SUR LES CUBIQUES GAUCHES EN PERSPECTIVE

Suat Akin

L'objet de ce travail est d'étudier les cas où certaines cubiques gauches sont en perspective par rapport à uu ou deux centres de perspective et d'en déduire des relations qui les lient. Nous allons d'abord considérer le cas des cubiques gauches situées sur nue quadrique à génératrices rectilignes réelles, ce qui nous permettra d'obtenir certains résultats concernant les cubiques de l'espace. Nous prendrons ensuite en considération le cas des faisceaux de cubiques gauches d'une quadrique à génératrices rectilignes réelles.

1. Dans ce premier paragraphe nous allons rappeler quelques propriétés classiques de la cubique gauche qui vont noua servir par la suite [1])

a) Considérons dans l'espace à 3 dimensions 6 points tels que 4 quelconques de ceux-ci ne soient pas coplanaires. Il suit de là que 3 quelconques de ces points ne seront pas alignés. *Une cubique* [2]) *est alors complètement déterminée à l'aide de ces* 6 *points.*

Il en résulte alors que:

b) *Deux cubiques non-identiques ne peuvent avoir au plus que* 5 *points communs.*

Une cubique est en général rencontrée par une quadrique Φ quelconque [3]) en 6 points. D'où :

c) *Si une cubique gauche a* 7 *points communs avec une quadrique, elle appartient à la quadrique.*

d) *Pour toute cubique située sur une quadrique, l'un des deux systèmes des génératrices est* uni-sécant, *tandis que l'autre est* bi-sécant.

e) *Les cubiques d'une même quadrique Φ se divisent en* 2 *groupes : Si l'un des systèmes des génératrices rectilignes de Φ est uni-sécant pour les cubiques constituant le premier groupe, il est bi-sécant pour celles de l'autre groupe.*

---

1) Voir à ce sujet: Th. Reye, Die Geometrie der Lage. II. Abt.

2) Dorénavant le mot «cubique» désignera une cubique gauche de l'espace.

3) Dans la suite, quand nous parlerons d'une quadrique Φ, ou plus brièvement de Φ il s'agira toujours d'une quadrique à génératrices rectilignes réelles.

f) 2 *cubiques du même groupe ont 4 points communs, tandis que 2 autres de groupes différents en ont 5.*

g) *Par 5 points d'une même quadrique, il passe en général 2 cubiques situées sur cette quadrique, et 2 seulement.*

h) *2 cubiques ayant 5 points communs, définissent en général une et une seule quadrique qui les contient. Car cette quadrique passera (d'après c) par:* $5+2+2=9$ *points qui suffisent pour la déterminer.*

i) *Par un point quelconque* S *de l'espace, il passe une et une seule bi-sécante d'une cubique donnée, qui ne contient pas* S.

Deux cubiques d'une même quadrique ne sont pas en général en perspective. Autrement dit, deux cubiques d'une même quadrique ne sont pas toujours situées sur un même cône du troisième degré.

2. Considérons maintenant une cubique c tracée sur une Φ donnée et projetons la, à partir d'un point quelconque S de l'espace, toute fois non situé sur Φ, sur la même quadrique Φ. Nous obtenons alors une autre cubique $\bar{c}$ de Φ. $\bar{c}$ se trouve évidemment sur le cône du troisième degré défini par S et c. Les cubiques c, $\bar{c}$ se correspondent dans la *collinéation perspective harmonique* qui a pour centre S. Les points doubles de cette transformation sont situés sur l'intersection de Φ avec le plan polaire σ de S par rapport à Φ. Il en résulte que les points d'intersection C, D, E de σ avec c sont également ceux de σ avec $\bar{c}$. L'unique bi-sécante de c qui passe par S coupe Φ — ou bien c — en deux points A et B qui sont homologues l'un de l'autre dans la collinéation mentionnée ci-dessus. Il suit de là que les cubiques c, $\bar{c}$ ont en commun les 3 points doubles C, D, E et les 2 points A, B qui se correspondent.

Si une bi-sécante de c est une génératrice rectiligne de Φ, elle est transformée en une bi-sécante de $\bar{c}$ qui est en même temps une génératrice rectiligne de l'autre système.

Les cubiques c, $\bar{c}$ étant en perspective par rapport à S ont 5 points communs, donc (d'après *f*) appartiennent à des familles différentes de cubiques situées sur Φ.

Réciproquement, considérons 5 points de Φ dont 4 quelconques ne soient pas coplanaires. Supposons de plus que le pôle S du plan défini par 3 quelconques de ces points soit situé sur la droite qui joigue les deux autres. Si l'on projette (d'après *g*) l'une des cubiques c, $\bar{c}$ qui passent par ces 5 points, par exemple c, à partir de S sur Φ, on obtient d'après ce qui précède, une autre cubique passant par les mêmes 5 points, donc une cubique identique à $\bar{c}$. Les deux cubiques c, $\bar{c}$ de Φ qui passent par ces 5 points sont donc en collinéation perspective harmonique par rapport au point S, qui est le centre de cette transformation. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème suivant:

Théorème 1. *Pour que deux cubiques d'une même quadrique soient en perspective, il faut et il suffit que :*

a) les deux cubiques appartiennent à des familles différentes, et que par suite elles aient 5 points en commun ;

b) le pôle du plan défini par 3 de ces 5 points soit situé sur la droite joignant les deux autres points.

3. Considérons maintenant 5 points A, B, C, D, E tels que 4 quelconques d'entre eux ne soient pas coplanaires. On peut faire passer par ces points une ∞^2 de cubiques c qui forment un réseau, et une ∞^4 de quadriques Φ. Deux cubiques quelconques du réseau définissent (d'après h) une quadrique d'une façon univoque. Réciproquement, il n'existe qu'un seul couple de cubiques du réseau précédent appartenant à cette quadrique.

D'après ce qu'on a dit plus haut, si deux cubiques $c, \bar{c}$ du réseau sont en perspective, le centre de perspective S se trouve sur la droite joignant deux des points A, B, C, D, E tandis que le plan σ défini par les 3 autres points doit être le plan polaire de S par rapport à la quadrique définie par $c, \bar{c}$.

Si S est un point de la droite AB par exemple, le plan σ sera alors défini par CDE. T étant le point où AB coupe le plan CDE, ST divise harmoniquement AB et ceci détermine S d'une façon univoque.

Le nombre des quadriques passant par A, B, C, D, E et ayant (S, σ) comme couple polaire est de ∞^2. En effet, la donnée d'un point de Φ en fournit un autre en considérant le couple polaire (S, σ). Pour la détermination complète d'une telle quadrique il suffit donc de donner, à partir des 5 points données, 2 autres points, ce qui fait en tout: $5+2+2=9$ points. Le nombre de ces quadriques est donc bien ∞^2. Donc les quadriques en question dépendent bien de deux paramètres. Ajoutons de plus qu'une telle quadrique possède un cône tangent (Sk) tout le long de k, section plane de Φ par σ, et elle passe en outre par les deux points A, B qui sont conjugués harmoniques par rapport aux points S, T. On peut également dire que chaque conique k du réseau défini par les trois points C, D, E donne naissance à une seule quadrique Φ qui passe par les sommets du pentagone $ABCDE$ et possède deux cubiques $c, \bar{c}$ qui sont en perspective par rapport au point S de la droite AB qui joint deux sommets du pentagone de tout à l'heure. D'où le théorème suivant:

Théorème 2. *Etant donnés 5 points A, B, C, D, E de l'espace tels que 4 quelconques d'entre eux ne soient pas coplanaires, il existe dix familles différentes de quadriques passant par ces points et dépendant chacune de deux paramètres de telle sorte que chaque quadrique de n'importe quelle famille contient un couple de cubiques en perspective et passant par les 5 points en question. Le centre de perspective S se trouve sur la droite joignant 2 sommets du pentagone $ABCDE$ et est le conjugué har-*

moniqae du point, où cette droite coupe le plan défini par les 3 autres sommets, par rapport aux 2 sommets définissant la droite en question.

4. Cherchons maintenant dans quelles conditions deux cubiques c, $\bar{c}$ passant par les 5 points A, B, C, D, E et se trouvant sur une quadrique Φ qui appartient à l'une des 10 familles précédemment décrites, peuvent être en perspective par rapport à 2 points différents. Supposons que ceci ait lieu et soient alors S_1, S_2 les deux centres de perspective et σ_1, σ_2 les plans polaires correspondants. Appelons d_1, d_2 2 droites gauches joignant chacune 2 sommets du pentagone $ABCDE$ et portant les pôles S_1, S_2. Désignons enfin par T_1, T_2 les points où d_1, d_2 coupent respectivement les plans polaires σ_1, σ_2. La droite $s = S_1 S_2$ a pour conjuguée l'intersection des plans polaires σ_1, σ_2, c'est-à-dire la droite $t = T_1 T_2$. Il suit de là que la droite t passe par le cinquième point du pentagone qui n'est situé ni sur d_1 ni sur d_2. On peut également dire que la droite t est une droite qui coupe d_1, d_2 et qui passe par un sommet du pentagone n'appartenant ni à d_1, ni à d_2.

Supposons par exemple que

$$d_1 = AB, \qquad d_2 = CD;$$

t sera alors la droite passant par E et coupant d_1, d_2 aux points T_2, T_2. Les points S_1, S_2 sont alors les conjugués harmoniques des points T_1, T_2 respectivement par rapport à AB, CD. Comme chacun des plans $\sigma_2 = ABE$, $\sigma_1 = CDE$ contient respectivement le pôle de l'autre, ce sont deux plans conjugués par rapport à la quadrique Φ. Il est alors évident que le plan tangent en E à la quadrique Φ est déterminé par le plan ES_1S_2. Si on appelle F le second point d'intersection de la droite t avec la quadrique Φ, le plan ES_1S_2 définira de même le plan tangent en F à Φ. Les quadriques communes aux deux familles de quadriques en nombre ∞^2, l'une passant par les 5 points A, B, C, D, E et ayant pour couple polaire (S_1, σ_1), l'autre passant par les mêmes points et ayant pour coupie polaire (S_2, σ_2) répondent donc à la question, c'est-à-dire qu'elles contiennent les deux cubiques c, $\bar{c}$ qui sont en perspective par rapport à deux points différents S_1, S_2. Ces quadriques forment un faisceau linéaire. Il est visible que le point E est un point double pour les deux transformations.

Projetons maintenant à partir de S_1 la cubique c sur $\bar{c}$. Cette projection fait correspondre à une suite de points de c une autre suite de points sur $\bar{c}$. Si de plus on projette à partir de S_2 la cubique $\bar{c}$ sur c, cette seconde projection fera correspondre à une suite initiale de points sur c, une autre suite de points également sur c. Ces deux suites de points auront évidemment E comme point double, qui est commun aux deux cubiques c, $\bar{c}$. Mais il y a aussi un autre point double H qui n'est pas commun aux deux cubiques. Il s'obtient comme intersection de la droite S_1S_2 avec la cubique c. Dans la première projection, l'homologue de H est un point $\bar{H}$ de $\bar{c}$. Comme les 4 points $S_1, S_2, H, \bar{H}$ se trouvent sur une même droite, la droite $S_1 S_2$ joignant les deux centres de perspective est une sécante commune aux deux cubiques $c, \bar{c}$.

On sait que toutes les bi-sécantes d'une cubique gauche qui coupent l'une de ses uni-sécantes et qui ne passent pas par le point où cette uni-sécante coupe la cubique sont les génératrices d'un même système d'une quadrique; comme $S_1 S_2$ est une uni-sécante pour chacun des cubiques $c, \bar{c}$, les bi-sécantes de c — ou de $\bar{c}$ — qui coupent $S_1 S_2$ sont donc les génératrices d'un même système d'une quadrique ψ, dont $S_1 S_2$ est également une génératrice, mais de l'autre système. Remarquons de plus que $S_1 S_2$ est une génératrice triple de l'intersection des deux cônes de sommets S_1, S_2 et de directrices respectives $c, \bar{c}$.

Nous avons dit plus haut que les quadriques qui passent par les 5 points A, B, C, D, E dont 4 quelconques ne sont pas coplanaires et qui possèdent pour couples polaires (S_1, σ_1), (S_2, σ_2) forment un faisceau linéaire. Nous avons supposé d'autre part que S_1, S_2 se trouvent par exemple sur deux côtés pauches $d_1 = AB$, $d_2 = BC$ du pentagone $ABCDE$. Le nombre des côtés deux à deux gauches d'un pentagone étant 15, on peut énoncer le théorème suivant:

Théorème 3. *Etant donnés 5 points A, B, C, D, E de l'espace tels qae 4 quelconques d'entre eux ne sont pas cop'anaires, appelons T_1, T_2 les points où AB, CD par exemple coupent respectivement les p'ans $\sigma_1 = CDE$, $\sigma_2 = ABE$, et désignons par S_1, S_2 les conjuguée harmoniques de ces points par rapport à AB, CD. Considérons alors le faisceau linéa're de quadriques passant par A, B, C, D, E et ayant pour couples polaires (S_1, σ_1), (S_2, σ_2). Le nombre de tels faisceaux linéaires de quadriques est alors 15. Si l'on considère une quadrique quelconque appartenant à l'un de ces faisceaux, elle contient une paire de cubiques $c, \bar{c}$ passant par A, B, C, D, E et étant en perspective par rapport à deux centres différents. Les deux centres de perspective se trouvent sur deux côtés gauches du pentagone $ABCDE$. La droite qui joint ces deux centres est une uni-sécante pour chacune des deux cubiques.*

Remarque. Un pentagone de l'espace ne possédant pas 3 côtés 2 à 2 gauches entre eux, deux cubiques ne peuvent pas être en perspective par rapport à trois centres différents.

5. Considérons maintenant le cas particulier suivant: supposons que deux côtés gauches, par exemple $d_1 = AB$ et $d_2 = CD$, du pentagone $ABCDE$ soient deux droites conjuguées par rapport à une quadrique Φ contenant les 5 points A, B, C, D, E. Cette quadrique sera alors complètement déterminée et d'une façons univoque. En effet, si AB et CD sont deux droites conjuguées par rapport à une quadrique passant par les points A, B, C, D, E, les plans tangents à cette quadrique aux points A, B, C, D sont alors respectivement déterminés par les plans ACD, BCD, CAB, DAB. Connaissant 5 points et 4 plans tangents, la quadrique sera complètement déterminée, et ceci d'une façon univoque. On peut également

dire ceci: AB et CD étant supposées conjuguées par rapport à Φ, le plan tangent en B passera par CD. Or ce plan tangent est défini par 2 génératrices rectilignes de systèmes différents de Φ qui passent par B. Il s'en suit alors que BC, BD sont 2 génératrices de Φ. Il en est de même des côtés AD, AC. Les côtés AC, BD appartiennent à l'un des systèmes, et AD, BC à l'autre. Si l'on fait passer par E la droite $ET_1^* T_2^*$ qui coupe AC en T_1^* et BD en T_2^*, cette droite sera une génératrice de Φ, et la quadrique définie par les droites qui rencontrent les trois droites deux à deux gauches $ET_1^* T_2^*$, AD, BC définira la quadrique Φ. On aurait pu également considérer la droite $ET_1' T_2'$ qui coupe AD et BC respectivement aux points T_1', T_2'. Ajoutons de plus que la conique intersection d'un plan quelconque passant par E et de la quadrique Φ est également connue, puisque l'on en connaît 5 points, à savoir: E et les 4 points d'intersection du plan en question avec les génératrices AC, AD, BC, BD de Φ. Rappelons d'autre part la façon dont s'obtient les pôles S_1, S_2 des plans $\sigma_2 = ABE$, $\sigma_1 = CDE$ par rapport à Φ: soient T_1, T_2 les points où la droite passant par E et coupant $d_1 = AB$, $d_2 = CD$, rencontre ces dernières. Les conjugués harmoniques S_1, S_2 de T_1, T_2 par rapport à AB et CD sont les pôles des plans σ_1 et σ_2 par rapport à Φ. Deux cubiques de Φ passant par les 5 points donnés et qui sont en perspective par rapport à S_1, sont également en perspective par rapport à S_2. D'où le théorème:

Théorème 4. *Etant donnés 5 points A, B, C, D, E de l'espace tels que 4 quelconques de ceux-ci ne soient pas coplanaires, il existe 15 quadriques passant par ces 5 points et par rapport auxquelles 2 côtés gauches du pentagone sont 2 droites conjuguées. Chacune de ces quadriques contient un couple de cubiques qui sont en perspective par rapport à 2 centres différents, respectivement situés sur les 2 côtés gauches conjugués correspondant à cette quadrique.*

6. Ajoutons maintenant quelques mots sur la façon de choisir les 5 points A, B, C, D, E d'une quadrique donnée Φ pour que ce que nous avons dit plus haut soit réalisé, c'est-à-dire que les cubiques $c, \bar{c}$ passant par ces 5 points et situées sur Φ soient en perspective par rapport à 2 centres différents. Les conditions que l'on doit imposer à ces points sont les suivantes:

I) Les plans $\sigma_1 = CDE$, $\sigma_2 = ABE$ doivent être conjugués par rapport à Φ, autrement-dit, l'un quelconque de ces plans doit contenir le pôle de l'autre. Ajoutons de plus qu'aucun de ces plans ne doit être tangent à Φ. Il est aussi à remarquer que les deux plans ainsi définis à l'aide des 5 points ne doivent en contenir qu'un seul en commun, à savoir - ici - E.

II) Les droites $d_1 = AB$, $d_2 = CD$ doivent respectivement passer par les pôles S_1, S_2 de σ_1, σ_2 et être situées respectivement dans les plans σ_2, σ_1.

En se basant sur ces 2 conditions, les 5 points de Φ peuvent être choisis de la façon suivante:

On prend 2 plans conjugués quelconques σ_1, σ_2 par rapport à Φ, toutefois non tangents à cette dernière. Soit alors t leur intersection. La droite conjuguée s de t par rapport à Φ coupe σ_1, σ_2 respectivement aux pôles S_2, S_1. L'un des points d'intersection de t avec Φ peut être pris pour E. Quant aux 4 autres points; A et B sont les points d'intersection d'une droite quelconque passant par S_1 du plan σ_2 avec Φ et de même C et D sont les points d'intersection d'une droite quelconque passant par S_2 du plan σ_1 avec Φ.

Si on appelle $H, \bar{H}$ les points où $s = S_1 S_2$ coupe Φ, les deux cubiques $c, \bar{c}$ de Φ et qui passent respectivement par les points A, B, C, D, E, H; $A, B, C, D, E, \bar{H}$ seront en perspective par rapport à S_1 et à S_2.

La détermination effective des deux cubiques $c, \bar{c}$ s'effectue comme suit:

Si l'on considère un plan passant par exemple par les deux points A, B de c - ou de $\bar{c}$ - ce plan coupe c en un troisième point N. Et par N passent deux génératrices de systèmes différents de Φ. Au faisceau de plans d'axe $d_1 = AB$, on peut alors faire correspondre un des systèmes des génératrices de Φ qui passent par les points N correspondant aux différents plans du faisceau en question. Cette correspondance est évidement homographique. Si l'on coupe le faisceau de plans d'axe $d_1 = AB$ par le plan σ_1, on obtient un faisceau de droites de sommet T_1, situé dans σ_1. La génératrice de l'autre système passant par E définit avec le système des génératrices envisagées un autre faisceau de plans. Ce dernier coupé par le même plan σ_1 donnera un autre faisceau de droites de sommet E et situé dans σ_1. Chaque rayon de ce second faisceau est obtenu en joignant E au pied de la génératrice passant par N et appartenant au système considéré sur σ_1. Le lieu de ces pieds est constitué par la section conique k_1 de Φ avec σ_1, qui passe déjà par les points D, C, E. Ainsi, les deux faisceaux de droites situés dans le même plan σ_1 sont en correspondance homographique. On en connaît trois couples homologues particuliers, à savoir: $T_1 (D, C, E)$ et $E (D, C, E)$, le rayon $E (E)$ étant tangent en E à k_1. Le point de rencontre des rayons homologues de ces deux faisceaux homographiques décrit une conique auxiliaire p, passant par les points C, D, E, T_1 et étant tangente eu E à k_1. Un point quelconque N de la cubique c est alors obtenu de la façon suivante: on prend un rayon quelconque du faisceau de droites de sommet T_1 qui coupe la conique p en P. Le rayon EP du second faisceau de droites coupera alors k_1 en $\bar{P}$. La génératrice appartenant au système envisagé de Φ et passant par $\bar{P}$ coupera alors le plan PAB en un point N qui appartient à la cubique c.

Remarquons de plus que comme le plan tangent en E à Φ est déterminé par $S_1 E S_2$ et comme les points $H, \bar{H}$ de $c, \bar{c}$ se trouvent sur la droite $S_1 S_2$, les droites $E H$, $E \bar{H}$ sont les deux génératrices de Φ passant par E. Si l'on prend donc le cône du second degré ayant pour sommet H, et pour directrice c, son intersection avec Φ se composera de la cubique c et de la génératrice commune $E H$. La cubique c peut également être représentée de cette façon. Chacun des cônes ayant pour sommets S_1 et S_2, et pour directrices respectives $c, \bar{c}$ est du troisième degré. Leur intersection, qui doit être du neuvième degré, se compose des deux cubiques $c, \bar{c}$ et de la génératrice commune $S_1 S_2$ qui est comptée triplement.

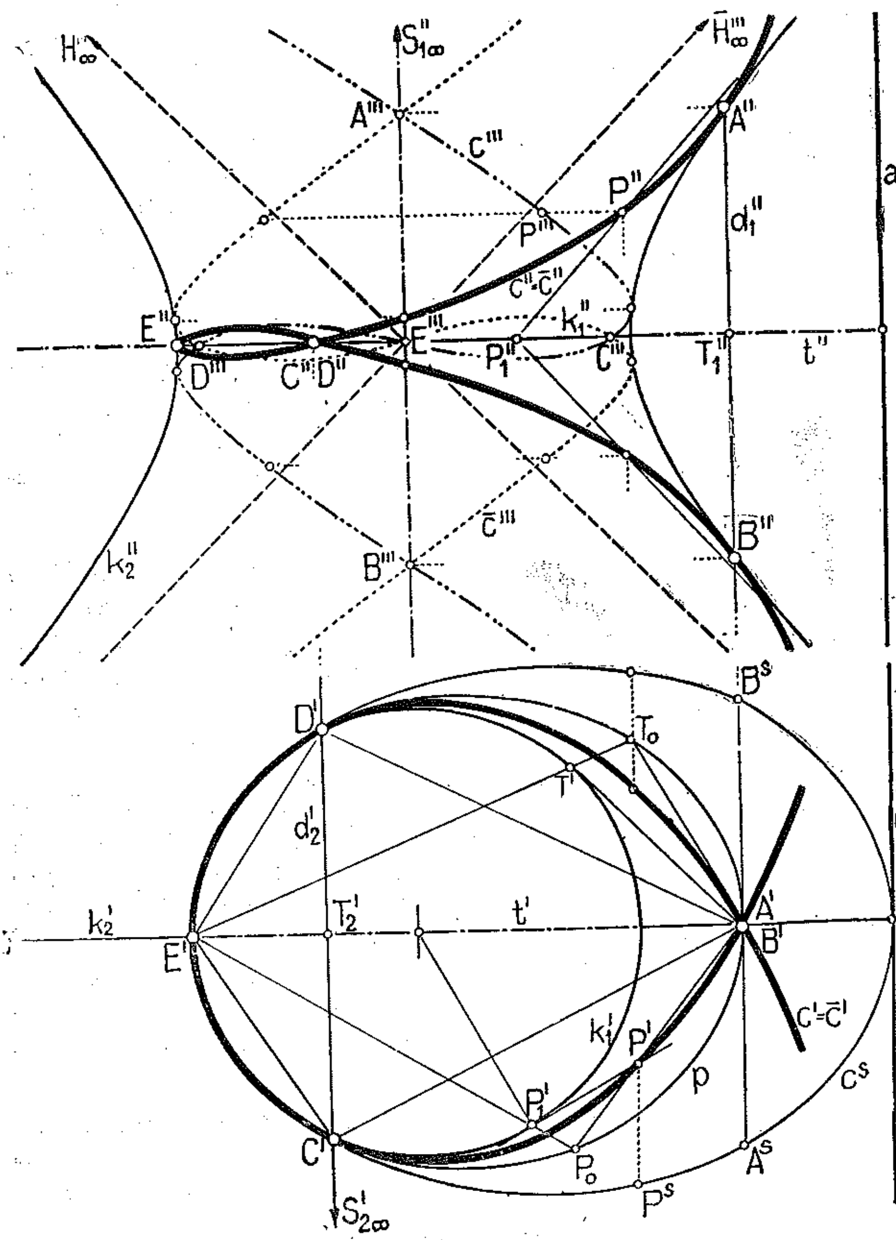
Application. Comme application nous allons prendre en considération l'exemple qui suit:

Supposons que la quadrique Φ soit un hyperboloïde de révolution à axe vertical, le plan σ_1 étant celui du cercle de gorge, et le plan σ_2 étant celui du contour apparent vertical. La droite $t = (\sigma_1, \sigma_2)$ est alors le diamètre du cercle de gorge, parallèle à la ligne de terre. L'une des extremités de ce diamètre peut être choisie comme E. Le cercle de gorge correspond à k_1. Les deux centres de projection S_1, S_2 sont donc rejetés à l'infini, le premier dans la direction orthogonale au plan horizontal, et le second dans la direction orthogonale au plan vertical. La droite $S_1 S_2$ est donc la droite à l'infini des plans de profil. Les points d'intersection d'une droite verticale quelconque du plan σ_2 avec l'hyperbole du contour apparent vertical sont les points A, B. Et les points d'intersection d'une droite de bout quelconque du plan σ_1 avec le cercle de gorge k_1 sont les points C, D. Les deux projections horizontale et verticale des cubiques $c, \bar{c}$ ont pour axes de symétrie respectifs, les deux projections t', t'' de t. Enfin les points $H, \bar{H}$ des cubiques $c, \bar{c}$ sont les points à l'infini des génératrices de profil de Φ. Dans cet exemple, c et $\bar{c}$ ont mêmes projections horizontale et verticale. Mais pour tout autre projection centrale ou parallèle les mêmes cubiques ont des projections horizontales ou verticales différentes. La figure ci-contre contient également une projection auxilaire des deux cubiques $c, \bar{c}$ faite sur le plan de profil.

7. Etudions maintenant le cas des deux cubiques d'une même quadrique Φ qui passent par 4 points donnés de celle-ci et qui sont en perspective soit par rapport à un seul centre, soit par rapport à 2 centres différents.

I) Soient A, B, C, D 4 points non eoplanaires d'une quadrique Φ. Supposons que 2 cubiques $c, \bar{c}$ situées sur Φ et passant par ces points soient en perspective par rapport à un point S. D'après le premier théorème, le centre de perspective S est alors le pôle par rapport à Φ du plan défini par 3 de ces 4 points, et la droite joignant le quatrième point au pôle S coupe Φ en un cinquième point E qui est commun à $c, \bar{c}$. D'où le théorème:

Théorème 5. *Par 4 points non eoplanaires A, B, C, D d'une quadrique Φ passent 4 couples de cubiques de Φ. Chuque couple est en perspective par rapport à un centre qui est le pôle de l'une des faces du tétraèdre $ABCD$ par rapport à la quadrique Φ. Chaque droite joignant le pôle de l'une des faces du tétraèdre au sommet opposé à cette face coupe la quadrique Φ en un cinquième point qui est commun, au couple de cubiques correspondant. Les deux cubiques de chaque couple appartiennent à des groupes différents.*


H_∞''
$S_{1\infty}''$
$\bar{H}_\infty'''$
A'''
A''
c'''
a''
P''
P'''
d_1''
$c''=\bar{c}''$
E''
E'''
k_1''
D'''
$C''D''$
P_1''
C'''
T_1''
t''
$\bar{c}'''$
$\bar{B}''$
k_2''
B'''
B^s
D'
T_0
T'
a'
d_2'
k_2'
T_2'
t'
A'
B'
E'
$c'=\bar{c}'$
k_1'
P'
p
c^s
P_1'
C'
P_0
A^s
P^s
$S_{2\infty}'$

II) Supposons maintenant que 2 cubiques situées sur une quadrique Φ et passant par 4 points non coplanaires A, B, C, D de celle-ci soient en perspective par rapport à 2 centres S_1, S_2. Il suit alors du théorème 3 que les points A, B, C, D sont tels que 2 côtés gauches du tétraèdre $ABCD$, par exemple $d_1 = AB$, $d_2 = CD$ portent les deux centres de perspective S_1, S_2 qui sont 2 points conjugués par rapport Φ. Autrement dit, les 2 droites conjuguées $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ de d_1, d_2 par rapport à Φ doivent respectivement couper d_2, d_1 aux points S_2, S_1. D'autre part, les plans polaires σ_1, σ_2 de S_1, S_2 sont respectivement déterminés par $(C, \bar{d}_1)$ et $(A, \bar{d}_2)$. Il en résulte que si l'on choisit arbitrairement 3 quelconques des 4 points sur Φ, par exemple: A, B, C; le quatrième point D ne pourra plus être choisi arbitrairement. Car, ce sera un point quelconque, non pas de Φ, mais de la section conique k_1 de Φ avec le plan $\sigma = (C, \bar{d}_1)$. S_1 sera alors le pôle du plan σ_1 et S_2 le point d'intersection des droite $d_2 = CD$, $\bar{d}_1$. Le plan pôlaire σ_2 de S_2 ainsi déterminé et qui contient évidemment d_1, coupera σ_1 le long d'une droite t qui est la conjuguée de $s = S_1 S_2$ par rapport à Φ. t coupe Φ en 2 points E, F. Les couples de cubiques de Φ qui passent par les points A, B, C, D, E où bien A, B, C, D, F seront en perspective par rapport à S_1 et S_2. D'où le théorème:

Théorème 6. *Etant donné un tétraèdre formé par 4 points non coplanaire d'une quadrique Φ, soient d_1 et d_2 deux côtés gauches de ce tétraèdre. Si la droite conjuguée $\bar{d}_2$ de $\bar{d}_2$ par rapport à Φ coupe d_1 en un point S_1, la droite conjuguée $\bar{d}_1$ de d_1 par rapport à Φ coupe alors d_2 en un point S_2. Le faisceau de cubiques de Φ qui passent par ces 4 points contient deux couples qui sont en perspective par rapport à S_1 et S_2.*

Remarque. Il résulte du théorème précédent que si les droites $(d_1, \bar{d}_2)$ et $(d_2, \bar{d}_1)$ ont plus d'un point en commun, alors $d_1 \equiv \bar{d}_2$, $d_2 \equiv \bar{d}_1$, c'est-à-dire que d_1 et d_2 sont deux droites conjuguées par rapport à Φ; les deux centres de perspective S_1, S_2 sont alors indéterminés. Si l'on considère deux cubiques quelconques de groupes différents du faisceau de cubiques de Φ passant par les 4 points donnés, elles auront un cinquème point commun E qui déterminera les deux plans $\sigma_1 = (d_2, E)$, $\sigma_2 = (d_1, E)$. S_1, S_2 seront alors les pôles de σ_1, σ_2 situés respectivement sur d_1, d_2 et les deux cubiques en question seront en perspective par rapport à ces deux points.

Si maintenant, à part les 4 points non coplanaires de Φ, on se donne un cinquième point E de Φ, de façon que 4 quelconques de ces 5 points ne soient pas coplanaires, cela déterminera deux cubiques de groupes différents $c, \bar{c}$ de Φ qui passeront par ces 5 points. Si l'on considère la droite t passant par E et coupant $d_1 = AB$, $d_2 = CD$ aux points T_1, T_2; les deux cubiques passant par A, B, C, D, E seront en perspective par rapport aux deux points S_1, S_2 qui sont respectivement les conjugués harmoniques des points T_1, T_2 par rapport à AB, CD. Si F représente le second point d'intersection de la droite t avec Φ, les deux cubiques $c_1, \bar{c}_1$

de Φ passant par les 5 poiuts A, B, C, D, F sont également en perspective par rapport aux mêmes points S_1, S_2. La droite $s = S_1 S_2$ coupe Φ en deux points $H, \bar{H}$. L'un de ces points, par exemple H, est commun aux cubiques c, c_1 et l'autre $\bar{H}$ aux cubiques $\bar{c}, \bar{c}_1$. Cela veut dire que les deux cubiques c, c_1 ont 5 points communs A, B, C, D, H et les deux autres cubiques $\bar{c}, \bar{c}_1$ ont en communs les 5 poiuts $A, B, C, D, \bar{H}$, D'autre part, comme la droite s passant par les points $H, \bar{H}$ coupe $d_1 = AB$, $d_2 = CD$ aux points S_1, S_2; il en résulte que c, c_1 ou bien $\bar{c}, \bar{c}_1$ sont en perspective par rapport aux points T_1, T_2. Ainsi les deux droites s, t forment un couple involutil par rapport au faisceau de cubiques passant par A, B, C, D. Autrement dit, chaque couple de cubiques en perspective passant par les points A, B, C, D en donne un autre également en perspective par rapport aux mêmes points. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 7. *Si les deux côtés gauches $d_1 = AB$, $d_2 = CD$ du tétraèdre formé par 4 points A, B, C, D non coplanaires d'une quadrique Φ sont conjuguées par rapport à Φ, deux cubiques quelconques appartenant à des familles différentes du faisceaux de cubiques passant par les 4 points sont en perspective par rapport à deux centres situés sur d_1, d_2. Si une sécante commune t des côtés d_1, d_2 coupe Φ en E, F et d_1, d_2 en T_1, T_2, les couples de cubiques $(c, \bar{c})$, $(c_1, \bar{c}_1)$ passant respectivement par les points A, B, C, D, E et A, B, C, D, F possèdent les mêmes centres de perspective S_1, S_2, conjugués harmoniques des points T_1, T_2 par rapport à AB, CD. De même, les couples de cubiques (c, c_1), $(\bar{c}\,\bar{c}_1)$ sont en perspective par rapport à T_1, T_2.*

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
İNŞAAT FAKÜLTESİ
TASARI GEOMETRİ KÜRSÜSÜ
İSTANBUL — TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 7 Septembre 1959)

ÖZET

Uzay kübiklerinin bir veya iki merkeze nazaran hangi şartlar altında perspektif durumda bulunacakları ve bu durumda olan kübiklerin aralarındaki bağıntıların tetkik ve tespiti bu travayın konusunu teşkil etmektedir.

Problem önce bir reel doğrular kuadriği üzerinde bulunan kübikler için gözönüne alınmış, sonra uzaya teşmil edilmiştir. Nibayet reel doğrular kuadrikleri üzerindeki kübik demetleri için bahis konusu perspectivite şartları tetkik ve tespit edilmiştir.