

ABBILDUNG DURCH ZWEI NETZE MIT EINER GEMEINSAMEN LEITGERADEN

FARUK AYKAN

Wird ein Objekt des projektiven Raumes R_3 mittels der Strahlen eines linearen Netzes auf die Bildebene π projiziert, so entsteht ein *Netzriss* des Objektes. Durch die Verwendung *zweier* Netze lässt sich zwischen den Objekten des R_3 und ihren Bildpaaren eine *umkehrbar eindeutige* Beziehung herstellen. Die Abbildung durch zwei Netze mit voneinander verschiedenen Leitgeradenpaaren ist bekannt ¹⁾. Dagegen scheint der Fall, dass die Netze *eine gemeinsame Leitgerade* d besitzen, noch nicht behandelt worden zu sein; die Untersuchung dieses Falles ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Die charakteristischen Eigenschaften einer in dieser Weise definierten Netzabbildung folgen im Wesentlichen aus der Tatsache, dass die gemeinsamen Strahlen beider Netze (die *Doppelsehstrahlen*) die Erzeugenden einer *Quadrik* Φ sind. In den nachstehenden Zeilen wird u. a. bewiesen: Die *Punkte* des R_3 werden durch die *geordneten Punktepaare* von π dargestellt, deren Trägergerade den Spurpunkt D von d enthalten. Die *Geraden* des Raumes werden i. a. auf die Paare der *Kegelschnitte zweier Gebüsch* abgebildet, die durch den Spurkegelschnitt k von Φ perspektiv aufeinander bezogen werden. Die Untersuchung der Frage, welche Kurven des R_3 durch die *Geradenpaare* von π dargestellt werden, führt auf bestimmte *Raumkurven dritter Ordnung*. Jede *Ebene* α des R_3 wird i. a. durch eine *perspektive Cremona-Verwandtschaft dritten Grades* V mit dem Zentrum D dargestellt, deren Inzidenzlinien die Bildspur a von α und der Kegelschnitt k sind; das *Strahlfeld* α wird auf zwei einander in V entsprechende *Kegelschnittsbündel* abgebildet.

1. Die Abbildung von Punkten. Ein Strahlennetz N_1 des projektiven dreidimensionalen Raumes R_3 sei durch seine im Folgenden stets reell vorausgesetzten Leitgeraden d, d_1 gegeben; ein Netz N_2 durch die Leitgerade d und eine zu d und d_1 windschiefe Leitgerade d_2 . Wir betrachten die Strahlen beider Netze als *Sehstrahlen* und denken die Punkte des Raumes R_3 mittels dieser Strahlen auf die Bildebene π projiziert; jede Figur des Raumes wird dabei auf ein Paar einander *zugeordneter Netzrisse* abgebildet. Die gemeinsamen

¹⁾ Vgl. F. HOHENBERG: *Mb. Math, Phys.* 42, 425-437 (1935).

Strahlen der Netze N_1, N_2 stellen die *Doppelsehstrahlen* dar; sie bilden die Erzeugendenschar der durch die Leitgeraden d, d_1, d_2 bestimmten Quadrik Φ . Die Bildebene π sei stets so gewählt, dass sie Φ nach einem nichtzerfallenden Kegelschnitt k schneidet²⁾. Die in π liegenden Spurpunkte D, D_1, D_2 der Geraden d, d_1, d_2 gehören k an; die Geraden $h_1 = DD_1, h_2 = DD_2$ sind die in π liegenden Strahlen der beiden Netze (Abb. 1).

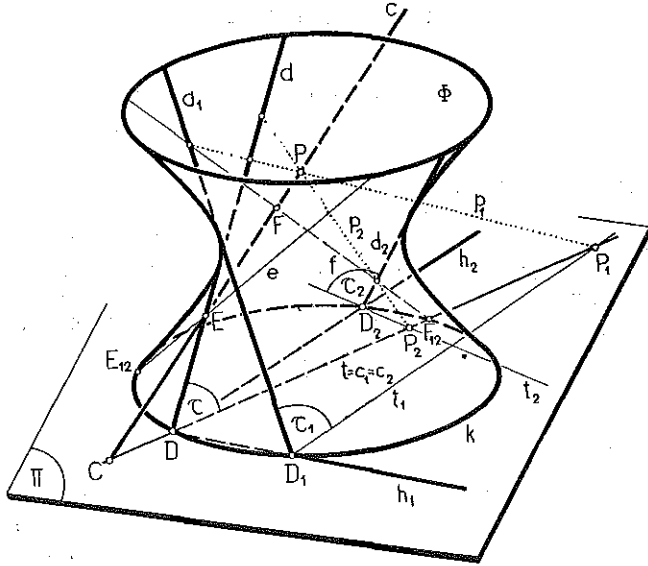


Fig. 1

Jeder Punkt P des Raumes, der weder Φ noch π angehört, legt in Verbindung mit den Geraden d, d_1, d_2 drei Ebenen τ, τ_1, τ_2 fest, die π in den Geraden t, t_1, t_2 der Büschel $D(\pi), D_1(\pi), D_2(\pi)$ schneiden. Die durch P laufenden Strahlen der Netze N_1, N_2 sind die Geraden $p_1 = [\tau\tau_1]$ bzw. $p_2 = [\tau\tau_2]$; ihre Spurpunkte $P_1 = [tt_1]$, bzw. $P_2 = [tt_2]$ sind die *Netzrisse* von P . Die ersten Netzrisse aller Punkte von τ_1 liegen auf t_1 , die zweiten Netzrisse aller Punkte von τ_2 gehören t_2 an; die Ebenen des Büschels d_1 sind daher *im ersten Netzriss projizierend* (*strahlprojizierend*), die Ebenen des Büschels d_2 *im zweiten Netzriss*. Die Netzrisse P_1, P_2 jedes Punktes P der Ebene τ liegen auf t ; alle Ebenen des Büschels d sind daher *in beiden Netzrissen strahlprojizierend* (*doppelprojizierend*). Hieraus folgt, dass irgendzwei Punkte P_1, P_2 von π , deren Verbindungsgerade t durch D läuft, den *ersten und zweiten Netzriss eines bestimmten Punktes* P darstellen, nämlich des Schnittpunktes der mit P_1 bzw. P_2 inzidenten

²⁾ Die Annahme, dass π eine Tangentialebene von Φ ist, soll in einer folgenden Note erörtert werden.

Strahlen p_1, p_2 der Netze N_1, N_2 . Für jeden Punkt P der Ebene $\tau_1' = [d_1 h_1]$, der weder auf d_1 noch auf h_1 liegt, wird $t_1 = h_1$ und daher $P_1 = D$; analog folgt für jeden nicht auf d oder h_1 liegenden Punkt P der Ebene $\tau' = [d h_1]$, dass $t = h_1$ und $P_1 = D_1$ wird. Diese beiden Ebenen werden im ersten Netzriss daher auf die Punkte D , bzw. D_1 abgebildet; wir bezeichnen sie als *punktprojizierend* für N_1 und in gleicher Weise die Ebenen $\tau_2'' = [d_2 h_2]$, $\tau'' = [d h_2]$ als *punktprojizierend* für N_2 .

Satz 1: Wird der Raum R_3 durch zwei Netze N_1, N_2 mit der gemeinsamen Leitgeraden d auf die Bildebene π projiziert, so werden die Punkte des Raumes, die weder der den Netzen gemeinsamen Quadrik Φ noch der Ebene π angehören, umkehrbar eindeutig auf die Punktepaare von π abgebildet, deren Trägergerade den Spurpunkt D von d enthalten. Die ersten (zweiten) Netzrisse aller Punkte, die einer durch d oder die Leitgerade d_1 (d_2) des Netzes N_1 (N_2) laufenden Ebene angehören, liegen auf der Spur der Ebene bzw. im Sparpunkt der anderen Leitgeraden, wenn die Ebene den in π liegenden Netzstrahl enthält.

Jeder Punkt E von Φ , der keiner Leitgeraden der Netze angehört, besitzt den auf k liegenden Spurpunkt E_{12} der mit E inzidenten Erzeugenden e von Φ zum ersten und zweiten Netzriss. Jeder Punkt C von π , der weder auf h_1 noch auf h_2 liegt, fällt mit seinen Netzrissen zusammen ($C_1 = C_2 = C$). Die Quadrik Φ und die Ebene π stellen daher die *Inzidenzflächen* der Netzabbildung dar; k ist die *Inzidenzkurve* der Bildfigur.

Liegt E auf d_1 , so stellt jeder Strahl p_1 , des in der Ebene $\tau = [Ed]$ liegenden Büschels $E(\tau)$ einen Strahl des Netzes N_1 dar, sein auf der Bildspur $e_1 = t$ von τ liegender Spurpunkt P_1 ist daher ein erster Netzriss von P ; das erste Netzbild von E ist die Gerade e_1 . Alle Punkte von d_1 sind daher *Hauptpunkte* der Verwandtschaft, die das Netz N_1 zwischen den Punkten des Raumes und denen von π hervorruft; die Strahlen des in π liegenden Büschels D sind *Hauptstrahlen* dieser Verwandtschaft. Der zweite Netzriss von E ist der (eindeutig bestimmte) Spurpunkt E_{12} der durch E laufenden Erzeugenden e von Φ ; da e im Büschel $E(\tau)$ enthalten ist, so ist E_{12} der von D verschiedene Schnittpunkt von e_1 und k . Die Punktreihe d_1 ($E\dots$) wird durch die Erzeugendenschar von Φ projektiv auf die Punktreihe k ($E_{12}\dots$) bezogen und diese Reihe wird aus D durch das mit ihr perspektiv liegende Strahlbüschel D ($e_1\dots$) projiziert. Die Reihe der auf d_1 liegenden Hauptpunkte ist demnach zum Büschel der entsprechenden Hauptstrahlen projektiv; dem Punkt $E = D_1$ entspricht die Gerade $e_1 = h_1$. Aus denselben Gründen ist jeder Punkt von d_2 ein Hauptpunkt der Verwandtschaft, die das Netz N_2 zwischen den Punkten des Raumes und denen von π hervorruft; die diesen Punkten entsprechenden Hauptstrahlen bilden gleichfalls das Büschel $D(\pi)$. Jeder Punkt der gemeinsamen Leitgeraden d von N_1, N_2 ist ein Hauptpunkt für beide Netzrisse; die ihm entsprechenden Hauptstrahlen e_1, e_2 gehören den Büscheln $D_1(\pi), D_2(\pi)$ an und

schneiden einander auf k . Die Punktreihe $d(E\dots)$ wird in diesem Sinn auf die *Projektivität* zwischen den Büscheln $D_1(\pi)$, $D_2(\pi)$ bezogen, deren Erzeugnis k ist. — Jeder Punkt C von h_1 besitzt *alle Punkte von h_1* zum ersten Netzriss, sein zweiter Netzriss ist C und Analoges gilt für die Punkte von h_2 . Die Punkte der Geraden h_1 , h_2 sind demnach auch *Hauptpunkte* der Netzrisse; die ihnen entsprechenden *Hauptstrahlen* fallen mit h_1 bzw. h_2 zusammen.

Satz 2: Bei der Abbildung des Raumes R_3 durch zwei Netze mit einer gemeinsamen Leitgeraden werden die Punkte der den Netzen gemeinsamen Quadrik Φ i. a. in beiden Rissen auf die Punkte des Sparkegelschnittes k von Φ und die Punkte der Bildebene π i. a. auf sich selbst abgebildet. Die Punkte der Leitgeraden und des in π liegenden Strahls jedes Netzes sind Hauptpunkte der Netzrisse. Jedem Hauptpunkt, der einer Leitgeraden eines Netzes angehört, entspricht ein Hauptstrahl, der den Spurpunkt der zweiten Leitgeraden enthält; jedem in π liegenden Hauptpunkt ist der mit ihm inzidente Netzstrahl zugeordnet.

2. Die Abbildung von Geraden. Jede Gerade c des Raumes, die nicht auf Φ liegt und weder die Leitgeraden d , d_1 , d_2 der Netze N_1 , N_2 noch die in π liegenden Netzstrahlen h_1 , h_2 schneidet, besitzt zwei Kegelschnitte c_1 , c_2 zum ersten bzw. zweiten Netzriss, nämlich die in π liegenden Spurkurven der durch die Geraden c , d , d_1 bzw. c , d , d_2 bestimmten Quadriken Γ_1 , Γ_2 . Die Inzidenzquadrik Φ schneidet die Gerade c in den *Inzidenzpunkten* E , F der Γ Geraden; die durch E und F laufenden Erzeugenden e , f von Φ gehören den Γ Quadriken Γ_1 , Γ_2 an; ihre Spurpunkte E_{12} , F_{12} liegen auf c_1 , c_2 und k . Die Quadriken Γ_1 , Γ_2 haben mit Φ die Geraden d , d_1 , e , f bzw. d , d_2 , e , f und miteinander die Geraden c , d , e , f gemeinsam. Die Kegelschnitte c_1 , c_2 treffen k in den Punkten D , D_1 , E_{12} , F_{12} bzw. D , D_2 , E_{12} , F_{12} und schneiden einander in C , D , E_{12} und F_{12} . Die Punkte D , D_1 von c_1 sind die ersten Netzrisse der Punkte D_1' , D' , in denen die Gerade c die beiden punktprojizierenden Ebenen $\tau_1' = [d_1 h_1]$, $\tau' = [d h_1]$ des ersten Netzrisses schneidet; die Punkte D , D_2 von c_2 stammen von den Schnittpunkten der Geraden c mit den Ebenen $\tau_2'' = [d_2 h_2]$, $\tau'' = [d h_2]$ her.

Umgekehrt lassen sich je zwei durch D , D_1 bzw. D , D_2 laufende Kegelschnitte c_1 , c_2 , die einander in zwei weiteren Punkten E_{12} , F_{12} von k schneiden, als *Netzrisse einer bestimmten Geraden c* ansehen; der vierte Schnittpunkt der Kegelschnitte ist der Spurpunkt C von c , die mit C inzidente gemeinsame Treffgerade der durch die Punkte E_{12} , F_{12} laufenden Erzeugenden e , f von Φ ist c . Die so definierten Kegelschnittspaare bilden ebenso wie die reellen Geraden des Raumes R_3 eine vierparametrische Mannigfaltigkeit. Die Kegelschnitte von π , die durch D und D_1 laufen, bilden eine dreiparametrische Mannigfaltigkeit; die Strahlen des Netzes N_1 , die einen solchen Kegelschnitt c_1 treffen, sind die Erzeugenden einer Quadrik Γ_1 . Alle Geraden von Γ_1 , die der gleichen

Schar angehören wie d , besitzen c_1 zum ersten Netzriss; die zweiten Netzrisse dieser Geraden bilden das *Büschel*, dessen Grundpunkte D, D_2 und die von D, D_1 verschiedenen Schnittpunkte E_{12}, F_{12} von c_1 und k sind. Alle Kegelschnitte c_1 , die durch D, D_1 laufen und k in *zwei festen Punkten* E_{12}, F_{12} schneiden, bilden ein Büschel; die durch D, D_2, E_{12}, F_{12} laufenden Kegelschnitte c_2 bilden ein zweites Büschel. Die Geraden c , die je einen Kegelschnitt der beiden Büschel zum ersten bzw., zweiten Netzriss haben, sind *die gemeinsamen Treffgeraden der mit E_{12} bzw. F_{12} inzidenten Erzzagenden e, f von Φ* . Somit gilt

Satz 3: Wird der Raum R_3 durch zwei Netze N_1, N_2 , die eine gemeinsame Leitgerade d besitzen, auf die Bildebene π projiziert, so werden die Geraden des Raumes, die gegenüber den Leitgeraden der Netze und der von diesen gebildeten Quadrik Φ allgemeine Lage besitzen, umkehrbar eindeutig auf die Kegelschnittspaare von π abgebildet, die einander im Spürpunkt D von d sowie zwei weiteren Punkten des Sparkegelschnitts k von Φ treffen und von denen jeder noch den Spürpunkt der zweiten Leitgeraden des betreffenden Netzes enthält. Die Strahlen jedes Netzes, das irgendzwei Erzeugende von Φ zu Leitlinien hat, werden durch die Kegelschnitte zweier Büschel dargestellt.

Die *Inzidenz* eines Punktes P mit einer Geraden c bewirkt Inzidenz der gleichnamigen Risse P_1, c_1 bzw. P_2, c_2 von P und c . Die Punkte P_1, P_2 gehören einem Strahl des Büschels D an; die Kegelschnitte c_1, c_2 haben die in Satz 3 beschriebene Lage. Jede *gerade Punktreihe* c ($P\dots$) wird daher durch die *Projektivität* dargestellt, die das Büschel $D(\pi)$ zwischen den auf den Kegelschnitten c_1, c_2 liegenden Punktfolgen $c_1(P_1\dots), c_2(P_2\dots)$ hervorruft. Das *Strahlbündel* mit dem Scheitel P wird auf die beiden *Kegelschnittsbündel* abgebildet, die durch die Grundpunkte D, D_1, P_1 bzw. D, D_2, P_2 bestimmt sind und die durch den Kegelschnitt k derart perspektiv aufeinander bezogen werden, dass je zwei Kegelschnitte c_1, c_2 der Bündel, die Netzrisse eines Bündelstrahls c sind, einander |ausser in D noch in zwei weiteren Punkten E_{12}, F_{12} von k schneiden.

Jede Gerade c , die die Quadrik Φ in einem Punkt allgemeiner Lage $E = F$ *berührt* oder den Kegelschnitt k in einem von D, D_1 und D_2 verschiedenen Punkt $C = E$ *schneidet*, wird in beiden Netzrissen durch zwei Kegelschnitte c_1, c_2 dargestellt, die einander und zugleich k in einem Punkt ($E_{12} = F_{12}$ bzw. $E_{12} = C$) *berühren*. Wenn c die Quadrik Φ in einem Punkt C von k berührt, so *oskulieren* sich die Kegelschnitte c_1, c_2 im Punkt $C = E_{12} = F_{12}$ und schneiden einander ausserdem in D ; mit k haben sie Berührung erster Ordnung, weil sie k noch in den Punkten D, D_1 bzw. D, D_2 schneiden. Jede auf Φ liegende Gerade, die *derselben Schar angehört wie d* , besitzt k zum ersten und zweiten Netzriss.

Jede Gerade c , die einen Hauptpunkt des durch N_1 oder N_2 bestimmten Netzrisses enthält und keiner punktprojizierenden Ebene angehört, besitzt als eigentliches erstes bzw. zweites Netzbild i.a. eine Gerade c_1 bzw. c_2 ; das Bild des Hauptpunktes ist einer der in Nr. 1 definierten Hauptstrahlen.

a) Wenn c die Gerade d_1 schneidet, so ist c_1 ein Strahl des Büschels $D_1(\pi)$; der zweite Netzriss von c ist i.a. ein Kegelschnitt c_2 .

b) Schneidet c die Gerade d_1 and d_2 , so ist c_1 ein Strahl des Büschels $D_1(\pi)$ und c_2 ein Strahl des Büschels $D_2(\pi)$; beide Gerade treffen einander im Spurpunkt C von c . Die Strahlen des durch die Leitgeraden d_1, d_2 bestimmten Netzes werden somit auf die Strahlpaare der Büschel $D_1(\pi), D_2(\pi)$ abgebildet.

c) Wenn c die gemeinsame Leitgerade d der Netze N_1, N_2 schneidet, so fallen die Geraden c_1, c_2 in der Spur t der Ebene $\tau = [cd]$ zusammen (vgl. Nr. 1). Die Punktreihe $c(P...)$ wird durch eine auf t liegende Projektivität dargestellt, die den Spurpunkt C von c und den von D verschiedenen Schnittpunkt F_{12} von k und t zu Doppelpunkten hat. Die Treffgeraden von d werden in diesem Sinn durch die Projektivitäten dargestellt, deren Trägergerade das Büschel $D(\pi)$ bilden und die einen von D verschiedenen Punkt von k zu einem Doppelpunkt haben. Diese Beziehung gilt insbesondere für die Strahlen des Bündels D .

d) Wenn c den in π liegenden Netzstrahl h_1 schneidet, so ist c_1 ein zu c windschiefe Gerade. Die Gerade c besitzt in diesem Fall zwei Inzidenzpunkte E, F allgemeiner Lage; c_1 verbindet die Netzrisse E_{12}, F_{12} dieser Punkte miteinander. Durch diesen Zusammenhang werden die Strahlen jedes Bündels, dessen Scheitel auf h_1 liegt, den Strahlen des Feldes π umkehrbar eindeutig zugeordnet.

Jede Gerade c , die zwei verschiedene Hauptpunkte eines und desselben Netzrisses enthält oder in einer punktprojizierenden Ebene liegt, wird in diesem Netzriss auf einen Punkt abgebildet; die Bilder der beiden (u. U. vereinigt liegenden) Hauptpunkte sind die ihnen entsprechenden Hauptstrahlen. Jenachdem c zugleich zwei, einen oder keinen Hauptpunkt des anderen Netzrisses trägt, ist der zweite Netzriss von c ein Punkt, eine Gerade oder ein Kegelschnitt.

e) Jede Gerade, die die Leitgeraden d, d_1 des Netzes N_1 trifft, ist ein Netzstrahl; ihr erster Netzriss ist ihr Spurpunkt C , ihr zweiter Netzriss ist die Gerade CD . Entsprechendes gilt für die Abbildung der Strahlen des Netzes N_2 .

f) Jede Gerade, die die Leitgeraden d, d_1, d_2 beider Netze schneidet, ist ein Doppelsehstrahl (eine Erzeugende von ϕ); beide Netzrisse einer solchen Geraden sind in ihrem auf k liegenden Spurpunkt vereinigt.

g) Jede Gerade, die der punktprojizierenden Ebene $\tau' = [dh_1]$ angehört,

wird nach Nr. 1 im ersten Netzriss auf den Punkt D_1 , im zweiten Netzriss auf die Gerade h_1 abgebildet.

h) Jede Gerade, die der Ebene $\tau_1' = [d, h_1]$ angehört, wird aus denselben Gründen im ersten Netzriss auf den Punkt D , im zweiten Netzriss aber auf einen Kegelschnitt abgebildet, der k in D berührt.

Satz 4: *Bei der Abbildung des Raumes R_3 durch zwei Netze mit einer gemeinsamen Leitgeraden werden die Geraden, die einen Hauptpunkt nur eines Netzrisses enthalten, i. a. in diesem Netzriss auf Gerade und im zugeordneten Netzriss auf Kegelschnitte abgebildet; Gerade, die je einen Hauptpunkt beider Netzrisse tragen, werden durch zwei Gerade dargestellt. Jede Gerade, die zwei Hauptpunkte eines Netzrisses enthält, wird in diesem Riss durch einen Punkt und im zugeordneten Riss durch einen Punkt, eine Gerade oder einen Kegelschnitt dargestellt, je nachdem sie zwei, einen oder keinen Hauptpunkt des zweiten Netzrisses trägt.*

3. Die Abbildung von Kurven Jede algebraische Kurve n . ter Ordnung c des Raumes, die nicht auf Φ liegt und weder die Leitgeraden d, d_1, d_2 der Netze N_1, N_2 noch deren in π liegende Strahlen h_1, h_2 schneidet, wird durch die Netze auf zwei algebraische Kurven $2n$. ter Ordnung c_1, c_2 von π abgebildet; nämlich die Spurkurven der Regelflächen $2n$. ten Grades Γ_1, Γ_2 , die durch c und die Geraden d, d_1 bzw. d, d_2 bestimmt sind. c ist eine einfache Leitlinie beider Flächen; die Geraden d, d_1 sind n -fache Leitgerade von Γ_1 , die Geraden d, d_2 sind n -fache Leitlinien von Γ_2 . Die Quadrik Φ schneidet c in den $2n$ Inzidenzpunkten der Kurve; die $2n$ Erzeugenden von Φ , die durch diese Punkte laufen, sind auch Erzeugende von Γ_1 und Γ_2 . Der Gesamtschnitt $4n$. ter Ordnung $[\Phi \Gamma_1]$ besteht daher aus den je u -fach zählenden Geraden d, d_1 und den genannten $2n$ Geraden; der Gesamtschnitt $[\Phi \Gamma_2]$ besteht aus den je n -fach zählenden Geraden d, d_2 und denselben $2n$ Erzeugenden von Φ . Am Gesamtschnitt $[\Gamma_1 \Gamma_2]$, der die Ordnung $4n^2$ besitzt, nimmt die Gerade d mit der Vielfachheit n^2 teil; ferner gehören ihm die Kurve c mit der Ordnung n und die $2n$ Erzeugenden von Φ an, die durch die Inzidenzpunkte von c laufen. Der Restschnitt der beiden Flächen besitzt demnach die Ordnung $3n(n-1)$.

Die Netzrisse c_1, c_2 von c haben den Spurpunkt D von d zum gemeinsamen n -fachen Punkt und schneiden einander in den n Spurpunkten von c sowie in den $2n$ auf k liegenden Spurpunkten der Erzeugenden von Φ , die c treffen. c_1 besitzt überdies einen n -fachen Punkt im Spurpunkt D_1 von d_1 , analog c_2 einen n -fachen Punkt in D_2 (diese Punkte sind, wie im Falle der Geraden beschrieben, die Netzrisse der Punkte, in denen c die punktprojizierenden Ebenen schneidet). Von den $4n$ Schnittpunkten $[c, k]$ liegen demnach je n in den Punkten D, D_1 und je einer in den $2n$ Spurpunkten der genannten Erzeugenden von Φ ; analoge Beziehungen gelten für die Schnittpunkte $[c, k]$.

Von den $4n^2$ Schnittpunkten $[c_1 c_2]$ sind n^2 in D vereinigt; n liegen in den Spurpunkten von c , ferner $2n$ in den von D, D_1 und D_2 verschiedenen Punkten von k ; schliesslich $3n(n-1)$ in den Spurpunkten des Restschnittes von Γ_1 und Γ_2 . In Verallgemeinerung von Satz 3 gilt demnach

Satz 5: Die Netzrisse einer algebraischen Kurve n . ter Ordnung c , die gegenüber den Leitgeraden d, d_1, d_2 der Netze N_1, N_2 und der von diesen gebildeten Quadrik Φ allgemeine Lage besitzt, sind zwei algebraische Kurven $2n$. ter Ordnung c_1, c_2 , die in den Spurpunkten D, D_1 bzw. D, D_2 von d, d_1 bzw. d, d_2 je einen n -fachen Punkt haben. Beide Kurven enthalten die Spurpunkte von c und die $2n$ Punkte des Kegelschnittes k , die den c schneidenden Doppelsehstrahlen angehören.

Jede Kurve c , die h verschiedene Hauptpunkte des durch N_1 oder N_2 bestimmten Netzrisses enthält, besitzt als eigentliches erstes bzw. zweites Netzbild eine algebraische Kurve $(2n-h)$ ter Ordnung; die Bilder der Hauptpunkte sind h Hauptstrahlen. Da jeder Hauptstrahl einem der Büschel $D(\pi), D_1(\pi), D_2(\pi)$ angehört, so vermindern die Hauptpunkte von c auch die Vielfachheit der Punkte D, D_1, D_2 auf c_1 bzw. c_2 sowie die Anzahl der übrigen auf k liegenden Punkte von c_1 bzw. c_2 .

a) Wenn c die Gerade d_1 in r_1 Punkten schneidet, so ist c_1 von der Ordnung $2n-r_1$. Jeder der r_1 Hauptstrahlen verbindet D mit einem weiteren Punkt von k , vermindert also sowohl die Vielfachheit von D auf c_1 als auch die Anzahl der von D, D_1 verschiedenen Schnittpunkte $[c_1 k]$ um eine Einheit. c_1 besitzt daher D zum $(n-r_1)$ fachen Punkt und schneidet k in $2n-r_1$ von D und D_1 verschiedenen Punkten. - Wenn c die Gerade d_2 in r_2 Punkten trifft, so gelten analoge Beziehungen für den Netzriss c_2 von c .

b) Wenn c die gemeinsame Leitgerade d beider Netze in r Punkten schneidet, so folgt aus ähnlichen Überlegungen, dass die eigentlichen Netzrisse von c zwei algebraische Kurven $(2n-r)$ ter Ordnung sind, die D_1 bzw. D_2 zum $(n-r)$ fachen Punkt haben und einander in $2n-r$ von D, D_1, D_2 verschiedenen Punkten des Kegelschnittes k treffen.

c) Wenn c den in π liegenden Netzstrahl h_1 in s_1 Punkten schneidet, so ergibt sich für c_1 eine algebraische Kurve $(2n-s_1)$ ter Ordnung, die in D und D_1 je einen $(n-s_1)$ fachen Punkt hat. - Entsprechendes gilt, wenn c den in π liegenden Strahl h_2 des Netzes N_2 in s_2 Punkten schneidet ($s_1 + s_2$ muss $\leq n$ sein).

In Verallgemeinerung von Satz 4 gilt daher

Satz 6: Die eigentlichen Netzrisse einer algebraischen Kurve n . ter Ordnung c , die die gemeinsame Leitgerade d der Netze N_1, N_2 in r Punkten, die von d verschiedenen Leitgeraden d_1 bzw. d_2 der Netze in r_1 bzw. r_2

Punkten and die in π liegenden Netzstrahlen h_1, h_2 in s_1 bzw. s_2 Punkten schneidet, sind zwei algebraische Kurven c_1, c_2 . Die Kurve c_1 besitzt die Ordnung $2n - (r + r_1 + s_1)$, hat im Spurpunkt D von d einen $(n - r_1 - s_1)$ fachen Punkt und im Spurpunkt D_1 von d_1 einen $(n - r - s_1)$ fachen Punkt, während c_2 die Ordnung $2n - (r + r_2 + s_2)$ besitzt, in D einen $(n - r_2 - s_2)$ fachen und im Spurpunkt D_2 von d_2 einen $(n - r - s_2)$ fachen Punkt hat. Beide Kurven enthalten die $n - (s_1 + s_2)$ nicht auf h_1, h_2 liegenden Spurpunkte von c und die $2n - (r + r_1 + r_2)$ Punkte von k , die den c schneidenden Doppelsehstrahlen angehören.

Durch die vorstehenden Beziehungen gewinnt man auch Einblick in das Umkehrproblem der Netzprojektion, nämlich die Frage nach den Kurven des Raumes \mathbf{R}_3 , die vorgegebene Kurven von π zu NetZRissen haben. Wir beschränken uns auf die Ermittlung der Kurve c , deren Netzrisse zwei Gerade allgemeiner Lage c_1, c_2 von π sind. Jede Kurve, die eine solche Gerade c_1 von π zum ersten Netzriss hat, gehört der durch die Geraden c_1, d, d_1 bestimmten Quadrik Γ_1 an; jede Kurve, deren zweiter Netzriss eine Gerade c_2 ist, liegt auf der durch die Geraden c_2, d, d_2 bestimmten Quadrik Γ_2 . Die gesuchte Kurve stellt daher die eigentliche Durchdringungskurve c der Quadriken Γ_1, Γ_2 dar; da beide Flächen die Gerade d enthalten, so ist c eine algebraische Raumkurve dritter Ordnung, die die Gerade d zu einer Bisekante hat. Hieraus folgt, dass auch die Geraden c_1, c_2 und d_1, d_2 Bisekanten von c sind, während die in π liegenden Erzeugenden der Quadriken (die Netzstrahlen h_1, h_2) Unisekanten der Kurve sind. Von den drei in π liegenden Punkten von c gehört demnach einer h_1 an, der zweite liegt auf h_2 , der dritte ist der Schnittpunkt C der Geraden c_1, c_2 . Damit ist die Lage, die die Kurve c gegenüber den Netzen $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ besitzt, hinreichend gekennzeichnet; für die oben definierten Charaktere von c ergeben sich die Werte $n = 3; r = r_1 = r_2 = 2; s_1 = s_2 = 1$. Aus Satz 6 folgt, dass die eigentlichen Netzrisse jeder Raumkurve dritter Ordnung, die sich in dieser Lage befindet, in der Tat zwei Gerade von π sind. Somit gilt

Satz 7: Die Raumkurven dritter Ordnung c , die die Leitgeraden d, d_1, d_2 der Netze $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ zu Bisekanten und die in der Bildebene π liegenden Netzstrahlen h_1, h_2 zu Unisekanten haben, werden durch die beiden Netze umkehrbar eindeutig den Geradenpaaren von π zugeordnet.

4. Die Abbildung von Ebenen. Werden die Punkte einer Ebene α , die gegenüber den Leitgeraden d, d_1, d_2 der Netze $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ allgemeine Lage besitzt, mittels der Strahlen beider Netze auf die Bildebene π projiziert, so ergeben sich als erster und zweiter Netzriss des Feldes $\alpha(P\dots)$ die beiden Punktfelder $\pi(P_1\dots), \pi(P_2\dots)$.

Das Netz N_1 ruft durch seine Strahlen zwischen den Feldern $\alpha(P...)$, $\pi(P_1...)$ bekanntlich eine *umkehrbar eindeutige, quadratische Verwandtschaft* hervor, die wir durch Q_1 bezeichnen wollen³⁾; jeder Netzstrahl p_1 schneidet α in einem Punkte P und π im ersten Netzriss P_1 von P . In jedem der beiden Felder gibt es drei ausgezeichnete Punkte, denen im anderen Feld je eine Gerade entspricht, die *Hauptpunkte* der Felder. Die Hauptpunkte des Feldes $\alpha(P...)$ sind die Schnittpunkte D^* , D_1^* , H_1 der Geraden d , d_1 , h_1 mit α ; die Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_1...)$ sind die Spurpunkte D , D_1 , U_1 der Geraden d , d_1 und des in α liegenden Netzstrahls $u = D^*D_1^*$. Die Punkte H_1 , U_1 gehören der Bildspur a von α an; der Punkt U_1 ist der erste Netzriss von u , die Gerade $u_2 = DU_1$ stellt den zweiten Netzriss von u dar (vgl. Nr. 2). Den Punkten D^* , D_1^* , H_1 entsprechen in Q_1 der Reihe nach die Seiten D_1U_1 , DU_1 , $h_1 = DD_1$ des Dreiecks DD_1U_1 ; den Punkten D , D_1 , U_1 sind in der gleichen Reihenfolge die Seiten $D_1^*H_1$, D^*H_1 , $u = D^*D_1^*$ des Dreiecks $D^*D_1^*H_1$ zugewiesen.

Das Netz N_2 bewirkt in analoger Weise eine *umkehrbar eindeutige, quadratische Verwandtschaft* Q_2 zwischen den Feldern $\alpha(P...)$, $\pi(P_2...)$; jeder Netzstrahl p_2 trifft α in einem Punkte P und π im zweiten Netzriss P_2 von P . Die *Hauptpunkte* des Feldes $\alpha(P...)$ sind D^* und die Punkte D_2^* , H_2 , in denen die Geraden d_2 , h_2 die Ebene α schneiden; die Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_2...)$ sind D , D_2 und der Spurpunkt V_2 des in α liegenden Netzstrahls $v = D^*D_2^*$. Die Punkte H_2 , V_2 liegen auf a ; der Punkt V_2 ist der zweite Netzriss von v , die Gerade $v_1 = DV_2$ stellt den ersten Netzriss von v dar. Den Punkten D^* , D_2^* , H_2 entsprechen in Q_2 der Reihe nach die Seiten D_2V_2 , DV_2 , $h_2 = DD_2$ des Dreiecks DD_2V_2 ; den Punkten D , D_2 , V_2 sind in der gleichen Reihenfolge die Seiten $D_2^*H_2$, D^*H_2 , $v = D^*D_2^*$ des Dreiecks $D^*D_2^*H_2$ zugewiesen.

Jeder Geraden c der Ebene α , die keinen Hauptpunkt von Q_1 und Q_2 enthält, entspricht in Q_1 ein *Kegelschnitt* c_1 , der durch die Punkte D , D_1 , U_1 läuft und in Q_2 ein Kegelschnitt c_2 , der die Punkte D , D_2 , V_2 enthält. Beide Kegelschnitte treffen einander ausser in D gemäss Nr. 2 noch in dem auf a liegenden Spurpunkt C von c und in den Punkten E_{12} , F_{12} des Kegelschnittes k , die die Netzrisse der Inzidenzpunkte E , F von c sind. Die Inzidenzquadratik φ schneidet die Ebene α nach einem Kegelschnitt k^* , der durch die Punkte D^* , D_1^* , D_2^* läuft; die Schnittpunkte E , F von c und φ gehören k^* an. Da die erstgenannten Kegelschnitte das *Bündel* mit den Grundpunkten D , D_1 , U_1 ; die zweitgenannten Kegelschnitte aber das Bündel mit den Grundpunkten D , D_2 , V_2 bilden und jeder Kegelschnitt des einen Bündels durch seine Schnittpunkte E_{12} , F_{12} mit k einen bestimmten Kegelschnitt des zweiten Bündels festlegt, so erkennt man: *Das Strahlfeld $\alpha(c...)$ wird durch die beiden Netzrisse umkehrbar eindeutig auf die beiden durch k perspektiv aufeinander bezogenen Kegelschnittsbündel abgebildet, deren Grundpunkte D , D_1 , U_1 bzw. D , D_2 , V_2 sind.*

³⁾ Über die Eigenschaften von Netzverwandtschaften vgl. E. MÜLLER-E. KRUPPA. Die linearen Abbildungen. 1923

Alle Geraden von α , die durch einen bestimmten Punkt P laufen, bilden das *Büschel* $P(\alpha)$. Wegen der in Nr. 2 bewiesenen Inzidenzbeziehungen enthalten die Netzrisse c_1 aller Geraden c des Büschels den Netzriss P_1 von P , während die Netzrisse c_2 dieser Geraden mit dem Netzriss P_2 von P inzident sind. Die Kegelschnitte c_1, c_2 , die die Geraden des Büschels $P(\alpha)$ darstellen, bilden daher die beiden durch k perspektiv aufeinander bezogenen Büschel mit den Grundpunkten D, D_1, P_1, U_1 bzw. D, D_2, P_2, V_2 . Jeder Kegelschnitt c_1 des ersten Büschels hat mit dem Inzidenzkegelschnitt k die Punkte D, D_1 und zwei weitere Punkte E_{12}, F_{12} gemeinsam. Die Punktepaare E_{12}, F_{12} bilden nach dem Satz von DESARGUES eine *Involution*, deren Zentrum auf der Geraden P_1U_1 liegt. Da je zwei Kegelschnitte c_1, c_2 der Büschel, die eine und dieselbe Gerade c von α darstellen, k in denselben Punkten E_{12}, F_{12} schneiden, so ruft das durch die Punkte D, D_2, P_2, V_2 bestimmte Büschel auf k dieselbe Involution hervor; ihr Zentrum liegt auf P_2V_2 und ist daher der *Schnittpunkt der Geraden* P_1U_1, P_2V_2 .

Wenn man das Feld $\pi(P_1\dots)$ mittels der Verwandtschaft Q_1 in das Feld $\alpha(P\dots)$ überführt und dieses mittels Q_2 in das Feld $\pi(P_2\dots)$ transformiert, so entsteht eine *Verwandtschaft V zwischen den kollokalen Feldern* $\pi(P_1\dots), \pi(P_2\dots)$; je zwei einander in V entsprechende Punkte P_1, P_2 sind die Netzrisse eines Punktes P von α . Die charakteristischen Eigenschaften von V lassen sich demnach aus den beschriebenen Eigenschaften der Verwandtschaften Q_1, Q_2 in folgender Weise ableiten:

(1) Die Verwandtschaft V ist *umkehrbar eindeutig*, weil jedem Punkt P_1 des Feldes $\pi(P_1\dots)$ durch Q_1 ein bestimmter Punkt P von α zugewiesen wird und diesem in Q_2 ein bestimmter Punkt P_2 des Feldes $\pi(P_2\dots)$ entspricht; V ist also eine *Cremona-Verwandtschaft*.

(2) Die Verwandtschaft V ist *perspektiv*, weil je zwei einander entsprechende Punkte P_1, P_2 auf einer durch den Punkt D laufenden Geraden t liegen; D ist das *Perspektivitätszentrum*. Alle Punktepaare P_1, P_2 , die derselben Geraden t angehören, bilden eine *Projektivität*; diese ist das Bild der Schnittgeraden der Ebenen $\alpha, [dt]$ (vgl. Nr. 2).

(3) Die *selbstentsprechenden Punkte* von V liegen einerseits auf der Bildspur a von α , andererseits auf dem Kegelschnitt k ; die Gerade a und der Kegelschnitt k bilden daher die *Inzidenzlinien von V*. Jeder Punkt von a ist erster und zweiter Netzriss des Punktes selbst, jeder Punkt von k ist erster und zweiter Netzriss eines Punktes von k^* . Die von D verschiedenen Schnittpunkte von a und k mit jeder durch D laufenden Geraden i sind die *Doppelpunkte der Projektivität*, die die Verwandtschaft V auf t erzeugt.

(4) Die *Hauptpunkte* der Verwandtschaft V sind die Punkte jedes der beiden Felder $\pi(P_1\dots), \pi(P_2\dots)$, denen im anderen Feld alle Punkte einer Geraden oder einer Kurve, der *Hauptlinie*, zugeordnet sind.

Die Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ sind einerseits die *drei Hauptpunkte* D, D_1, U_1 der Verwandtschaft Q_1 , andererseits die Punkte von π , denen durch Q_1 in α liegende Hauptpunkte von Q_2 zugewiesen werden, die nicht zugleich Hauptpunkte von Q_1 sind. Da die in α liegenden Hauptpunkte von Q_2 die Punkte D^*, D_2^*, H_2 sind, der Punkt D^* aber zugleich ein Hauptpunkt von Q_1 ist, so ergeben sich als die von D, D_1, U_1 verschiedenen Hauptpunkte von V die beiden Punkte D_{21}^*, H_2 von π , denen in Q_1 die Punkte D_2^*, H_2 entsprechen. Der Punkt D_{21}^* gehört dem Kegelschnitt k^* an, sein erster Netzriss D_{21}^* ist daher der auf k liegende Spurpunkt der durch D_{21}^* laufenden Erzeugenden von ϕ . Der Punkt H_2 fällt als Punkt von α mit seinem ersten Netzriss zusammen. Die Verwandtschaft V besitzt somit im Feld $\pi(P_1 \dots)$ die *fünf Hauptpunkte* $D, D_1, U_1, D_{21}^*, H_2$ und diesen sind folgende *Hauptlinien* zugeordnet:

a) Dem Punkte D entspricht in Q_1 die Gerade $D_1^*H_1$ und dieser Geraden wird, da sie gegenüber dem Netz N_2 allgemeine Lage besitzt, durch Q_2 der Kegelschnitt c_2° zugeordnet, der durch die Hauptpunkte D, D_2, V_2 des Feldes $\pi(P_2 \dots)$ und die zweiten Netzrisse der Punkte D_1^*, H_1 läuft. Der zweite Netzriss von D_1^* ist der auf k liegende Spurpunkt D_{12}^* der mit D_1^* inzidenten Erzeugenden von ϕ ; der zweite Netzriss von H_1 fällt mit H_1 zusammen. Dem Punkte D ist in V demnach der Kegelschnitt c_2° zugewiesen, d.h. D ist ein *Hauptpunkt zweiter Ordnung* dieser Verwandtschaft.

b) Dem Punkte D_1 ist in Q_1 die Gerade D^*H_1 zugeordnet und diese Gerade wird durch Q_2 in die Gerade h_1 transformiert; dem Punkte D_1 entspricht in V also die Gerade h_1 .

c) Dem Punkte U_1 ist in Q_1 die Gerade $u = D^*D_1^*$ zugeordnet, die Verwandtschaft Q_2 führt u in die Gerade $u_2 = DU_1$ über; also entspricht dem Punkte U_1 in V die Gerade u_2 .

d) Dem Punkte D_{21}^* wird durch Q_1 der Punkt D_2^* zugewiesen und diesem Punkt entspricht in Q_2 die Gerade $v_1 = DV_2$; somit ist D_{21}^* in V die Gerade v_1 zugeordnet.

e) Der Punkt H_2 entspricht sich in Q_1 selbst, in Q_2 ist ihm die Gerade h_2 zugeordnet; daher entspricht ihm auch in V die Gerade h_2 .

Die Punkte D_1, U_1, D_{21}^*, H_2 sind also *Hauptpunkte erster Ordnung* (gewöhnliche Hauptpunkte) der Verwandtschaft V ; die ihnen zugeordneten Hauptstrahlen sind die *mit ihnen inzidenten Strahlen des Büschels* $D(\pi)$.

Die Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_2 \dots)$ sind, wie man in analoger Weise nachweist, die Punkte $D, D_2, V_2, D_{12}^*, H_1$ -also, wie ein Vergleich mit Abs. a) zeigt, genau *die fünf Punkte, die den Kegelschnitt* c_2° *bestimmen*, der dem Punkt D des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ in V zugeordnet ist. Den Punkten entsprechen in V der Reihe nach der durch die fünf Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ laufende *Kegelschnitt* c_1° bzw. die Geraden h_2, v_1, u_2, h_1 .

Von den so definierten neun Hauptpunkten der Verwandtschaft \mathbf{V} liegen fünf (die Punkte $D, D_1, D_2, D_{21}^*, D_{12}^*$) auf dem Kegelschnitt k , die übrigen vier (die Punkte H_1, H_2, U_1, V_2) liegen auf der Spur a von α . Jede der vier Geraden, die D mit einem auf a liegenden Hauptpunkt verbindet, trägt auch einen auf k liegenden Hauptpunkt; diese Geraden sind $h_1=DD_1H_1$; $h_2=DD_2H_2$; $v_1=DD_{21}^*V_2$; $u_2=DD_{12}^*U_1$.

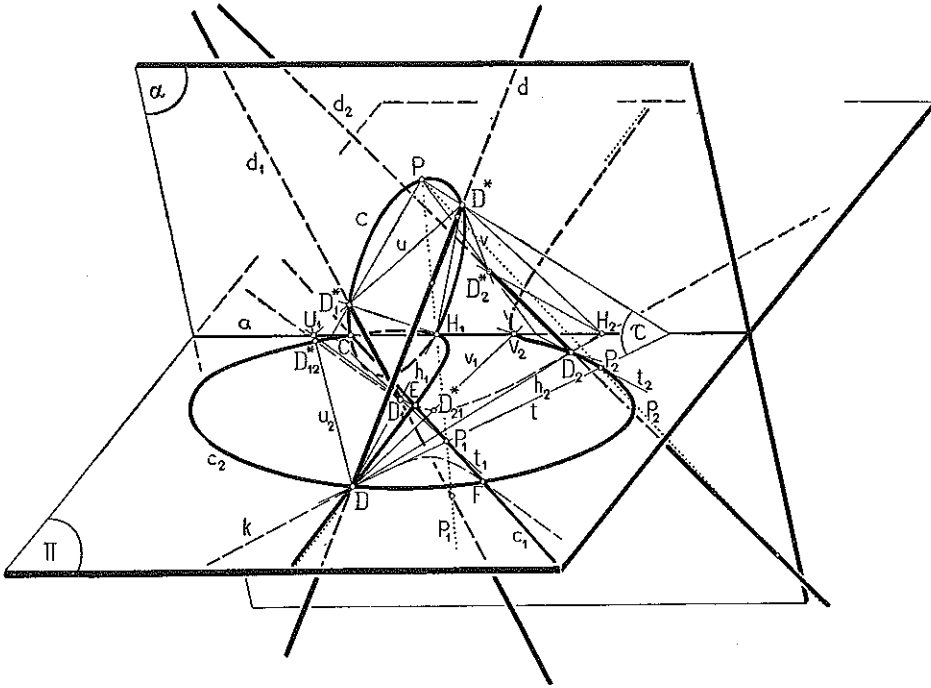


Abb. 2

(5) Jeder Geraden allgemeiner Lage c_1 des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ entspricht in \mathbf{Q}_1 ein Kegelschnitt c , der durch die Hauptpunkte D^*, D_1^*, H_1 des Feldes $\alpha(P \dots)$ läuft. Einem Kegelschnitt allgemeiner Lage von α ist in \mathbf{Q}_2 bekanntlich eine algebraische Kurve vierter Ordnung zugewiesen, die in den Hauptpunkten D, D_2, V_2 des Feldes $\pi(P_2 \dots)$ je einen Doppelpunkt besitzt. Da der Kegelschnitt c aber durch den Hauptpunkt D^* des Feldes $\alpha(P \dots)$ läuft, dem durch \mathbf{Q}_2 die Gerade D_2V_2 zugeordnet ist, so entspricht c in \mathbf{Q}_2 und daher der Geraden c_1 in \mathbf{V} eine algebraische Kurve dritter Ordnung c_2 , die D zum Doppelpunkt hat (Abb. 2). Die Verwandtschaft \mathbf{V} ist demnach vom dritten Grad. Die Kurve c_2 läuft durch die Punkte D_2, V_2 sowie die zweiten Netzrisse D_{12}^*, H_1 der Punkte D_1^*, H_1 , also durch alle dem Feld $\pi(P_2 \dots)$ angehörig Hauptpunkte der Verwandtschaft \mathbf{V} . Sie enthält ferner die drei Inzidenzpunkte der Geraden c_1 , nämlich den Schnittpunkt C von c_1 mit a und die Schnittpunkte E, F von c_1 mit k . Die drei

Schnittpunkte $[c_2a]$ sind C, H_1, V_2 ; von den sechs Schnittpunkten $[c_2k]$ sind zwei in D vereinigt, die vier übrigen sind D_2, D_{12}^*, E, F . Die Punktreihen $c_1(P_1 \dots), c_2(P_2 \dots)$ werden durch das Strahlbüschel $D(\pi)$ *perspektiv* aufeinander bezogen; jede durch D laufende Gerade schneidet die Gerade c_1 und die Kubik c_2 in einem Paar einander in \mathbf{V} entsprechender Punkte P_1, P_2 . Zusammenfassend gilt somit

Satz 8: Wird der Raum R_3 durch zwei Netze N_1, N_2 , die eine gemeinsame Leitgerade d besitzen, auf die Bildebene π projiziert, so wird jede Ebene α des Raumes, die gegenüber den Leitgeraden der Netze und der von diesen gebildeten Quadrik Φ allgemeine Lage hat, durch eine perspektive Cremona-Verwandtschaft dritten Grades dargestellt, die die Bildspur a von α und den Sparkegelschnitt k von Φ zu Inzidenzlinien besitzt. Der Spurpunkt D von d ist das Perspektivitätszentrum und zugleich ein Hauptpunkt zweiter Ordnung der beiden Bildfelder; jedes Feld besitzt überdies je zwei Punkte von a und k zu Hauptpunkten erster Ordnung, wobei stets zwei Hauptpunkte verschiedener Felder mit D auf einer Geraden liegen.

(6) Jedem Strahlbüschel $P_1(\pi)$ des Feldes $\pi(P_1 \dots)$, dessen Scheitel allgemeine Lage besitzt, entspricht in \mathbf{V} ein Kubikenbüschel, dessen Grundpunkte die Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_2 \dots)$ und der P_1 zugeordnete Punkt P_2 sind. Da jede Kubik c_2 , die einer Geraden c_1 des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ entspricht, im Hauptpunkt D einen Doppelpunkt hat, so liegen vier der neun Schnittpunkte je zweier Kubiken des Büschels in D ; vier weitere sind die von D verschiedenen Hauptpunkte D_2, V_2, D_{12}^*, H_1 des Feldes $\pi(P_2 \dots)$; einer ist P_2 . Dies steht in Einklang mit der Tatsache, dass eine Gremona-Verwandtschaft dritten Grades zwischen ebenen Feldern in jedem Feld acht Hauptpunkte besitzt, die z. T. - wie im vorliegenden Fall - zusammenfallen können.

Jedem Strahlbüschel des einen Feldes, dessen Scheitel einer der vier gewöhnlichen Hauptpunkte des Feldes ist, entspricht in \mathbf{V} ein Kegelschnittsbüschel, dessen Grundpunkte D und drei gewöhnliche Hauptpunkte des anderen Feldes sind, da dem Büschelscheitel eine Gerade zugeordnet ist, die D mit einem weiteren Hauptpunkt dieses Feldes verbindet. So entspricht z. B. dem Strahlbüschel $D_1(\pi)$ das Kegelschnittsbüschel mit den Grundpunkten D, D_2, V_2, D_{12}^* ; dem Punkt D_1 entspricht nach Abs. 4, b die Gerade $h_1 = DH_1$. Der Kegelschnitt c_2 des Büschels, der einer willkürlichen Geraden c_1 des Büschels $D_1(\pi)$ entspricht, ist durch vier Grundpunkte des Büschels und den auf a liegenden Punkt C von c_1 bestimmt; er trifft den Inzidenzkegelschnitt k in dem von D_1 verschiedenen Schnittpunkt E von c_1 und k . Ähnliches gilt für das Büschel $D_{21}^*(\pi)$; ihm entspricht das Kegelschnittsbüschel mit den Grundpunkten D, D_2, D_{12}^*, H_1 . Dem Büschel $U_1(\pi)$ dagegen entspricht das durch D, D_2, V_2, H_1 bestimmte Kegelschnittsbüschel; da U_1 auf der Inzidenzspur a liegt, so trifft

jede mit U_1 inzidente Gerade c_1 , den ihn entsprechenden Kegelschnitt c_2 in dessen Schnittpunkten E, F mit k . Hieraus folgt, dass die Involution, die das genannte Kegelschnittsbüschel auf k hervorruft, mit der Involution identisch ist, die das Strahlbüschel $U_1(\pi)$ auf k erzeugt, also den Punkt U_1 zum Zentrum hat (vgl. S. 53); Entsprechendes gilt für das Büschel $H_2(\pi)$. - Das Büschel $D(\pi)$ endlich entspricht sich in \mathbf{V} selbst, da D das Perspektivitätszentrum ist.

(7) Jeder algebraischen Kurve n . ter Ordnung c_1 des Feldes $\pi(P_1 \dots)$, die keinen Hauptpunkt dieses Feldes enthält, entspricht in \mathbf{V} eine algebraische Kurve $3n$. ter Ordnung c_2 , die D zum $2n$ -fachen Punkt und die Hauptpunkte D_2, V_2, D_{12}^*, H_1 des Feldes $\pi(P_2 \dots)$ zu je einem n -fachen Punkt hat. Läuft c_1 durch einen Hauptpunkt des ersten Feldes, so spaltet sich von der eigentlichen Kurve c_2 die dem Punkt entsprechende Hauptlinie ah ; hiedurch verringert sich sowohl die Ordnung als auch die Vielfachheit der mehrfachen Punkte von c_2 . Aus den in Abs. 4, a - z beschriebenen Beziehungen folgt:

a) Einem r -fachen Punkt D von c_1 entspricht der durch die Punkte $D, D_2, V_2, D_{12}^*, H_1$ laufende Kegelschnitt c_2 r -fach; er vermindert daher die Ordnung von c_2 um $2r$ und die Vielfachheit der Punkte $D, D_2, V_2, D_{12}^*, H_1$ um je r .

b) Einem r_1 -fachen Punkt D_1 von c_1 entspricht die Gerade $h_1 = DH_1$ r_1 -fach; er vermindert daher die Ordnung von c_2 um r_1 und die Vielfachheit der Punkte D, H_1 um je r_1 .

c) Einem s_1 -fachen Punkt U_1 von c_1 entspricht die Gerade $u_2 = DD_{12}^*$ s_1 -fach; er vermindert daher die Ordnung von c_2 um s_1 und die Vielfachheit der Punkte D, D_{12}^* um je s_1 .

d) Einem r_1^* -fachen Punkt D_{21}^* von c_1 entspricht die Gerade $v_1 = DV_2$ r_1^* -fach; er vermindert daher die Ordnung von c_2 um r_1^* und die Vielfachheit der Punkte D, V_2 um je r_1^* .

e) Einem s_2 -fachen Punkt H_2 von c_1 entspricht die Gerade $h_2 = DD_2$ s_2 -fach; er vermindert daher die Ordnung von c_2 um s_2 und die Vielfachheit der Punkte D, D_2 um je s_2 .

Demnach gilt

Satz 9: In der Verwandtschaft \mathbf{V} , die zwischen einander zugeordneten Netzrissen eines ebenen Feldes besteht, entspricht einer algebraischen Kurve n . ter Ordnung c_1 , die in den Hauptpunkten $D, D_1, U_1, D_{21}^*, H_2$ des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ der Reihe nach je einen Punkt von der Vielfachheit r, r_1, s_1, r_1^*, s_2 besitzt, eine algebraische Kurve c_2 der Ordnung $3n - (2r + r_1 + s_1 + r_1^* + s_2)$, die in den Hauptpunkten $D, D_2, V_2, D_{12}^*, H_1$ des Feldes $\pi(P_2 \dots)$ der Reihe nach die Vielfachheit $2n - (r + r_1 + s_1 + r_1^* + s_2)$ bzw. $n - (r + s_2)$; $n - (r + r_1^*)$; $n - (r + s_1)$; $n - (r + r_1)$ hat.

Ein entsprechender Satz gilt naturgemäss für den Übergang vom zweiten zum

ersten Bildfeld; er sei nicht ausdrücklich angegeben. Durch diese Beziehung können manche der früher genannten Zusammenhänge bestätigt, andere neu abgeleitet werden. Wählt man für c_1 etwa einen Kegelschnitt des durch die Punkte D, D_1, U_1 definierten Bündels, so entspricht diesem nach Satz 9 ein Kegelschnitt c_2 des durch die Punkte D, D_2, V_2 bestimmten Bündels ($n=2, r=r_1=s_1=1, r_1^*=s_2=0$); zwei Kegelschnitte von dieser Lage bilden nach S. 52 die Netzrisse einer Geraden von α . Jedem Kegelschnitt des durch die Punkte D, D_1, U_1, D_{21}^* bestimmten Büschels entspricht nach Satz 9 eine Gerade des Büschels $D_2(\alpha)$ ($n=2, r=r_1=s_1=r_1^*=1, s_2=0$); dies ist die Umkehrung einer in Abs. 6 erwähnten Beziehung. Einer Kurve dritter Ordnung schliesslich, die D zum Doppelpunkt hat und durch alle weiteren Hauptpunkte des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ läuft, ist nach Satz 9 eine Gerade zugewiesen, die im Feld $\pi(P_2 \dots)$ allgemeine Lage besitzt ($n=3, r=2, r_1=s_1=r_1^*=s_2=1$). Damit ist bestätigt, dass die Verwandtschaft \mathbf{V} den Geraden des einen Feldes *umkehrbar eindeutig* die Kubiken des anderen Feldes zuordnet, die D zum Doppelpunkt und die anderen Hauptpunkte ihres Feldes zu einfachen Punkten haben.

(8) Durch jeden Punkt P_1 von π laufen *ausgezeichnete Gerade* und *ausgezeichnete Kegelschnitte*, nämlich die Verbindungsgeraden von P_1 mit den Hauptpunkten des Feldes $\pi(P_1 \dots)$ - also *Hauptstrahlen* dieses Feldes - und die mit P_1 inzidenten Kegelschnitte der Büschel, die vier Hauptpunkte von $\pi(P_1 \dots)$ zu Grundpunkten haben. Den Geraden entsprechen nach Abs. 6 *Kegelschnitte*, die durch vier Grundpunkte des zweiten Feldes laufen; den Kegelschnitten sind nach Abs. 7 *Gerade* zugeordnet, die einen Hauptpunkt dieses Feldes tragen. Diese Geraden und Kegelschnitte wird man als *Trägerlinien* von P_1 benutzen, wenn man den P_1 in \mathbf{V} entsprechenden Punkt P_2 konstruieren, also die Verwandtschaft \mathbf{V} *vervollständigen* will.

Wählt man z. B. als Trägerlinien von P_1 die Geraden $t = DP_1$ und $c_1 = D_1P_1$, so stellt t zugleich einen geometrischen Ort für P_2 dar; die zweite Ortslinie ist der *Kegelschnitt* c_2 , der durch die Punkte D, D_2, V_2, D_{12}^* und den auf a liegenden Punkt C von c_1 läuft. Der Kegelschnitt trifft t in D und dem -etwa mittels der Konstruktion von PASCAL zu ermittelnden - Punkt P_2 . Wählt man für c_1 dagegen den durch die Punkte $D, D_1, U_1, D_{21}^*, P_1$ laufenden *Kegelschnitt*, so ergibt sich c_2 als *Verbindungsgerade* von D_2 mit dem von U_1 verschiedenen Schnittpunkt $[c_1 a]$.

Die Besonderheiten, die bei der Abbildung von Ebenen entstehen, die gegenüber den Netzen $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ ausgezeichnete Lage haben, können aus dem Gesagten unmittelbar abgeleitet werden. Es sei nur kurz erwähnt, dass die Tangentialebenen von φ und die Ebenen, die durch einen der Punkte D, D_1 oder D_2 laufen, so wie im allgemeinen Fall durch Verwandtschaften *dritten Grades* dargestellt werden, während die Ebenen, die h_1 oder h_2 enthalten, i. a. durch *quadratische Verwandtschaften* abgebildet werden, da in einem solchen Fall \mathbf{Q}_1 oder \mathbf{Q}_2 eine Kollineation ist.

Ö Z E T

Bu çalışmada, projektif R_3 uzayının, ortak bir doğrultmanı bulunan iki şebeke yardımı ile elde edilen izdüşümü incelenmiş ve R_3 uzayının noktalarına, izdüşüm düzleminde, taşıyıcı doğruları bir demete ait olan nokta çiftleri; doğrularına ise sabit bir k koniğine göre perspektif olan konik çiftleri tekabül ettiği ve R_3 uzayının her düzleminin genel olarak, izdüşüm düzleminde, üçüncü dereceden perspektif bir Cremona-Transformasyonu ile; her doğru alanının da iki konik destesinin perspektif çiftleri ile belirdiği gösterilmiştir.

Ayrıca, R_3 uzayının n . dereceden uzay eğrilerinin izdüşümleri incelenmiş ve bu izdüşüm sisteminde izdüşümleri doğru çiftleri olan eğrilerin, muayyen uzay kübikleri olduğu bulunmuştur.

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

İNŞAAT FAKÜLTESİ

TASARI GEOMETRİ KÜRSÜSÜ

İSTANBUL — TÜRKİYE

(Eingegangen am 5. November 1964)