

**SUR LA VIE MOYENNE DES NEUTRONS DANS UN RÉACTEUR
NUCLÉAIRE COMPOSÉ DE M MILIEUX DIFFÉRENTS
D'APRÈS LA THÉORIE DE LA DIFFUSION
À N GROUPES**

AHMET YÜKSEL ÖZEMRE

Dans cet article, on déduit d'après la théorie de la diffusion à N groupes, l'expression de la vie moyenne des neutrons dans un réacteur nucléaire composé de M milieux différents, et on la compare, pour le cas spécial où $M=N=2$, avec la formule de ROUSSAY.

A) — Il est bien connu que dans les calculs de certains types de réacteur, comme par exemple le réacteur couplé [1] [2], la connaissance de la vie moyenne des neutrons dans le réacteur joue un rôle important. Pour la détermination de ce paramètre les techniques des perturbations sont très bien adaptées. Le but de cet article est d'établir du point de vue de la théorie des perturbations l'expression la plus générale de la vie moyenne des neutrons dans les réacteurs nucléaires.

Considérons à cet effet un réacteur nucléaire composé d'un assemblage de M milieux multiplicateurs et non multiplicateurs, chacun d'eux étant supposé homogène; et soit N le nombre des groupes d'énergie tel que le premier groupe corresponde à celui de la plus haute énergie et le N^{e} à celui de l'énergie thermique. Chaque flux de neutrons $\varphi_{\mu,p}(\mathbf{r})$ ($\mu=1, 2, \dots, M$; $p=1, 2, \dots, N$) doit satisfaire à la forme suivante des équations de OKRENT [3]:

$$\begin{aligned}
 & D_{\mu,p} \nabla^2 \varphi_{\mu,p}(\mathbf{r}) - \left(\sum_{\mu,p}^c + \sum_{\mu,p}^f + \sum_{\mu,p}^{in} + \sum_{\mu,p}^{mod} \right) \varphi_{\mu,p}(\mathbf{r}) \\
 (1) \quad & + \sum_{l=1}^{p-1} \sum_{\mu,l \rightarrow p}^{in} \varphi_{\mu,l}(\mathbf{r}) + \sum_{m=1}^{p-1} \sum_{\mu,m \rightarrow p}^{mod} \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \\
 & + \gamma_{\mu,p} \sum_{k=1}^N \nu_{\mu,k} \sum_{\mu,k}^f \varphi_{\mu,k}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\mu=1, 2, \dots, M; p=1, 2, \dots, N)
 \end{aligned}$$

avec :

$D_{\mu,p}$ = coefficient de diffusion pour le milieu μ et le groupe p ;

$\varphi_{\mu,p}(\mathbf{r})$ = flux total pour le milieu μ et dans le groupe p au point courant de coordonnée d'espace \mathbf{r} ;

$\sum_{\mu,p}^c$ = section efficace macroscopique de capture ;

$\sum_{\mu,p}^f$ = section efficace macroscopique de fission ;

$\sum_{\mu,p}^{im}$ = section efficace macroscopique pour expulsion du groupe p par diffusion inélastique ;

$\sum_{\mu,p}^{mod}$ = section efficace macroscopique pour expulsion du groupe p par diffusion élastique (modération) ;

$\gamma_{\mu,p}$ = proportion des neutrons de fission appartenant à l'origine au groupe p ;

$\nu_{\mu,p}$ = nombre total des neutrons créés par fission dans le groupe k ;

$\sum_{\mu,l \rightarrow p}^{in}$ = section efficace macroscopique pour la diffusion inélastique du groupe l au groupe p ;

$\sum_{\mu,m \rightarrow p}^{mod}$ = section efficace macroscopique pour le ralentissement du groupe m au groupe p .

Il est évident que beaucoup de termes de ces équations doivent s'annuler pour certains groupes et pour certains milieux. Par exemple pour un milieu non multiplicateur, le deuxième terme serait réduit à

$$\left(\sum_{\mu,p}^c + \sum_{\mu,p}^{mod} \right) \varphi_{\mu,p}(\mathbf{r}),$$

et le troisième et le quatrième termes s'annuellerient.

Nous devons donc avoir en général une matrice K de $(MN)^e$ ordre qui contiennent plusieurs éléments nuls, et un vecteur Φ de la forme :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(\mathbf{r}) \\ \varphi_{1,2}(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \varphi_{1,N}(\mathbf{r}) \\ \varphi_{2,1}(\mathbf{r}) \\ \varphi_{2,2}(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \varphi_{2,N}(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{M,1}(\mathbf{r}) \\ \varphi_{M,2}(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{M,N}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

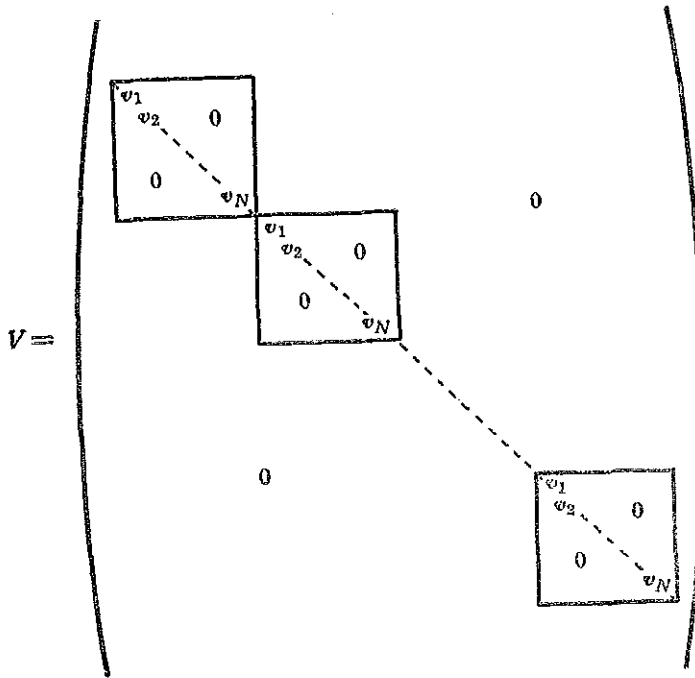
de sorte que les équations (1) peuvent s'écrire :

$$(2) \quad K \Phi = 0$$

Mais pour des raisons de commodité nous préférons multiplier chacune des équations (1) par la vitesse correspondante des neutrons. Nous avons alors :

$$(VK) \Phi = 0$$

où V est la matrice diagonale des vitesses ayant la forme suivante :



D'après [4] si nous représentons par $\Delta\omega$, la variation de l'inverse de la période du réacteur nucléaire nous avons comme une première approximation :

$$(3) \quad \Delta\Omega = \frac{\delta k}{\tau} = \frac{\int_V \Phi^\dagger P \Phi dV}{\int_V \Phi^\dagger \Phi dV}$$

où δk est l'excès de réactivité, τ la vie moyenne des neutrons dans le réacteur, P la matrice correspondant à la perturbation qui cause la rupture de la stabilité du réacteur et Φ^\dagger le vecteur adjoint au vecteur Φ .

B) — Supposons maintenant qu'on ait inséré uniformément dans le réacteur critique un certain absorbant de neutrons ayant une section efficace macroscopique d'absorption égale à c/v_p , c étant une constante positive et ayant la dimension de l'inverse du temps et v_p la vitesse des neutrons du groupe p ($p = 1, 2, \dots, N$). Cet absorbant aura comme effet d'augmenter toutes les sections efficaces macroscopiques d'absorption d'une quantité égale à c/v_p . Ceci produit alors une perturbation globale du système et l'état critique se trouve alors altéré.

Les équations gouvernant la distribution des flux de neutrons deviennent dans ce cas :

$$(VK')\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

où K' est l'opérateur matriciel dans lequel toutes les sections efficaces macroscopiques d'absorption se trouvent augmentées de c/v_p par rapport à K .

Nous avons alors comme la matrice de la perturbation :

$$P = V(K' - K).$$

Comme la seule différence entre les deux matrices K' et K consiste dans le fait que la première contient des termes supplémentaires en c/v_p qui n'apparaissent que dans la diagonale principale, on en conclut que P est une matrice diagonale dont les éléments dans la diagonale principale sont égaux à $-c$ ou à zéro, ce dernier cas ayant lieu lorsque pour des raisons physiques l'un des flux est supposé de ne pas exister dans un milieu. Un exemple concret pour un tel cas est donné dans [2] où l'on admet que le flux thermique n'existe pas dans le cœur du réacteur couplé en question.

La matrice de la perturbation est donc de la forme suivante :

$$P = \begin{pmatrix} -C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -C & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & C \end{pmatrix}$$

On conclut aisément de (3) que :

$$(4) \quad A\omega = \frac{\delta k}{\tau} = -c.$$

Cette expression peut s'interpréter du point de vue de la causalité. En effet, prenant aussi en considération le signe négatif de c , l'expression (4) montre que l'insertion d'un absorbant caractérisé par c lui-même, implique une perte de ré-

activité et par conséquent la rupture du caractère stationnaire, c'est-à-dire le caractère critique du réacteur. Il s'ensuit que nous avons une période finie pour le réacteur dont l'inverse est différent de zéro. Le signe de la variation de l'inverse de la période du réacteur étant négatif, nous en concluons que l'insertion d'un certain absorbant entraîne l'amortissement de la réaction en chaîne.

Inversement, si le réacteur est critique, sa période est stable et infinie donc $\Delta\omega = 0$. L'annulation de $\Delta\omega$ entraîne l'annulation de δk et de c . D'autre part, nous déduisons de (4)

$$\tau = -\frac{\delta k}{c},$$

qui est équivalent à :

$$\tau = \left| \frac{\delta k}{c} \right|.$$

Supposons maintenant que c tende vers zéro. Parallèlement, la valeur absolue de l'antiréactivité δk et aussi la variation de l'inverse de la période du réacteur tendront vers zéro conformément à la chaîne causale établie ci-dessus. Nous aurons pour chaque valeur de c une nouvelle valeur pour τ . A la limite où δk et c sont tous les deux nuls, c'est-à-dire quand le réacteur devient de nouveau critique, τ continuera évidemment à exister de sorte que nous avons à définir la vie moyenne des neutrons dans un réacteur stationnaire par :

$$(5) \quad \tau_{st} = \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \left| \frac{\delta k}{c} \right|.$$

C) — Supposons maintenant que nous augmentions fictivement la population des neutrons dans le réacteur de telle sorte que cette deuxième perturbation compense l'effet de la première et que le réacteur redevienne critique.

Pour une telle augmentation fictive nous allons substituer la grandeur

$$\nu_{\mu,h}(1 + \delta k)$$

à la grandeur $\nu_{\mu,h}$, où δk représente la perte de réactivité due à l'absorbant inséré dans le réacteur.

Soit alors K'' l'opérateur matriciel correspondant au système d'équations doublement perturbées, c'est-à-dire au système d'équations où, contrairement à (1) tous les $\nu_{\mu,h}$ ont été remplacés par $\nu_{\mu,h}(1 + \delta k)$ et toutes les sections efficaces d'absorption ont augmenté de

$$c/v_p \quad (p = 1, 2, \dots, N).$$

Comme d'habitude la matrice de la perturbation sera donnée par :

$$(6) \quad P = K'' - K.$$

Nous devons maintenant faire attention à la forme de cette matrice :

Nous devons d'abord remarquer que, à partir d'un certain groupe d'énergie, disons par exemple à partir de $(L+1)^e$ groupe, l'énergie correspondant à ce groupe devient plus petite que l'énergie minima des neutrons de fission. Il est alors évident que pour de tels groupes le dernier terme dans l'équation de la diffusion doit s'annuler car aucun des neutrons dus à la fission ne peut être considéré comme une source pour ces groupes.

D'autre part, comme il a été établi par (6), chaque élément de P doit être égal à la différence entre K'' et K . De la remarque que nous avons faite dans le dernier paragraphe et du premier paragraphe de C) nous pouvons conclure aisément que :

1) P est une matrice ayant M sous-matrices d'ordre N :

$$(R_{\mu,tm}), \quad (\mu = 1, 2, \dots, M)$$

distribuées le long de la diagonale principale,

2) chaque sous-matrice $(R_{\mu,tm})$ présente la forme suivante :

a) tous les éléments sur la diagonale principale de $p=1$ à $p=L$ sont égaux à :

$$-c/v_p + \gamma_{\mu,p} v_{\mu,pp} \sum_{k,\mu,pp}^f \cdot \delta k,$$

où à zéro si l'on omet le flux correspondant ; et ils sont égaux seulement à c/v_p , de $p=L+1$ à $p=N$.

b) tous les éléments au-dessus de la $(L+1)^e$ ligne qui constituent une sous-matrice :

$$(A_{\mu,lm}) \quad (l = 1, 2, \dots, L; m = 1, 2, \dots, M),$$

de la matrice

$$(R_{\mu,tm}),$$

sauf ceux qui correspondent à la diagonale principale de cette dernière, sont égaux à

$$\gamma_{\mu,p} v_{\mu,pn} \sum_{k,\mu,pn}^f \cdot \delta k,$$

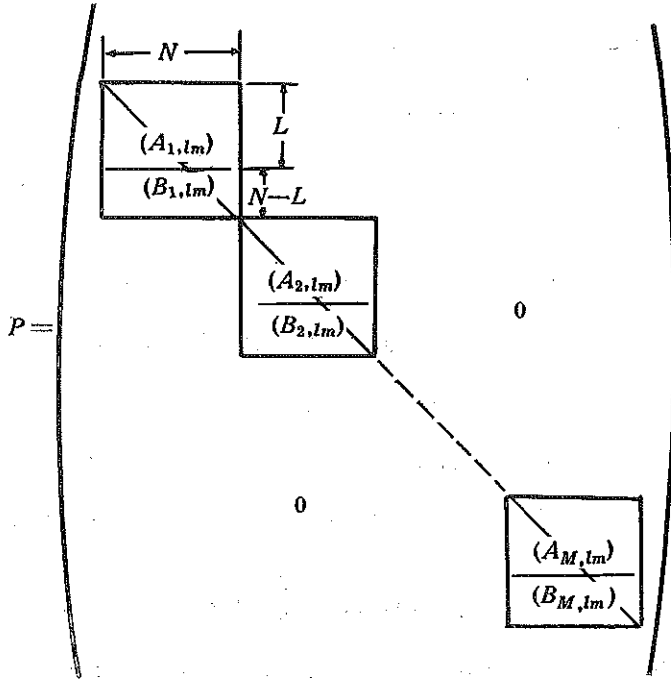
μ étant constant pour une sous-matrice donnée.

c) tous les éléments au-dessous de la L^e ligne qui constituent une sous-matrice :

$$(B_{\mu,lm}) \quad (l = L+1, L+2, \dots, N; m = 1, 2, \dots, N)$$

de la matrice $(R_{i,lm})$ sauf ceux qui correspondent à la diagonale principale de cette dernière, sont égaux à zéro.

La matrice des perturbations admet alors la forme suivante :



Nous allons maintenant déduire l'expression de la vie moyenne τ_{st} . Nous avons vu que la matrice des perturbations contient explicitement les grandeurs δk et c . Mais nous sommes en train de considérer l'état critique du réacteur. Nous devons faire tendre donc c ou δk vers zéro lorsque nous appliquerons (3). Nous avons alors :

$$\Delta\omega = 0 = \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \phi^\dagger P \phi dV.$$

Des remarques générales que nous avons faites pour P on peut déduire aisément que :

$$\begin{aligned}
 \Delta\omega = 0 &= \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \Phi^\dagger P \Phi \, dV \\
 &= \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \left\{ \sum_{\mu=1}^M \sum_{t=1}^N \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,t}(\mathbf{r}) R_{\mu,tm} \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right\} dV \\
 &= \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \left\{ \sum_{\mu=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,l}(\mathbf{r}) A_{\mu,lm} \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\mu=1}^M \sum_{l=L+1}^N \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,l}(\mathbf{r}) B_{\mu,lm} \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right\} dV \\
 &= \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \left\{ \sum_{\mu=1}^M \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,l}(\mathbf{r}) A_{\mu,lm} \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\mu=1}^M \sum_{m=L+1}^N \varphi^{\dagger\mu,m}(\mathbf{r}) \left(-\frac{c}{v_m} \right) \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right\} dV \\
 &= \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \left\{ \sum_{\mu=1}^M \sum_{m=1}^L \varphi^{\dagger\mu,m}(\mathbf{r}) \left(-\frac{c}{v_m} \right) \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\mu=1}^M \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,m}(\mathbf{r}) \left(\gamma_{\mu,m} \nu_{\mu,mn} \sum_{\mu,mn}^f \delta k \right) \varphi_{\mu,n}(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\mu=1}^M \sum_{m=L+1}^N \varphi^{\dagger\mu,m}(\mathbf{r}) \left(-\frac{c}{v_m} \right) \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right\} dV \\
 &= \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \int_V \left\{ -c \sum_{\mu=1}^M \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,m}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{v_m} \right) \varphi_{\mu,m}(\mathbf{r}) \right. \\
 &\quad \left. + \delta k \cdot \sum_{\mu=1}^M \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger\mu,m}(\mathbf{r}) \left(\gamma_{\mu,m} \nu_{\mu,mn} \sum_{\mu,mn}^f \right) \varphi_{\mu,n}(\mathbf{r}) \right\} dV.
 \end{aligned}$$

Nous avons alors finalement:

$$(7) \quad \lim_{c \text{ ou } \delta k \rightarrow 0} \left| \frac{\delta k}{c} \right| = \tau_{st} = \frac{\int_V \sum_{\mu=1}^M \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger \mu, m}(\mathbf{r}) \left(\frac{1}{v_m} \right) \varphi_{\mu, m}(\mathbf{r}) dV}{\int_V \sum_{\mu=1}^M \sum_{n=1}^L \sum_{m=1}^N \varphi^{\dagger \mu, m}(\mathbf{r}) \left(\gamma_{\mu, m} \nu_{\mu, mn} \sum_{\mu, mn}^f \right) \varphi_{\mu, n}(\mathbf{r}) dV}$$

où l'intégrale du numérateur est étendue sur tout le volume du réacteur et celle du dénominateur sur le volume des milieux multiplicateurs seulement.

Pour $M=N=2$, il serait intéressant de comparer la formule (7) à celle de RUMSAY [7]. Avec la formule qu'il avait découvert en 1947, RUMSAY avait établi l'expression de la vie moyenne des neutrons dans le cadre d'une théorie de diffusion à deux groupes pour un réacteur composé d'un coeur C et d'un réflecteur R .

Si l'on pose

$F(\mathbf{r}) dV$: nombre des neutrons rapides au point de coordonnées d'espace \mathbf{r} dans un élément de volume dV ,

$\tau_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$: temps nécessaire pour qu'un neutron rapide né à \mathbf{r}_1 devienne thermique à \mathbf{r}_2 ,

$\tau_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$: temps nécessaire pour qu'un neutron devenu thermique à \mathbf{r}_2 soit absorbé à \mathbf{r}_3 ,

$P_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$: probabilité pour qu'un neutron rapide né à \mathbf{r}_1 devienne thermique à \mathbf{r}_2 ,

$P_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$: probabilité pour qu'un neutron devenu thermique à \mathbf{r}_2 soit absorbé à \mathbf{r}_3 .

la formule de RUMSAY s'écrit alors :

$$(8) \quad \tau = \frac{k}{p \int_C F(\mathbf{r}) dV} \int_C dV_3 \int_{C,R} p dV_2 \int_R dV_1 F(\mathbf{r}) \times \\ \times [\tau_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \tau_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)] \quad P_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) P_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3).$$

D'autre part, les équations régissant la distribution des flux des neutrons dans le coeur et le réflecteur du réacteur peuvent s'écrire à partir des équations (1) de la façon suivante :

$$(9) \quad \begin{aligned} D_{C1} \nabla^2 \varphi_{C2}(\mathbf{r}) - \sum_{C1}^a \varphi_{C1}(\mathbf{r}) + \nu_1 \left[\sum_{f1} \varphi_{C1}(\mathbf{r}) + \sum_{f2} \varphi_{C2}(\mathbf{r}) \right] &= 0 \\ D_{C2} \nabla^2 \varphi_{C2}(\mathbf{r}) - \sum_{C2}^a \varphi_{C2}(\mathbf{r}) + \sum_{\text{mod}, C1} \varphi_{C1}(\mathbf{r}) &= 0 \\ D_{R1} \nabla^2 \varphi_{R1}(\mathbf{r}) - \sum_{R1}^a \varphi_{R1}(\mathbf{r}) &= 0 \\ D_{R2} \nabla^2 \varphi_{R2}(\mathbf{r}) - \sum_{R2}^a \varphi_{R2}(\mathbf{r}) + \sum_{\text{mod}, R1} \varphi_{R1}(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned}$$

On tire aisément de (7) et de (9)

$$(10) \quad \tau = \frac{\int_{C,R} \left[\frac{1}{v_1} (\varphi_{C1}^+ \varphi_{C1} + \varphi_{R1}^+ \varphi_{R1}) + \frac{1}{v_2} (\varphi_{C2}^+ \varphi_{C2} + \varphi_{R2}^+ \varphi_{R2}) \right] dV}{\int_C v_1 (\sum_{f1} \varphi_{C1}^+ \varphi_{C1} + \sum_{f2} \varphi_{C1}^+ \varphi_{C2}) dV}$$

où tous les φ peuvent être calculés facilement de (9) et du système qui lui est adjoint, alors que les grandeurs

$$\tau_1(r_1, r_2), \tau_2(r_2, r_3), P_1(r_1, r_2) \text{ et } P_2(r_2, r_3)$$

dans la formule de RUMSAY sont des quantités dont la méthode de calcul n'est pas explicitée. De ce point de vue il est beaucoup plus avantageux de calculer τ à partir de la formule (10), où les différentes grandeurs se trouvent bien définies, que de se hasarder dans les avant-calculs compliqués de la formule (8). Toutefois c'est l'application des deux formules à un même type de réacteur qui peut trancher la question et de décider si derrière la commodité de la formule (10) se cache quelque imprécision en faveur de la formule (8).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. AVERY : *Coupled Fast Thermal Power Breeder*, Nuclear Science and Engineering, **3**, (1958).
- [2] G. BRIGHENTI, A. CORIOU, E. DIANA ET A. Y. ÖZEMRE: *Réacteur Couplé de 400 MW Thermiques*, Projet de promotion en Génie Atomique (SACLAY, 1958).
- [3] D. OKRENT ET AL. : *Les Aspects Théoriques et Expérimentaux de la Physique des Réacteurs Rapides*, 1^{er} Conférence de Genève, rapport: **609**, (1955).
- [4] S. GLASTONE AND M. EDLUND : *The Elements of Nuclear Reactor Theory*, Van Nostrand Book Co., 6th ed., (1956).
- [5] V. H. RUMSAY : *Jour. App. Phys.*, **25**, 1395-1399, (1954).

voir aussi:

- R. AVERY : *Theory of Coupled Reactors*, Second International Conference of Geneva, report: **1858**, (1958).
- H. GRÜMM UND K. H. HÖCKER : *Lineare Reaktor kinetik und-Störungstheorie Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften*, **30**, 156 und 273-274. (1958).

Et aussi le rapport américain : ANL-5800, 239, (1958); ainsi que: J. American Inst. Chem. Eng. **2**, (2), 219, (1956).

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
TEORİK FİZİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL — TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 30 Avril 1959)

ÖZET

Bu makalede N enerji guruplu nötron difüzyonu teorisine dayanılarak M farklı ortamdan müteşekkil bir nükleer reaktördeki nötronların ortalama ömrünü veren en genel ifade elde edilmekte ve bu, $M=N=2$ özel hâli için, RUMSAY formülü ile mukayese edilmektedir.