EXTENSION DE QUELQUES FORMULES DE LA THÉORIE DES SURFACES AUX CONGRUENCES DE DROITES

MUZAFFER KULA

Etant donnée une congruence de droites, représentée par un vecteur dual unitaire, nous avons considéré dans le premier chapitre le cas où elle est rapportée à des surfaces coordonnées réglées quelconques. Employant des dérivées invariantes, effectuées par rapport aux arcs duaux des surfaces coordonnées réglées, nous avons ensuite établi les formules de dérivation et les conditions d'intégrabilité, ce qui nous a permis de trouver les nouvelles formes des formules de MANNHEIM et de HAMILTON correspondant à ce cas général. Nous avons finalement étendu aux congruences de droites, toujours dans le même cas général, deux formules de LIOUVILLE relatives à la théorie des surfaces. Dans le second chapitre, nous avons étendu les deux différentiateurs de BELTRAMI aux congruences de droites. Par la suite, nous avons pu, à l'aide de ces différentiateurs, exprimer la courbure sphérique duale d'une surface réglée appartenant à la congruence et faire quelques applications.

CHAPITRE I

DÉRIVATION PAR RAPPORT À L'ARC DUAL ET CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DANS LES CONGRUENCES DE DROITES

§ 1. Extension de la notion de «*dérivée invariante*» aux congruences de droites dans le cas où ces dernières sont rapportées à des surfaces coordonnées réglées quelconques.

Considérons la congruence de droites définie par le vecteur dual unitaire

$$\mathbf{A}(u, v) = \mathbf{a}(u, v) + \varepsilon \overline{\mathbf{a}}(u, v) \tag{1.1}$$

$$(\varepsilon^2 = 0, \quad \mathbf{a}^2 = 1, \quad \mathbf{a} \cdot \overline{\mathbf{a}} = 0),$$

où u, v sont deux paramètres réels [1, p. 264, 277].

Les éléments linéaires duaux correspondant aux surfaces coordonnées réglées sont respectivement donnés par [1, p. 277]

$$dU^2 = E\,du, \qquad dV^2 = G\,dv^2 \tag{1.2}$$

où

$$E = e + \varepsilon \bar{e}, \quad F = f + \varepsilon \bar{f}, \quad G = g + \varepsilon \bar{g},$$

$$e = \mathrm{a}_u^2, \quad \bar{e} = 2\mathrm{a}_u \cdot \bar{\mathrm{a}}_u, \quad f = \mathrm{a}_u \cdot \mathrm{a}_v, \quad \bar{f} = \mathrm{a}_u \cdot \bar{\mathrm{a}}_v + \mathrm{a}_v \cdot \bar{\mathrm{a}}_u,$$

$$g = \mathrm{a}_v^2, \quad \bar{g} = 2\mathrm{a}_v \cdot \bar{\mathrm{a}}_v .$$

Soit

$$\Psi(u, v) = \psi(u, v) + \varepsilon \bar{\psi}(u, v)$$

une fonction duale de u, v qui peut être une fonction scalaire ou vectorielle.

Posons alors

$$\Psi_{\mathrm{I}} = \frac{\Psi_u}{\sqrt{E}}, \quad \Psi_{\mathrm{II}} = \frac{\Psi_v}{\sqrt{G}}, \tag{1.3}$$

où on a supposé

$$\sqrt{e} \neq 0, \quad \sqrt{g} \neq 0.$$

$\Psi_{\mathrm{I}}, \Psi_{\mathrm{II}}$ seront appelés les *dérivées premières* (duales) *invariantes* de Ψ correspondant aux surfaces coordonnées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$. $\Psi_{\mathrm{I}}, \Psi_{\mathrm{II}}$ restent inchangés, si l'on fait le changement de paramètres

$$u = u(u^*), \quad v = v(v^*) \tag{1.4}$$

qui n'altère pas les surfaces coordonnées; d'où l'appellation «invariante».

D'après (1.2) et (1.3) il est presque évident que Ψ_{I} et Ψ_{II} sont les dérivées dnales de Ψ par rapport aux arcs duaux des surfaces coordonnées.

Comme [1, p. 279]

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{E}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - \varepsilon \dfrac{\bar{e}}{2e}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}(1 - \varepsilon \delta^*), & \delta^* = \dfrac{\bar{e}}{2e}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{G}} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\left(1 - \varepsilon \dfrac{\bar{g}}{2g}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(1 - \varepsilon \delta^{**}), & \delta^{**} = \dfrac{\bar{g}}{2g}, \end{cases} \tag{1.5}$$

où δ^*, δ^{**} désignent les paramètres de distribution des surfaces coordonnées réglées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$, les égalités (1.3) peuvent également s'écrire:

$$\begin{cases} \Psi_{\mathrm{I}} = (\psi_u + \varepsilon \bar{\psi}_u) \cdot \dfrac{1 - \varepsilon \delta^*}{\sqrt{e}} = (\psi_1 + \varepsilon \bar{\psi}_1)(1 - \varepsilon \delta^*) = \psi_1 + \varepsilon(\bar{\psi}_1 - \delta^* \psi_1) \\ \Psi_{\mathrm{II}} = (\psi_v + \varepsilon \bar{\psi}_v) \cdot \dfrac{1 - \varepsilon \delta^{**}}{\sqrt{g}} = (\psi_2 + \varepsilon \bar{\psi}_2)(1 - \varepsilon \delta^{**}) = \psi_2 + \varepsilon(\bar{\psi}_2 - \delta^{**} \psi_2), \end{cases} \tag{1.6}$$

où les indices inférieurs 1, 2 indiquent des dérivations premières invariantes ordinaires correspondant à $v = C^{te}$, $u = C^{te}$, c'est-à-dire des dérivations effectuées par rapport aux arcs des représentations sphériques des surfaces réglées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$.

Remarquons alors que les formules (1.6) peuvent aussi s'exprimer de la façon suivante

$$\Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_1 (1 - \varepsilon\, \delta^*), \qquad \Psi_{\mathrm{II}} = \Psi_2 (1 - \varepsilon\, \delta^{**}). \tag{1.7}$$

On voit donc que dans le cas particulier où la congruence est rapportée à des surfaces coordonnées développables ($\delta^* = \delta^{**} = 0$ pour tous les rayons des surfaces coordonnées), on aura :

$$\Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_1, \qquad \Psi_{\mathrm{II}} = \Psi_2 \tag{1.8}$$

et dans ce cas seulement.

Les régies habituelles de dérivation ordinaire s'appliquent également dans le cas de dérivation duale invariante. Ainsi, appliquée aux fonctions duales Ψ_{I} et Ψ_{II}, eette opération différentielle donnera naissance à 4 nouvelles dérivées secondes duales invariantes, à savoir :

$$\Psi_{\mathrm{I\,I}},\ \Psi_{\mathrm{I\,II}},\ \Psi_{\mathrm{II\,I}},\ \Psi_{\mathrm{II\,II}}.$$

Remarquons à ce propos que l'ordre de dérivation ne peut pas être permuté, autrement dit, les deux dérivées mixtes du second ordre sont liées l'une à l'autre par la condition d'intégrabilité

$$\Psi_{\mathrm{I\,II}} + Q\, \Psi_{\mathrm{I}} = \Psi_{\mathrm{II\,I}}\, Q^* \Psi_{\mathrm{II}}, \tag{1.9}$$

quelle que soit la fonction duale Ψ, où l'on a posé

$$Q = (\mathrm{Log}\, E^{1/2})_{\mathrm{II}}, \qquad Q^* = (\mathrm{Log}\, G^{1/2})_{\mathrm{I}}. \tag{1.10}$$

Ceci peut être immédiatement vérifié en prenant en considération les formules (1.3). Les formules (1.10) montrent de plus que Q, Q^* sont, non seulement indépendants de la fonction duale Ψ, mais restent inchangés s'ils subissent la transformation (1.4).

Si l'on pose

$$Q = q + \varepsilon\, \bar{q}, \qquad Q^* = q^* + \varepsilon\, \bar{q}^*, \tag{1.11}$$

les relations (1.5), (1.10) fournissent facilement

$$\left\{ \begin{aligned} q\ &= (\mathrm{Log}\, e^{1/2})_2, \qquad & \bar{q}\ &= \delta_2^{*} - \delta^{**} q, \\ q^* &= (\mathrm{Log}\, g^{1/2})_1, \qquad & \bar{q}^* &= \delta_1^{**} - \delta^{*}\ q^*. \end{aligned} \right. \tag{1.12}$$

Remarquons en passant que ia comparaison des parties réelles et des parties duales des deux membres de (1.9) ne donne flnailement que les deux conditions d'intégrabilité ordinaire :

$$\psi_{12} + q\,\psi_1 = \psi_{21} + q^*\,\psi_2$$

$$\overline{\psi}_{12} + q\,\overline{\psi}_1 = \overline{\psi}_{21} + q^*\,\overline{\psi}_2\,.$$

§ 2. Signification géométrique de Q et de Q^*.

Supposons que la fonction duale $\Psi(u, v)$ soit le vecteur dual unitaire $\mathbf{A}(u, v)$ de (i.1) qui définit la congruence. Nous aurons alors d'après (1.9)

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} + Q\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} + Q^*\,\mathbf{A}_{\mathrm{II}}\,. \tag{2.1}$$

D'autre part, en faisant usage de (1.3), on trouve immédiatement

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^2 = \mathbf{A}_{\mathrm{II}}^2 = 1, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II}} = 0. \tag{2.2}$$

Remarquons tout de suite que, d'après les deux premières égalités, les deux dérivées premières invariantes du vecteur dual unitaire $\mathbf{A}$ sont encore des vecteurs unitaires. Toutes les deux représentent, pour un couple de valeurs données de u, v, deux autres droites qui coupent orthogonalement — d'après les deux dernières égalités de (2.2) — le rayon de la congruence représenté par $\mathbf{A}(u, v)$.

Soit Θ l'angle dual que forment les deux vecteurs duaux $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}$. On aura alors

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II}} = \cos\Theta = \cos\vartheta - \varepsilon\,\overline{\vartheta}\sin\vartheta, \qquad \Theta = \vartheta + \varepsilon\,\overline{\vartheta}, \tag{2.3}$$

dans lesquelles ϑ désigne l'angle des droites représentées par $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}$ et $\overline{\vartheta}$ représente la longueur de leur perpendiculaire commune — segment de droite situé sur la droite représentée par $\mathbf{A}$.

On obtient alors en prenant les dérivées duales invariantes des égalités (2.2), (2.3) :

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} = \mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} = \mathbf{A}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = \mathbf{A}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = 0,\\
&\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^2 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} = 0, \qquad \text{ou bien} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} = -1,\\
&\mathbf{A}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} = 0, \qquad \text{ou bien} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} = -\cos\Theta,\\
&\mathbf{A}_{\mathrm{II}}^2 + \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = 0, \qquad \text{ou bien} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = -1,\\
&\mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = 0, \qquad \text{ou bien} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = -\cos\Theta,\\
&\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = -\Theta_{\mathrm{I}}\sin\Theta,\\
&\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = -\Theta_{\mathrm{II}}\sin\Theta.
\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

Si l'on multiplie scalairement les deux membres de l'égalité duale (2.1) par les vecteurs duaux unitaires $\mathbf{A}_{\text{I}}, \mathbf{A}_{\text{II}}$ et si l'on tient compte des égalités (2.4), on arrive aux deux égalités qui suivent:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} Q - Q^* \cos\Theta = \mathbf{A}_{\text{I}} \cdot \mathbf{A}_{\text{II I}} = -\Theta_{\text{I}} \sin\Theta - \mathbf{A}_{\text{I I}} \cdot \mathbf{A}_{\text{II}}, \\ -Q\cos\Theta + Q^* = \mathbf{A}_{\text{II}} \cdot \mathbf{A}_{\text{I II}} = -\Theta_{\text{II}} \sin\Theta - \mathbf{A}_{\text{II II}} \cdot \mathbf{A}_{\text{I}}. \end{cases}$$

Ceci étant, si l'on considère maintenant les formules de Blaschke correspondant aux surfaces réglées

$$(2.5')\qquad \begin{cases} v = C^{te}\,(\mathbf{B}^1 = \mathbf{A}_{\text{I}},\ \ \mathbf{B}^2 = \mathbf{A} \times \mathbf{A}_{\text{I}},\ \ \mathbf{B}^3 = \mathbf{A}), \\ u = C^{te}\,(\mathbf{C}^1 = \mathbf{A}_{\text{II}},\ \ \mathbf{C}^2 = \mathbf{A} \times \mathbf{A}_{\text{II}},\ \ \mathbf{C}^3 = \mathbf{A}), \end{cases}$$

elles s'écrivent de la façon suivante:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} (\mathbf{B}^1)_{\text{I}} = \mathbf{A}_{\text{I I}} = \Sigma^* \mathbf{B}^2 - \mathbf{A}, & (\mathbf{C}^1)_{\text{II}} = \mathbf{A}_{\text{II II}} = \Sigma^{**} \mathbf{C}^2 - \mathbf{A}, \\ (\mathbf{B}^2)_{\text{I}} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}_{\text{I I}} = -\Sigma^* \mathbf{A}_{\text{I}}, & (\mathbf{C}^2)_{\text{II}} = \mathbf{A} \times \mathbf{A}_{\text{II II}} = -\Sigma^{**} \mathbf{A}_{\text{II}}, \\ (\mathbf{B}^3)_{\text{I}} = (\mathbf{A})_{\text{I}} = \mathbf{A}_{\text{I}}, & (\mathbf{C}^3)_{\text{II}} = (\mathbf{A})_{\text{II}} = \mathbf{A}_{\text{II}}, \end{cases}$$

où Σ^* et Σ^{**} désignent respectivement les courbures duales sphériques des surfaces réglées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$ [5, p. 4; 6, p. 81].

On déduit alors de (2.6)

$$(2.7)\qquad \mathbf{A}_{\text{I I}} \cdot \mathbf{A}_{\text{II}} = \Sigma^* \mathbf{A}_{\text{II}} \cdot \mathbf{B}^2 = \Sigma^* \sin\Theta, \qquad \mathbf{A}_{\text{II II}} \cdot \mathbf{A}_{\text{I}} = \Sigma^{**} \mathbf{A}_{\text{I}} \cdot \mathbf{C}^2 = -\Sigma^{**} \sin\Theta$$

et les relations (2.5) deviennent

$$(2.8)\qquad \begin{cases} Q - Q^* \cos\Theta = -(\Theta_{\text{I}} + \Sigma^*) \sin\Theta, \\ Q^* - Q\cos\Theta = -(\Theta_{\text{II}} - \Sigma^{**}) \sin\Theta, \end{cases}$$

qui donnent finalement

$$(2.9)\qquad \begin{cases} Q = \dfrac{(\Sigma^{**} - \Theta_{\text{II}})\cos\Theta - (\Sigma^* + \Theta_{\text{I}})}{\sin\Theta}, \\[2ex] Q^* = \dfrac{-(\Sigma^* + \Theta_{\text{I}})\cos\Theta + (\Sigma^{**} - \Theta_{\text{II}})}{\sin\Theta}, \end{cases}$$

où bien

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \Sigma^* = \dfrac{Q^*\cos\Theta - Q}{\sin\Theta} - \Theta_{\text{I}}\,, \\[2ex] \Sigma^{**} = \dfrac{Q^* - Q\cos\Theta}{\sin\Theta} + \Theta_{\text{II}}\,. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où les droites représentées par les vecteurs duaux unitaires $\mathbf{A}_{\text{I}}, \mathbf{A}_{\text{II}}$ se coupent orthogonalement, on aura

$$\Theta = \vartheta + \varepsilon \overline{\vartheta}, \qquad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad \overline{\vartheta} = 0,$$

et Σ^*, Σ^{**} auront pour valeurs respectives, d'après (1.10)

$$(2.11) \qquad \Sigma^* = -Q = -(\mathrm{Log}\, E^{1/2})_{\mathrm{II}}, \qquad \Sigma^{**} = Q^* = (\mathrm{Log}\, G^{1/2})_{\mathrm{I}}$$

[2, p. 177].

§ 3. Formules de dérivation.

Définition. Chaque droite de la congruence définie par (1.1) est une droite *régulière*, si

$$(3.1) \qquad \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \times \mathbf{A} \neq_{\mathrm{II}} 0$$

pour celle-ci. (Cela veut dire que les deux droites représentées par $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}$ et qui coupent orthogonalement la droite représentée par $\mathbf{A}$ ne sont pas confondues).

Si cela a lieu pour toutes les droites de la congruence, la congruence elle-même est alors *régulière.*

Pour une droite régulière, on aura évidemment

$$(3.2) \qquad \sin \Theta = (\mathbf{A}, \mathbf{A}_{\mathrm{I}}, \mathbf{A}_{\mathrm{II}}) \neq 0,$$

c'est-à-dire que les trois vecteurs $\mathbf{A}, \mathbf{A}_{\mathrm{I}}, \mathbf{A}_{\mathrm{II}}$ seront linéairement indépendantes.

Ceci étant, nous allons dans ce paragraphe exprimer les quatre dérivées secondes duales invariantes $\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}}$ en fonction des vecteurs unitaires duaux $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}, \mathbf{A}_{\mathrm{II}}, \mathbf{A}$, quand la droite représentée par la vecteur unitaire dual $\mathbf{A}$ est une droite régulière.

D'une façon générale, nous pouvons donc poser

$$(3.3) \qquad \begin{cases} \mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} = \alpha^1{}_{11} \mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \alpha^2{}_{11} \mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \alpha_{11} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} = \alpha^1{}_{12} \mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \alpha^2{}_{12} \mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \alpha_{12} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = \alpha^1{}_{21} \mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \alpha^2{}_{21} \mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \alpha_{21} \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = \alpha^1{}_{22} \mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \alpha^2{}_{22} \mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \alpha_{22} \mathbf{A}. \end{cases}$$

En multipliant scalairement ces quatre égalités vectorielles respectivement par $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}, \mathbf{A}_{\mathrm{II}}, \mathbf{A}$ nons obtenons en tenant compte de (2.4):

$$
(3.4)\quad \begin{cases}
\alpha^1{}_{11} + \alpha^2{}_{11} \cos\Theta = 0, & \alpha^1{}_{11} \cos\Theta + \alpha^2{}_{11} = \mathbf{A}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}}, \quad \alpha_{11} = -1, \\
\alpha^1{}_{12} + \alpha^2{}_{12} \cos\Theta = 0, & \alpha^1{}_{12} \cos\Theta + \alpha^2{}_{12} = \mathbf{A}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}}, \quad \alpha_{12} = -\cos\Theta, \\
\alpha^1{}_{21} + \alpha^2{}_{21} \cos\Theta = \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}}, & \alpha^1{}_{21} \cos\Theta + \alpha^2{}_{21} = 0, \quad \alpha_{21} = -\cos\Theta, \\
\alpha^1{}_{22} + \alpha^2{}_{22} \cos\Theta = \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}}, & \alpha^1{}_{22} \cos\Theta + \alpha^2{}_{22} = 0, \quad \alpha_{22} = -1.
\end{cases}
$$

D'autre part, en faisant usage des relations (2.5) et (2.7) on trouve facilement:

$$
(3.5)\quad \begin{cases}
\mathbf{A}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} = \Sigma^* \sin\Theta, \\
\mathbf{A}_{\mathrm{II}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} = (\Sigma^{**} - \Theta_{\mathrm{II}}) \sin\Theta, \\
\mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = -(\Sigma^* + \Theta_{\mathrm{I}}) \sin\Theta, \\
\mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cdot \mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = -\Sigma^{**} \sin\Theta,
\end{cases}
$$

ce qui donne finalement:

$$
(3.6)\quad \begin{cases}
\alpha^1{}_{11} = -\Sigma^* \operatorname{cotg}\Theta, & \alpha^2{}_{11} = \dfrac{\Sigma^*}{\sin\Theta}, \quad \alpha_{11} = -1, \\
\alpha^1{}_{12} = (\Theta_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}) \operatorname{cotg}\Theta, & \alpha^2{}_{12} = -\dfrac{\Theta_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}}{\sin\Theta}, \quad \alpha_{12} = -\cos\Theta, \\
\alpha^1{}_{21} = -\dfrac{\Theta_{\mathrm{I}} + \Sigma^*}{\sin\Theta}, & \alpha^2{}_{21} = (\Theta_{\mathrm{I}} + \Sigma^*) \operatorname{cotg}\Theta, \quad \alpha_{21} = -\cos\Theta, \\
\alpha^1{}_{22} = -\dfrac{\Sigma^{**}}{\sin\Theta}, & \alpha^2{}_{22} = \Sigma^{**} \operatorname{cotg}\Theta, \quad \alpha_{22} = -1,
\end{cases}
$$

d'où [3, p. 177]:

$$
(3.7)\quad \begin{cases}
\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} = -\dfrac{\Sigma^*}{\sin\Theta} (\mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cos\Theta - \mathbf{A}_{\mathrm{II}}) - \mathbf{A}, \\
\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}} = \dfrac{\Theta_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}}{\sin\Theta} (\mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cos\Theta - \mathbf{A}_{\mathrm{II}}) - \mathbf{A} \cos\Theta, \\
\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} = -\dfrac{\Theta_{\mathrm{I}} + \Sigma^*}{\sin\Theta} (\mathbf{A}_{\mathrm{I}} - \mathbf{A}_{\mathrm{II}} \cos\Theta) - \mathbf{A} \cos\Theta, \\
\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}} = -\dfrac{\Sigma^{**}}{\sin\Theta} (\mathbf{A}_{\mathrm{I}} - \mathbf{A}_{\mathrm{II}} \cos\Theta) - \mathbf{A}.
\end{cases}
$$

§ 4. Expression sous forme invariante de la courbure totale de la sphère duale unitaire.

Si l'on prend en considération l'une des conditions d'intégrabilité qui suivent:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I\,II}} + Q\,\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I}} &= \mathbf{A}_{\mathrm{I\,II\,I}} + Q^*\,\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}},\\ \mathbf{A}_{\mathrm{II\,I\,II}} + Q\,\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}} &= \mathbf{A}_{\mathrm{II\,II\,I}} + Q^*\,\mathbf{A}_{\mathrm{II\,II}}\end{aligned} \tag{4.1}$$

on arrive facilement à en déduire la relation de Gauss concernant la sphère duale unitaire dans le cas le plus général. En effet, on tire des relations (3.7) par dérivation:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{\mathrm{I\,I\,II}} &= [\Sigma^*(\Theta_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}) - \Sigma^*_{\mathrm{II}}\cot\Theta]\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}} + \left(\frac{\Sigma^*_{\mathrm{II}}}{\sin\Theta} - 1\right)\mathbf{A}_{\mathrm{II}} - \Sigma^*\sin\Theta\,\mathbf{A},\\ \mathbf{A}_{\mathrm{I\,II\,I}} &= [\Sigma^*(\Theta_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}) + (\Theta_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}_{\mathrm{I}})\cot\Theta - \cos\Theta]\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}\\ &\qquad - \frac{\Theta_{\mathrm{II\,I}} - \Sigma^{**}_{\mathrm{I}}}{\sin\Theta}\,\mathbf{A}_{\mathrm{II}} + \sin\Theta\,\Theta_{\mathrm{I}}\,\mathbf{A}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

Si l'on porte alors ces valeurs, dans la première des relations (4.1), celle-ci donne à l'aide des égalités (3.7), à part l'une des relations (2.9),

$$1 = \frac{1}{\sin\Theta}\left(\Sigma^*_{\mathrm{II}} - \Sigma^{**}_{\mathrm{I}} + Q\,\Sigma^* - Q^*\,\Sigma^{**} + \Theta_{\mathrm{II\,I}} + Q^*\,\Theta_{\mathrm{II}}\right), \tag{4.3}$$

ce qui est [3, p. 178] bien la relation cherchée.

On peut aisément passer de cette forme, à la forme de Liouville de la courbure totale K d'une surface quelconque, c'est-à-dire à la forme

$$K = \frac{\vartheta_{uv} + (g\sqrt{E'})_v - (g^*\sqrt{G'})_u}{\sqrt{E'G' - F'^2}}, \tag{4.3$'$}$$

où ϑ est l'angle des lignes coordonnées; g, g^* les courbures géodesiques des lignes coordonnées, et E', F', G' étant les coefficients de la première forme fondamentale. En effet, on trouve facilement à l'aide des formules (1.3), (2.11):

$$\left\{\begin{aligned}&\Sigma^*_{\mathrm{II}} + Q\Sigma^* = \frac{(\Sigma\sqrt{E})_v}{\sqrt{EG}},\quad \Sigma^{**}_{\mathrm{I}} + Q^*\Sigma^{**} = \frac{(\Sigma^{**}\sqrt{G})_u}{\sqrt{EG}},\quad \Theta_{\mathrm{II\,I}} + Q^*\Theta_{\mathrm{II}} = \frac{\Theta_{vu}}{\sqrt{EG}} = \frac{\Theta_{uv}}{\sqrt{EG}},\\ &\sin\Theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},\quad (\text{avec } F = \mathbf{A}_u\cdot\mathbf{A}_v = f + \varepsilon\bar{f},\quad f = \mathrm{a}_u\cdot\mathrm{a}_v,\quad \bar{f} = \mathrm{a}_u\cdot\bar{\mathrm{a}}_v + \mathrm{a}_v\cdot\bar{\mathrm{a}}_u).\end{aligned}\right. \tag{4.4}$$

En faisant alors usage des formules (4.4), la relation (4.3) s'écrit:

$$\frac{\Theta_{uv} + (\Sigma^* \sqrt{E})_v - (\Sigma^{**} \sqrt{G})_u}{\sqrt{EG - F^2}} = 1. \tag{4.5}$$

C'est l'extension la plus générale de la formule de LIOUVILLE (4.3)' aux congruences de droites [2, p. 115].

§ 5. Application.

Comme application des formules que l'on vient d'établir, considérons les congruences de droites, dites de GUICHARD. On sait que [1, § 133, prob. 13; 7, 2, p. 150] *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de droites soit une congruence de* GUICHARD *est que son élément linéaire ait la forme de* TCHEBYCHEF, *à savoir*

$$\mathbf{dA}^2 = du^2 + 2F\, du\, dv + dv^2. \tag{5.1}$$

Il résulte alors des relations (1.10) et de (2.10) que:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de droites soit celle de GUICHARD *est que*

$$Q = 0, \quad Q^* = 0 \quad \text{ou bien} \quad \Sigma^* = -\Theta_{\mathrm{I}}, \quad \Sigma^{**} = \Theta_{\mathrm{II}} \tag{5.2}$$

pour toutes les droites de la dite congruence.

Dans ces conditions, (1.9) montre d'abord que quelle que soit la fonction duale scalaire ou vectorielle Ψ, ses deux dérivées mixtes invariantes du second ordre $\Psi_{\mathrm{I\,II}}$, $\Psi_{\mathrm{II\,I}}$ sont égales, c'est-à-dire

$$\Psi_{\mathrm{I\,II}} = \Psi_{\mathrm{II\,I}}. \tag{5.3}$$

Et en particulier, nous aurons d'après (5.2) et (5.3)

$$\Theta_{\mathrm{I\,II}} = \Theta_{\mathrm{II\,I}} = -\Sigma^*_{\mathrm{II}} = \Sigma^{**}_{\mathrm{I}}. \tag{5.4}$$

La formule (4.3) deviendra alors, si l'on tient compte de (5.2) et de (5.4) [10, p. 7]:

$$1 = -\frac{\Theta_{\mathrm{I\,II}}}{\sin\Theta} = -\frac{\Theta_{\mathrm{II\,I}}}{\sin\Theta}. \tag{5.5}$$

Comme pour une droite régulière, d'après (3.2)

$$\sin\Theta \neq 0,$$

il en sera de même de $\Theta_{\mathrm{I\,II}} = \Theta_{\mathrm{II\,I}}$, c'est-à-dire qu'on aura

$$-\Sigma^*_{\mathrm{II}} = \Sigma^{**}_{\mathrm{I}} = \Theta_{\mathrm{I\,II}} = \Theta_{\mathrm{II\,I}} \neq 0$$

pour toutes les droites régulières de la congruence. Cela veut dire en particulier que

$$\Theta_1 = -\Sigma^* \neq C^{te}, \qquad \Theta_{11} = \Sigma^{**} \neq C^{te}$$

pour toutes les droites régulières de la congruence. On en déduit que les images duales des surfaces coordonnées réglées de la congruence ne peuvent pas être des petits cercles de la sphère duale unitaire. D'où:

Les surfaces coordonnées réglées d'une congruence de GUICHARD *ne peuvent pas être à cône directeur de révolution.*

§ 6. Dérivée duale invariante par rapport à l'arc dual d'une surface réglée de la congruence, différente des surfaces coordonnées réglées.

Considérons maintenant une surface réglée quelconque (R) de la congruence (1.1) représentée par le vecteur unitaire dual $\mathbf{A}(u, v)$, toutefois différente des surfaces coordonnées. Cette surface sera elle-même représentée par le même vecteur $\mathbf{A}(v, v)$, où u, v sont fonctions d'un même paramètre réel, qui sera choisi tout à l'heure.

Supposons d'autre part que soit

$$\Phi = \varphi + \varepsilon \overline{\varphi} \tag{6.1}$$

l'angle dual formé par les normales centrales correspondant aux surfaces réglées $v = C^{te}$ et (R) et au même rayon commun $\mathbf{A}$.

Soit s l'arc de la représentation sphérique de (R). Nous pouvons alors considérer le vecteur dual unitaire $\mathbf{A}(u, v)$ qui va représenter (R) comme fonction de s.

L'élement d'arc dual de (R) est alors

$$dS = \sqrt{\mathbf{dA}^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathbf{dA}}{ds}\right)^2}\, ds. \tag{6.2}$$

f étant une fonction duale — ou ordinaire — scalaire ou vectorielle, nous allons poser pour simplifier

$$\frac{df}{ds} = f^{\cdot}. \tag{6.3}$$

Alors (6.2) s'écrit à l'aide de (1.1), et de (6.3)

$$dS = \sqrt{(\mathrm{a}^{\cdot} + \varepsilon\, \overline{\mathrm{a}}^{\cdot})^2}\, ds = \sqrt{1 + 2\,\varepsilon\, \mathrm{a}^{\cdot} \cdot \overline{\mathrm{a}}^{\cdot}}\, ds, \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{a}^{\cdot 2} = 1. \tag{6.4}$$

Comme d'autre part, le paramètre de distribution δ de (R) est donné par [1, p. 270]

$$\delta = \frac{\mathbf{a}^{\cdot} \cdot \overline{\mathbf{a}^{\cdot}}}{\mathbf{a}^{\cdot 2}},$$

on a finalement pour dS:

$$dS = (1 + \varepsilon\,\delta)\,ds. \tag{6.5}$$

[6, p. 81].

Etant donnée une fonction scalaire ou vectorielle

$$\Psi(u, v) = \psi(u, v) + \varepsilon\,\overline{\psi}(u, v),$$

par définition, sa dérivée par rapport à l'arc dual S sera donnée par l'expression

$$\frac{d\Psi}{dS} = \frac{1}{\sin\Theta}\left[\Psi_{\mathrm{I}} \sin(\Theta - \Phi) + \Psi_{\mathrm{II}} \sin\Phi\right], \tag{6.6}$$

(Cette définition est faite en considérant son analogue dans la théorie des surfaces [3, p. 179]) qui peut également s'écrire de la façon suivante

$$\frac{d\Psi}{dS} = \frac{d\varphi + \varepsilon\,d\overline{\psi}}{(1 + \varepsilon\,\delta)\,ds} = \psi^{\cdot} + \varepsilon\,(\overline{\psi}^{\cdot} - \delta\,\psi^{\cdot}). \tag{6.7}$$

(6.6) et (6.7) nous permettent d'écrire alors:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dS} = \frac{1}{\sin\Theta}\left[\mathbf{A}_{\mathrm{I}} \sin(\Theta - \Phi) + \mathbf{A}_{\mathrm{II}} \sin\Phi\right] = \mathbf{a}^{\cdot} + \varepsilon\,(\overline{\mathbf{a}}^{\cdot} - \delta\,\mathbf{a}^{\cdot}). \tag{6.8}$$

Si maintenant on sépare la partie réelle et la partie duale de l'expression du milieu, on obtient aisément

$$\mathbf{a}^{\cdot} = \frac{\mathbf{a}_1 \sin(\vartheta - \varphi) + \mathbf{a}_2 \sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

$$\overline{\mathbf{a}}^{\cdot} - \delta\,\mathbf{a}^{\cdot} = \frac{(\overline{\mathbf{a}}_1 - \delta\,\mathbf{a}_1)\sin(\vartheta - \varphi) + (\overline{\mathbf{a}}_2 - \delta\,\mathbf{a}_2)\sin\varphi}{\sin\vartheta} = -\overline{\vartheta}\,\frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{\sin\vartheta}\left[\mathbf{a}_1 \sin(\vartheta - \varphi) + \mathbf{a}_2 \sin\varphi\right]$$

$$+ \frac{(\overline{\mathbf{a}}_1 - \delta^{*}\,\mathbf{a}_1)\sin(\vartheta - \varphi) + (\overline{\vartheta} - \overline{\varphi})\cos(\vartheta - \varphi)\,\mathbf{a}_1 + \overline{\varphi}\cos\varphi\,\mathbf{a}_2 + (\overline{\mathbf{a}}_2 - \delta^{**}\,\mathbf{a}_2)\sin\varphi}{\sin\vartheta},$$

ou bien

$$-\delta\left[\sin(\vartheta - \varphi)\,\mathbf{a}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{a}_2\right] = \left[-(\delta^{*} + \overline{\vartheta}\operatorname{cotg}\vartheta)\sin(\vartheta - \varphi) + (\overline{\vartheta} - \overline{\varphi})\cos(\vartheta - \varphi)\right]\mathbf{a}_1 + \left[\overline{\varphi}\cos\overline{\varphi} - (\delta^{**} + \overline{\vartheta}\operatorname{cotg}\vartheta)\sin\varphi\right]\mathbf{a}_2.$$

Et en égalant les coefficients des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ dans les deux membres, on parvient aux égalités:

$$
(6.9) \quad \begin{cases} (\delta^* - \delta + \overline{\vartheta} \operatorname{cotg} \vartheta) \sin (\vartheta - \varphi) - (\overline{\vartheta} - \overline{\varphi}) \cos (\vartheta - \varphi) = 0, \\ (\delta^{**} - \delta + \overline{\vartheta} \operatorname{cotg} \vartheta) \sin \varphi - \overline{\varphi} \cos \varphi = 0. \end{cases}
$$

En éliminant successivement $\overline{\varphi}$ et δ entre ces deux égalités, on obtient finalement:

$$
(6.10) \qquad \delta = \delta^* \cos^2 \varphi + \delta^{**} \sin^2 \varphi + \frac{\delta^{**} - \delta^*}{2} \sin^2 \varphi \operatorname{cotg} \vartheta - \overline{\vartheta} \frac{\sin \varphi \sin (\vartheta - \varphi)}{\sin \vartheta},
$$

$$
(6.11) \qquad \overline{\varphi} = (\delta^{**} - \delta^*) \frac{\sin \varphi \sin (\vartheta - \varphi)}{\sin \vartheta} + \overline{\vartheta} \frac{\sin \varphi \cos (\vartheta - \varphi)}{\sin \vartheta}.
$$

Ces deux dernières formules constituent les extensions des formules de MANNHEIM et de HAMILTON au cas où la congruence de droites est rapportée aux surfaces coordonnées réglées quelconques.

Dans le cas particulier où

$$
\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \overline{\vartheta} = 0,
$$

c'est-à-dire dans le cas où les normales centrales des surfaces coordonnées réglées coupent orthogonalement et au même point le rayon correspondant de la congruence et font un angle droit entre elles, on a les formules bien connues:

$$
(6.10)' \qquad \delta = \delta^* \cos^2 \varphi + \delta^{**} \sin^2 \varphi,
$$

$$
(6.11)' \qquad \overline{\varphi} = (\delta^{**} - \delta^*) \sin \varphi \cos \varphi.
$$

Remarquons pour terminer ce qui suit: les différents symboles qui entrent dans les formules (6.10), (6.11) ont des significations géométriques simples. Soient en effet M_1, M_2 et M les points où les droites représentées par $\mathbf{A}_{\text{I}}$, $\mathbf{A}_{\text{II}}$ et $d\mathbf{A}/dS$ coupent respectivement le rayon $\mathbf{A}$ de la congruence. On a alors:

$\delta^*, \delta^{**}, \delta$: Paramètres de distribution relatifs aux surfaces coordonnées réglées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$, et (R).

φ: angle des normales centrales des surfaces coordonnées réglées $v = C^{te}$ et (R).

ϑ: angle des normales centrales des surfaces coordonnées réglées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$.

$\overline{\vartheta}$, $\overline{\varphi}$: mesures algébriques des vecteurs $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_1\mathbf{M}$ sur l'axe $\mathbf{A}$.

§ 7. Une formule relative à la courbure duale sphérique.

Dans ce paragraphe nous avons l'intention d'établir la relation qui lie les courbures duales sphériques des surfaces coordonnées réglées $v = C^{te}$, $u = C^{te}$ et de la surface réglée (R), toutes les trois passant par le même rayon $\mathbf{A}$ de la congruence, et correspondant au rayon $\mathbf{A}$.

Soit Σ la courbure sphérique duale de la surface réglée (R). Posons alors pour simplifier

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{A}}{dS} = \frac{\mathbf{A}_{1} \sin(\Theta - \Phi) + \mathbf{A}_{11} \sin \Phi}{\sin \Theta}, \tag{7.1}$$

$$\mathbf{B}^{*} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \frac{-\mathbf{A}_{1} \cos(\Theta - \Phi) + \mathbf{A}_{11} \cos \Phi}{\sin \Theta}. \tag{7.2}$$

Nous pouvons donc, d'après la première formule (2.6), écrire:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dS} = \Sigma \mathbf{B}^{*} - \mathbf{A} = \Sigma \frac{-\mathbf{A}_{1} \cos(\Theta - \Phi) + \mathbf{A}_{11} \cos \Phi}{\sin \Theta} - \mathbf{A}. \tag{7.3}$$

D'autre part, en faisant usage des formules (7.1), (6.6) et (3.7), un calcul simple donne

$$\frac{d\mathbf{B}}{dS} = \frac{d}{dS}\frac{d\mathbf{A}}{dS} = \left[\frac{d\Phi}{dS} + \frac{\sin(\Theta - \Phi)\, \Sigma^{*} + \sin \Phi\, \Sigma^{**}}{\sin \Theta} - \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta}\Theta_{11}\right] \frac{-\mathbf{A}_{1} \cos(\Theta - \Phi) + \mathbf{A}_{11} \cos \Phi}{\sin \Theta} - \mathbf{A}, \tag{7.4}$$

puisque

$$\sin^2(\Theta - \Phi) + \sin^2 \Phi + 2 \sin(\Theta - \Phi) \sin \Phi \cos \Theta = \sin^2 \Theta.$$

La comparaison des formules (7.3) et (7.4) fournit alors en définitive

$$\Sigma = \frac{d\Phi}{dS} + \Sigma^{*} \frac{\sin(\Theta - \Phi)}{\sin \Theta} + \Sigma^{**} \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} - \Theta_{11} \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta}. \tag{8.4}$$

C'est l'extension de la formule de Liouville de la théorie des surfaces concernant les courbures géodésiques [8, p. 93], dans le cas où la surface est rapportée aux lignes coordonnées quelconques, aux congruences de droites rapportées aux surfaces coordonnées réglées quelconques.

Cas particuliers

1) Dans le cas particulier où

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \bar{\vartheta} = 0,$$

nous obtenons la formule bien connue [2, p. 115]

$$\Sigma = \frac{d\Phi}{dS} + \Sigma^{*} \cos \Phi + \Sigma^{**} \sin \Phi. \tag{8.5}$$

2) Si la congruence de droites en considération est une congruence de Guichard, on a

$$\Sigma^{*} + \Theta_{\mathrm{I}} = 0, \qquad \Sigma^{**} - \Theta_{\mathrm{II}} = 0,$$

et (8.4) devient [8, p. 93]

$$\Sigma = \frac{d\Phi}{dS} - \Theta_{\mathrm{I}} \frac{\sin(\Theta - \Phi)}{\sin \Theta}. \tag{8.6}$$

CHAPITRE II

EXTENSION DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DE BELTRAMI AUX CONGRUENCES DE DROITES

§ 8. Invariants différentiels.

a) Gradient.

Supposons que la cougruence de droites donnée par le vecteur dual unitaire

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}(u, v) + \varepsilon \bar{\mathbf{a}}(a, v)$$

soit rapportée à scs surfaces réglées principales. Dans ces conditions, ou aura

$$F = f + \varepsilon \bar{f} = 0 \quad (f = \bar{f} = 0)$$

$$\Theta = \vartheta + \varepsilon \bar{\vartheta} = \frac{\pi}{2} \quad \left(\vartheta = \frac{\pi}{2},\ \bar{\vartheta} = 0\right)$$

et les formules (3.7) prendront, d'après (2.11), la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathrm{I}\,\mathrm{I}} &= -Q\ \mathbf{A}_{\mathrm{II}} - \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} &= +Q^{*}\,\mathbf{A}_{\mathrm{II}}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{II}\,\mathrm{I}} &= +Q\ \mathbf{A}_{\mathrm{I}}, \\ \mathbf{A}_{\mathrm{II}\,\mathrm{II}} &= -Q^{*}\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}} - \mathbf{A}, \quad \text{avec} \quad Q = (\mathrm{Log}\, E^{1/2})_{\mathrm{II}}, \quad Q^{*} = (\mathrm{Log}\, G^{1/2})_{\mathrm{I}}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

où les différentes dérivations duales invariantes sont effectuées par rapport aux arcs duaux

$$dU = \sqrt{E}\, du, \qquad dV = \sqrt{G}\, dv \tag{8.2}$$

des surfaces réglées principales.

Ceci étant, soit

$$\Gamma(u, v) = \gamma(u, v) + \varepsilon\, \overline{\gamma}(u, v)$$

une fonction duale scalaire de droite, définie sur la congruence.

Par definition, *le vecteur* $\nabla \Gamma$ tel que

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \Gamma = 0 \tag{8.3}$$

et qui satisfait de plus à

$$d\Gamma = \nabla \Gamma \cdot d\mathbf{A} \tag{8.4}$$

quelle que soit la direction $d\mathbf{A}$, s'appellera *le gradient* de la fonction duale scalaire Γ.

Il est presque visible que

$$\operatorname{grad} \Gamma = \nabla \Gamma = \Gamma_{\text{I}}\, \mathbf{A}_{\text{I}} + \Gamma_{\text{II}}\, \mathbf{A}_{\text{II}}, \tag{8.5}$$

puisque d'après (8.4)

$$\nabla \Gamma \cdot d\mathbf{A} = (\Gamma_{\text{I}}\, \mathbf{A}_{\text{I}} + \Gamma_{\text{II}}\, \mathbf{A}_{\text{II}}) \cdot (\mathbf{A}_{\text{I}}\, dU + \mathbf{A}_{\text{II}}\, dV) = \Gamma_{\text{I}}\, dU + \Gamma_{\text{II}}\, dV = d\Gamma.$$

D'autre part, (8.5) montre que grad Γ est un invariant différentiel, indépendant du choix des paramètres u, v. Ainsi on peut introduire l'opérateur différentiel

$$\nabla(\quad) = (\quad)_{\text{I}}\, \mathbf{A}_{\text{I}} + (\quad)_{\text{II}}\, \mathbf{A}_{\text{II}}. \tag{8.6}$$

b) Divergence.

Soit $\mathbf{F}(u, v)$ une fonction duale vectorielle de droite, définie sur la congruence. Par définition, la divergence du vecteur dual $\mathbf{F}$ est donnée par

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{I}} \cdot \mathbf{A}_{\text{I}} + \mathbf{F}_{\text{II}} \cdot \mathbf{A}_{\text{II}}. \tag{8.7}$$

C'est en somme l'opérateur (8.6) appliqué au vecteur dual $\mathbf{F}$, avec la seule modification que les termes du second membres sont considérés comme des produits scalaires.

c) Rotationnel.

On définit de même le rotationnel du vecteur $\mathbf{F}$ par:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = -(\mathbf{F}_{\text{I}} \times \mathbf{A}_{\text{I}} + \mathbf{F}_{\text{II}} \times \mathbf{A}_{\text{II}}) = \mathbf{A}_{\text{I}} \times \mathbf{F}_{\text{I}} + \mathbf{A}_{\text{II}} \times \mathbf{F}_{\text{II}}. \tag{8.8}$$

Soit dS l'arc dual correspondant à la direction $d\mathbf{A}$. Si l'on appelle Φ l'angle dual que font $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ et $d\mathbf{A}/dS$, on aura d'après (6.8)

$$\frac{d\mathbf{A}}{dS} = \mathbf{A}_{\mathrm{I}} \cos \Phi + \mathbf{A}_{\mathrm{II}} \sin \Phi, \qquad \text{puis que : } \Theta = \frac{\pi}{2} \cdot \tag{8.9}$$

En faisant alors usage de (8.4) et de (8.5) on obtient facilement

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \nabla \Gamma \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dS} = \Gamma_{\mathrm{I}} \cos \Phi + \Gamma_{\mathrm{II}} \sin \Phi. \tag{8.10}$$

Ceci montre que la composante scalaire du vecteur $\nabla \Gamma$ dans la direction du vecteur dual unitaire $d\mathbf{A}/dS$ est donnée par $d\Gamma/dS$.

Extension du premier opérateur différentiel de BELTRAMI.

Soient $\Gamma(u, v)$, $\Gamma^*(u, v)$ deux fonctions duales scalaires de (u, v), c'est-à-dire de droite définies sur la congruences. Posons

$$\begin{aligned} \nabla'(\Gamma, \Gamma^*) &= \nabla \Gamma \cdot \nabla \Gamma^* = \Gamma_{\mathrm{I}} \Gamma^*_{\mathrm{I}} + \Gamma_{\mathrm{II}} \Gamma^*_{\mathrm{II}}, \\ \nabla'(\Gamma, \Gamma) &= (\nabla \Gamma)^2 = \Gamma_{\mathrm{I}}^2 + \Gamma_{\mathrm{II}}^2. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Ainsi le premier opérateur différentiel de BELTRAMI se trouve étendu aux congruences de droites.

La divergence d'un gradient (Extension du second opérateur différentiel de BELTRAMI)

Posons

$$\nabla^2 \Gamma = \nabla \cdot \nabla \Gamma, \tag{8.12}$$

qui est le second opérateur différentiel de BELTRAMI. Les égalités (8.5) et (8.7) donnent alors

$$\nabla^2 \Gamma = \Gamma_{\mathrm{II}} + \Gamma_{\mathrm{IIII}} + Q\,\Gamma_{\mathrm{II}} + Q^*\,\Gamma_{\mathrm{I}}. \tag{8.13}$$

Ainsi le second Beltramien

$$\nabla^2(\;) = (\;)_{\mathrm{II}} + (\;)_{\mathrm{IIII}} + Q(\;)_{\mathrm{II}} + Q^*(\;)_{\mathrm{I}} \tag{8.14}$$

est également étendu aux congruences de droites.

Comme dans le paragraphe qui va suivre nous allons employer les opérateurs ∇', ∇^2 dans le cas où la congruence est rapportée aux surfaces coordonnées réglées quelconques, il faut dire quelques mots sur la forme que ces opérateurs vont prendre dans ce cas où les paramètres u, v sont arbitraires.

Nous avons d'abord, d'après (8.4), en posant

$$\nabla \Gamma = X\,\mathbf{A}_u + Y\,\mathbf{A}_v\,,$$

$$\Gamma_u\,du + \Gamma_v\,dv = (EX + FY)\,du + (FX + GY)\,dv$$

cequi donne

$$X = \frac{G\,\Gamma_u - F\,\Gamma_v}{H^2}, \qquad Y = \frac{E\,\Gamma_v - F\,\Gamma_u}{H^2}, \qquad H^2 = E\,G - F^2,$$

c'est - à - dire

$$\nabla \Gamma = \frac{(G\,\Gamma_u - F\,\Gamma_v)\,\mathbf{A}_u + (E\,\Gamma_v - F\,\Gamma_u)\,\mathbf{A}_v}{H^2}. \tag{8.15}$$

Comme on le voit, on obtient exactement, dn moins eu apparence, la même formule qu'en théorie des surfaces [7, 1].

Signalons encore, sans entrer dans le détail du calcul, puisqu'on les obtient de la même façon qu'en théorie des surfaces, les formules suivantes étendues aux congruences de droites:

$$\nabla'(\Gamma, \Gamma^*) = \nabla \Gamma \cdot \nabla \Gamma^* = \frac{E\,\Gamma_v\,\Gamma^*{}_v - F\,(\Gamma_u\,\Gamma^*{}_v + \Gamma_v\,\Gamma^*{}_u) + G\,\Gamma_u\,\Gamma^*{}_u}{H^2}, \tag{8.16}$$

$$\nabla'(\Gamma, \Gamma) = (\nabla \Gamma)^2 = \frac{E(\Gamma_v)^2 - 2F\,\Gamma_u\,\Gamma_v + G(\Gamma_u)^2}{H^2}, \tag{8.17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{(HX)_u + (HY)_v}{H} + 2Z, \quad \text{avec} \quad \mathbf{F} = X\mathbf{A}_u + Y\mathbf{A}_v + Z\mathbf{A}. \tag{8.18}$$

$$\nabla^2 \Gamma = \nabla \cdot \nabla \Gamma = \frac{1}{H}\left[\left(\frac{E\,\Gamma_v - F\,\Gamma_u}{H}\right)_v + \left(\frac{G\,\Gamma_u - F\,\Gamma_v}{H}\right)_u\right]. \tag{8.19}$$

§ 9. Expression de la courbure sphérique duale à l'aide des opérateurs différentiels.

Supposons que la congruence soit rapportée aux surfaces coordonnées réglées qui se coupent orthogonalement, différentes en général des surfaces principales. L'élément d'arc dual s'exprime alors

$$dS^2 = E\,du^2 + 2\varepsilon\,\bar{f}\,du\,dv + G\,dv^2 \quad \text{avec} \quad (F = f + \varepsilon\,\bar{f} = \varepsilon\,\bar{f}, \;\; f = 0). \tag{9.1}$$

D'autre part, la courbure sphérique duale de la surface réglée $v = C^{te}$ est donnée d'après la première des égalités (3.7) par

$$\Sigma^* = (\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_{11}), \tag{9.2}$$

où

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mathbf{A}_u}{\sqrt{E}}, \qquad \mathbf{A}_{11} = \frac{\mathbf{A}_{uu}}{E} - \frac{E_u}{2E^2}\mathbf{A}_u . \tag{9.3}$$

Nous aurons donc

$$\Sigma^* = \frac{1}{E\sqrt{E}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}_u, \mathbf{A}_{uu}). \tag{9.4}$$

Il est par ailleurs facile de voir que les formules de GAUSS de la théorie des surfaces s'étendent aux congruences de droites sous la forme:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{uu} = \dfrac{G E_u - 2F F_u + F E_v}{2(EG - F^2)} \mathbf{A}_u + \dfrac{-F E_u + 2E F_u - E E_v}{2(EG - F^2)} \mathbf{A}_v - E\,\mathbf{A}, \\[2ex] \mathbf{A}_{uv} = \dfrac{G E_v - F G_u}{2(EG - F^2)} \mathbf{A}_u + \dfrac{E G_u - F E_v}{2(EG - F^2)} \mathbf{A}_v - F\,\mathbf{A}, \\[2ex] \mathbf{A}_{vv} = \dfrac{-F G_v + 2G F_v - G G_u}{2(EG - F^2)} \mathbf{A}_u + \dfrac{E G_v - 2F F_v + F G_u}{2(EG - F^2)} \mathbf{A}_v - G\mathbf{A}. \end{cases} \tag{9.5}$$

Dans le cas actuel qui nous occupe, le coefficent de $\mathbf{A}_v$ dans $\mathbf{A}_{uu}$ s'écrit

$$\frac{-\varepsilon \bar{f} E_u + 2\varepsilon E \bar{f}_u - E E_v}{2EG} = -\varepsilon \bar{f} \frac{(\sqrt{E})_u}{\sqrt{E}\, G} + \varepsilon \frac{\bar{f}_u}{G} - \sqrt{E} \frac{(\sqrt{E})_v}{G}.$$

(9.4) devient alors

$$\Sigma^* = -\varepsilon \bar{f} \frac{E_u}{2E^2\sqrt{G}} + \frac{\varepsilon \bar{f}_u}{E\sqrt{G}} - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[-\varepsilon \bar{f}\, \frac{(\sqrt{E})_u}{E} + \frac{\varepsilon \bar{f}_u}{\sqrt{E}} - (\sqrt{E})_v\right]. \tag{9.6}$$

Les relations (8.16), (8.17) et (8.19) donnent d'autre part:

$$\nabla^1 v = \frac{1}{G}, \qquad \sqrt{\nabla^1 v} = \frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$\nabla^1(v, \sqrt{G}) = \frac{E(\sqrt{G})_v - F(\sqrt{G})_u}{EG} = \frac{(\sqrt{G})_v}{G} - \varepsilon \bar{f} \frac{(\sqrt{G})_v}{EG},$$

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\right)_v - \left(\frac{F}{\sqrt{EG}}\right)_u\right] = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\varepsilon \bar{f} \frac{(\sqrt{E})_u}{E\sqrt{G}} - \frac{\varepsilon \bar{f}_u}{\sqrt{EG}} + \frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}}\right.$$

$$\left. - \sqrt{E}\left\{\frac{(\sqrt{G})_v}{G} - \varepsilon \bar{f} \frac{(\sqrt{G})_u}{EG}\right\}\right] = \frac{1}{\sqrt{EG}}[-\sqrt{E}\,\Sigma^* - \sqrt{E}\,\nabla^1(v, \sqrt{G})],$$

c'est-à-dire:

$$\Sigma^* = -\frac{\nabla^2 v}{\sqrt{\nabla^1 v}} - \nabla^1\left(v, \frac{1}{\sqrt{\nabla^1 v}}\right). \tag{9.7}$$

Plus généralement, la courbure duale sphérique Σ d'une surface réglée de la congruence, donnée par $\varphi(u, v) = C^{te}$, sera donnée par

(9.8) $$\Sigma = -\frac{\nabla^2\varphi}{\sqrt{\nabla^1\varphi}} - \nabla^1\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\nabla^1\varphi}}\right).$$

§ 10. Autres extensions.

Nous prendrons de nouveau les surfaces réglées principales comme surfaces coordonnées.

D'après (8.8) et (8.1) on a successivement

(10.1) $$\nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{A}_{\text{I}} = \mathbf{A}_{\text{II}} - Q\,\mathbf{A}, \quad \nabla \times \mathbf{A}_{\text{II}} = -\mathbf{A}_{\text{I}} + Q^*\,\mathbf{A}.$$

Si $\Phi(u, v)$ est une fonction scalaire duale, on aura d'après (8.8), (10.1) et (8.5)

(10.2) $$\begin{aligned}\nabla \times \Phi\mathbf{A} &= \mathbf{A}_{\text{I}} \times (\Phi\mathbf{A})_{\text{I}} + \mathbf{A}_{\text{II}} \times (\Phi\mathbf{A})_{\text{II}} = \nabla\Phi \times \mathbf{A} + \Phi\nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla\Phi \times \mathbf{A} = -\Phi_{\text{I}}\,\mathbf{A}_{\text{II}} + \Phi_{\text{II}}\,\mathbf{A}_{\text{I}}\,.\end{aligned}$$

On tire de cette dernière relation

(10.3) $$\mathbf{A} \cdot \nabla \times \Phi\,\mathbf{A} = 0.$$

On a de même d'après (8.5) et (10.1):

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla\Phi &= \nabla \times (\Phi_{\text{I}}\,\mathbf{A}_{\text{I}} + \Phi_{\text{II}}\,\mathbf{A}_{\text{II}}) = \nabla\Phi_{\text{I}} \times \mathbf{A}_{\text{I}} + \Phi_{\text{I}}\nabla \times \mathbf{A}_{\text{I}} + \nabla\Phi_{\text{II}} \times \mathbf{A}_{\text{II}} + \Phi_{\text{II}} \times \nabla \times \mathbf{A}_{\text{II}} \\ &= -\Phi_{\text{I}\,\text{II}}\,\mathbf{A} + \Phi_{\text{I}}(\mathbf{A}_{\text{II}} - Q\,\mathbf{A}) + \Phi_{\text{II}\,\text{I}}\,\mathbf{A} + \Phi_{\text{II}}(-\mathbf{A}_{\text{I}} + Q^*\mathbf{A}) \\ &= (\Phi_{\text{II}\,\text{I}} + Q^*\,\Phi_{\text{II}} - \Phi_{\text{I}\,\text{II}} - Q\,\Phi_{\text{I}})\,\mathbf{A} - \Phi_{\text{II}}\,\mathbf{A}_{\text{I}} + \Phi_{\text{I}}\,\mathbf{A}_{\text{II}}\end{aligned}$$

et d'après (2.1)

(10.4) $$\nabla \times \nabla\Phi = -\Phi_{\text{II}}\,\mathbf{A}_{\text{I}} + \Phi_{\text{I}}\,\mathbf{A}_{\text{II}} = -\nabla \times \Phi\,\mathbf{A} = \mathbf{A} \times \nabla\Phi.$$

On voit de même que

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \times \nabla\Phi = \mathbf{A} \cdot \mathrm{Rot}\,(\mathrm{grad}\,\Phi) = 0.$$

(8.1) et (8.7) montrent que

(10.5) $$\nabla \cdot \mathbf{A} = 2, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_{\text{I}} = Q^*, \quad \nabla \cdot \mathbf{A}_{\text{II}} = Q.$$

On a de plus

(10.6) $$\nabla \cdot \Phi\,\mathbf{A} = \Phi\,\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla\Phi \cdot \mathbf{A} = 2\Phi.$$

On peut de même écrire:

$$(10.7)\qquad \nabla\cdot(\nabla\Phi\times\mathbf{A})=\nabla\cdot(\nabla\times\Phi\mathbf{A})=-\nabla\cdot(\nabla\times\nabla\Phi)$$

$$\nabla\dot{\cdot}(\nabla\Phi\times\mathbf{A})=(\nabla\Phi\times\mathbf{A})_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{I}}+(\nabla\Phi\times\mathbf{A})_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{A}_{\mathrm{II}}=\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\nabla\Phi)=0.$$

Soit maintenant

$$\mathbf{W}(u,v)=\mathbf{w}(u,v)+\varepsilon\,\overline{\mathbf{w}}(u,v)$$

une fonction vectorielle duale de (u, v). On a d'après (8.7)

$$(10.8)\qquad \nabla\cdot\mathbf{W}=\mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{W}_{\mathrm{I}}+\mathbf{A}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{W}_{\mathrm{II}}=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{w}_1+\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{w}_2$$

$$+\varepsilon(-2\delta^*\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{w}_1-2\delta^{**}\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{w}_2+\overline{\mathbf{a}}_1\cdot\mathbf{w}_1+\mathbf{a}_1\cdot\overline{\mathbf{w}}_1+\overline{\mathbf{a}}_2\cdot\mathbf{w}_2+\mathbf{a}_2\,\overline{\mathbf{w}}_2).$$

En particulier pour

$$\mathbf{w}=\mathbf{a},\qquad \overline{\mathbf{w}}=0,$$

on obtient:

$$(10.9)\qquad \nabla\cdot\mathbf{a}=2-\varepsilon(\delta^*+\delta^{**}).$$

Considérons maintenant l'opérateur suivant, qui appliqué aux deux vecteurs duaux $\mathbf{V}$, $\mathbf{F}$, en fournit un autre:

$$(10.10)\qquad \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{F}=(\mathbf{V}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{I}})\mathbf{A}_{\mathrm{I}}+(\mathbf{V}\cdot\mathbf{F}_{\mathrm{II}})\mathbf{A}_{\mathrm{II}}.$$

On en tire alors successivement:

$$(10.11)\qquad \begin{cases}\mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\nabla\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\mathrm{II}}\quad \mathbf{A}_{\mathrm{II}}\cdot\nabla\mathbf{A}=\mathbf{A}_{\mathrm{II}},\quad \mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\nabla\mathbf{A}_{\mathrm{I}}=\mathbf{A}_{\mathrm{II}}\cdot\nabla\mathbf{A}_{\mathrm{II}}=0,\\ \mathbf{A}_{\mathrm{I}}\cdot\nabla\mathbf{A}_{\mathrm{II}}=-\mathbf{A}_{\mathrm{II}}.\nabla\mathbf{A}_{\mathrm{I}}=\mathbf{A}_{\mathrm{II\,I}}-\mathbf{A}_{\mathrm{I\,II}}=Q\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}-Q^*\mathbf{A}_{\mathrm{II}}.\end{cases}$$

Définissons de même l'opérateur:

$$(10.12)\qquad \nabla^1(\mathbf{F},\mathbf{G})=(\mathbf{F}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{G}_{\mathrm{I}})(\mathbf{A}_{\mathrm{I}})^2+(\mathbf{F}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{G}_{\mathrm{II}})(\mathbf{A}_{\mathrm{II}})^2=\mathbf{F}_{\mathrm{I}}\cdot\mathbf{G}_{\mathrm{I}}+\mathbf{F}_{\mathrm{II}}\cdot\mathbf{G}_{\mathrm{II}}.$$

D'où:

$$(10.13)\qquad \nabla^1(\mathbf{F},\mathbf{F})=\nabla^1\mathbf{F}=(\mathbf{F}_{\mathrm{I}})^2+(\mathbf{F}_{\mathrm{II}})^2.$$

Il en résulte que:

$$(10.14)\qquad \begin{aligned}&\nabla^1\mathbf{A}=2,\quad \nabla^1\mathbf{A}_{\mathrm{I}}=\nabla^1\mathbf{A}_{\mathrm{II}}=1+Q^2+Q^{*2},\quad \nabla^1(\mathbf{A},\mathbf{A}_{\mathrm{I}})=Q^*,\\ &\nabla^1(\mathbf{A},\mathbf{A}_{\mathrm{II}})=Q,\quad \nabla^1(\mathbf{A}_{\mathrm{I}},\mathbf{A}_{\mathrm{II}})=0,\quad \nabla^1(\mathbf{a},\overline{\mathbf{a}})=\delta^*+\delta^{**}-2\varepsilon(\delta^{*2}+\delta^{**2}).\end{aligned}$$

Si on pose

$$(10.15)\qquad \nabla^2\mathbf{F}=\mathbf{F}_{\mathrm{I\,I}}+\mathbf{F}_{\mathrm{II\,II}}+Q\,\mathbf{F}_{\mathrm{II}}+Q^*\mathbf{F}_{\mathrm{I}},$$

on aura

$$(10.16)\qquad \nabla^2\mathbf{A}=-2\mathbf{A}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Blaschke : **Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1,** Berlin, (1930).

[2] L. Biran : *Généralisation de deux formules de* Liouville, Rev. Fac. Sc. Univ. Ist., A, **18**, p. 109—115, (1953).

[3] F. Şemin : *Note sur les dérivées invariantes*, Rev. Fac. Sc. Univ. Ist. A, **19**, 175—179, (1954).

[4] A. Özkan : *Les surfaces réelles pour lesquelles la seconde beltramienne de la courbure de* Gauss *est nulle*, Rev. Fac. Sc. Univ. Ist., A, **15**, p. 213—288, (1950).

[5] K. Erim : *Die höheren Differentialelemente einer Kegelflaeche und einer Raumkurve*, Rev. Fac. Sc. Univ. Ist., A, **10**, p. 1—24, (1945).

[6] G. Saban : *Raccordement d'ordre élevé de deux surfaces réglées*, Rev. Fac. Sc. Univ. Ist., A, **13**, p. 78—96, (1948).

[7] C. E. Weatherburn : **Differential Geometry, 1, 2,** Cambridge, (1930).

[8] F. Şemin : *On an extention of* Liouville's *formula*, Rev. Fac. Sc. Univ. Ist., A, **20**, p. 91—94, (1955).

[9] N. H. Kuiper : *Differentiable Linesystems of one Dual Variable*, Proc. Ned. Akad. v. Wett., **51**, p. 361—369, 384—394, Amsterdam, (1948).

[10] G. Saban : *Sulle congruenze di Guichard*, Boll. Un. Mat. It., Serie III, **6**, p. 3—8, (1951).

Ege Üniversitesi
Matematik Kürsüsü
İzmir, Türkiye

(Manuscrit reçu le 4 Mars 1960)

ÖZET

Dual bir birim vektörü ile temsil edilen bir doğru kongrüansı verildiğine göre, birinci bölümde önce bu kongrüansın herhangi koordinat regle yüzeylerine nispet edilmesi halini ele aldık. Sonra, koordinat regle yüzeylerinin dual yay uzunluklarına göre hesaplanan invaryant türevler yardımiyle, türev formüllerini ve integrabilite şartlarını verdik. Bu son formüller de Mannheim ve Hamilton formüllerinin bu genel hale tekabül eden yeni şekillerini bulmamıza yardım etti. Nihayet, gene aynı genel halde, Liouville'ın yüzeyler teorisine ait iki formülünü, Doğrular Kongrüansına teşmil ettik. İkinci Bölümde, Beltrami'nin iki diferansiyatörünü Doğrular Kongrüansına teşmil eyledik. Ve bunlar yardımiyle de Kongrüansa ait her hangi bir regle yüzeyin dual küresel eğriliğini ifade ettik ve bazı tatbikat verdik.