < 1$ sur le plan w, il existe un nombre $\eta\,(\mid \eta \mid = 1)$ tel que la fonction $\eta\, w(z)$ représente le cercle $\mid z \mid \leqq r < 1$ sur un domaine D_r où le nombre $n(r, 1/2)$ des points :

$$w = \lambda + 2n\, in \qquad (n = 0, \pm 1 \ldots), \quad (\lambda = \text{const.})$$

est plus petit que

$$r/2\pi\cdot(1-r)^2+\text{const.}$$

Dans ce cas, on peut évidemment exprimer notre estimation précédente (2.14) avec plus de précision sous la forme de

$$|a_n| < 2\,ne.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] NEVANLINNA R. : **Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes,** GAUTHIER-VILLARS, **Paris (1929).**

[2] HAYMAN W. K. : **Multivalent functions,** CAMBRIDGE **Tracts in Mathematics and Math. Physics No. 48, 11, (1958).**

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜSÜ
İSTANBUL, TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 4 Novembre 1962)

ÖZET

Bu yazıda değer dağılımı teorisinin esas teoremleri yardımiyle yalınkat bir fonksiyonun katsayıları için bir üst sınır hesaplanmaktadır. Kesin bir limite erişilememekle beraber, kullanılan yolun sadeliği ilgi çekicidir.