SUR LES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES DU PLAN COMPLEXE

Suzan Kahramaner

Dans le présent travail on essaie de trouver une formule analogue au premier théorème fondamental de la théorie des fonctions méromorphes de Nevanlinna [3], [4] pour les applications différentiables et biunivoques du plan complexe et on arrive à une conclusion dans le cas d'une application régulière pour une représentation à différentielle continue et pour une représentation presque-conforme [1].

1. Soit une fonction complexe $y(x) = u + iv$ de la variable complexe $x = s + it$, possédant les propriétés suivantes:

1) $u(s, t)$ et $v(s, t)$ sont des fonctions à différentielle continue dans un cercle fini ou infini $|x| < R \leq \infty$, sauf en un certain nombre de points singuliers isolés qui sont des pôles $x = b_1, b_2, \ldots$ où $y(x) = \infty$:

$$|y(x)| \to \infty \qquad \text{pour} \qquad |x - b_\mu| \to 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

2) Le déterminant fonctionnel $\partial(u, v) / \partial(s, t)$ n'est pas nul, à l'exception des pôles $x = b_1, b_2, \ldots$ et un certain nombre de points isolés $x = x_1, x_2, \ldots$

Il s'ensuit des propriétés 1) et 2) que la représentation $x \to y$ est *biunivoque* ou réversible (et à différentielle continue) dans le voisinage des points $x \neq b_\mu, x_\nu$ du cercle $|x| < R$. De plus, nous admettrons qu'au voisinage des points critiques $x = x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ et des pôles $x = b_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots)$, la représentation $x \to y$ est une transformation intérieure au sens de Stoilow, c'est-à-dire :

3) Tout point $x = x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ est un point «multiple» d'ordre α_ν, ce qui veut dire qu'il existe un nombre entier $\alpha_\nu \geq 1$, tel que l'on

---

[1] Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. le Prof. R. Nevanlinna qui a toujours eu la bonté de m'aider de ses précieux conseils.

Le présent travail a été réalisé avec l'aide d'un fond réservé aux recherches scientifiques de NATO.

ait dans le voisinage de x_ν

$$y(x) - y(x_\nu) = (x - x_\nu)^{a_\nu} \cdot \varphi_\nu(x),$$

où $\varphi_\nu(x)$ est une fonction continue pour $x = x_\nu$ et $\neq 0$.

Dans le même sens, la fonction $1/y(x)$ possède pour le pôle $x = b_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots$) de $y(x)$ un zéro d'ordre de multiplicité $\beta_\mu \geq 1$. Le pôle b_μ s'appelle alors un pôle d'ordre β_μ.

2. La fonction caractéristique T. Dans la suite nous voulons obtenir une généralisation du premier théorème fondamental de la théorie des fonctions méromorphes de NEVANLINNA pour la classe de représentation $x \to y$ définie au No. 1. Nous allons suivre la méthode d'AHLFORS [1], [2] et dans ce but nous introduirons la métrique sphérique dans le plan y.

Soient deux nombres complexes a et b du plan y. Leur distance cordale, c'est-à-dire la distance rectiligne de leur projection stéréographique sur la sphère de RIEMANN de diamètre égal à l'unité et tangente au plan complexe à l'origine, est donnée par

$$(1) \qquad [a, b] = \frac{|a-b|}{\sqrt{(1+|a|^2)(1+|b|^2)}}.$$

Etant donnée une fonction $y = y(x)$ satisfaisant aux conditions 1), 2), 3) ci-dessus, le rapprochement de cette fonction de la valeur complexe a finie ou infinie sur la circonférence $0 < |x| = r < R$ est mesuré par la fonction de déviation

$$(2) \qquad m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{[y(x), a]} \, d\varphi \qquad (x = r e^{i\varphi}),$$

qui indique l'intensité de la convergence moyenne de $y(x)$ vers cette valeur a. La distance cordale étant au plus égale à 1 pour deux points diamétralement opposés, la fonction de déviation est toujours ≥ 0.

Prenons deux points a et b dans le plan complexe y et fixons r de façon que a et b soient à l'extérieur du cercle de rayon r. Introduisons dans $m(r, a)$ et $m(r, b)$ de (2) l'expression (1) de la distance cordale et formons la différence des quantités différentiées par rapport à r:

$$(3) \qquad \frac{dm(r, a)}{dr} - \frac{dm(r, b)}{dr}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\log \frac{\sqrt{(1+|y|^2)(1+|a|^2)}}{|y-a|} - \log \frac{\sqrt{(1+|y|^2)(1+|b|^2)}}{|y-b|} \right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \log \left| \frac{y-b}{y-a} \right| d\varphi.$$

En ajoutant et retranchant une même quantité, écrivons (3) de la manière suivante:

$$\frac{dm(r,a)}{dr}-\frac{dm(r,b)}{dr}=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\arg\left(\frac{y-b}{y-a}\right) \tag{3'}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\log\left|\frac{y-b}{y-a}\right|-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg\left(\frac{y-b}{y-a}\right)\right\}d\varphi.$$

A l'aide de la 2e intégrale du second membre de (3′) définissons une fonction $\psi(r,a)$ et $\psi(r,b)$ en posant:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\log|y-a|-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg(y-a)\right\}d\varphi=\frac{d\psi(r,a)}{dr},\\ &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\log|y-b|-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\arg(y-b)\right\}d\varphi=\frac{d\psi(r,b)}{dr}.\end{aligned} \tag{4}$$

Alors on obtient pour (3′)

$$\frac{dm(r,a)}{dr}-\frac{dm(r,b)}{dr}=\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\arg\left(\frac{y-b}{y-a}\right)+\frac{d\psi(r,b)}{dr}-\frac{d\psi(r,a)}{dr}. \tag{3''}$$

Faisons varier r de manière à introduire les points a et b dans le cercle. Désignons par $n(r,a)$ et $n(r,b)$ le nombre des lieux a et b de $y(x)$ dans le domaine $|x|\leq r$, chaque lieu étant compté autant de fois que son ordre de multiplicité indique. Le principe de l'argument étant en général valable pour toute fonction continue et différente de zéro, on peut l'appliquer au 1er terme du second membre de (3″):

$$\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\arg\left(\frac{y-b}{y-a}\right)=\frac{n(r,b)-n(r,a)}{r}.$$

Nous pouvons écrire (3″) comme il suit:

$$\frac{dm(r,a)}{dr}-\frac{dm(r,b)}{dr}=\frac{n(r,b)-n(r,a)}{r}+\frac{d\psi(r,b)}{dr}-\frac{d\psi(r,a)}{dr},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dm(r,a)}{dr}+\frac{n(r,a)}{r}+\frac{d\psi(r,a)}{dr}=\frac{dm(r,b)}{dr}+\frac{n(r,b)}{r}+\frac{d\psi(r,b)}{dr}.$$

Les fonctions

$$\frac{d\psi(r, a)}{dr} \quad \text{et} \quad \frac{d\psi(r, b)}{dr}$$

sont continues dans le voisinage des points a et b [1]).

Intégrons cette dernière égalité entre les limites 0 et r et désignons l'intégrale de la fonction

$$\frac{n(r, a)}{r}$$

par $N(r, a)$ comme dans la théorie de NEVANLINNA en choisissant la constante d'intégration, ce qui est toujours possible, de façon qu'on ait

$$\lim_{r \to 0} \Big(N(r, a) + m(r, a) + \psi(r, a) \Big) = 0.$$

On obtient alors :

$$m(r, a) + N(r, a) + \psi(r, a) = m(r, b) + N(r, b) + \psi(r, b).$$

L'égalité ainsi trouvée est indépendante du point a ou b. Désignons cette invariante comme une fonction de r seul, $T(r)$, appelée la *fonction caractéristique* de $y(x)$:

(I) $$T(r) = m(r, a) + N(r, a) + \psi(r, a),$$

où ψ est défini par l'expression (4).

L'égalité (I) représente une égalité analogue à celle qui est connue sous le nom du premier théorème fondamental dans la théorie des fonctions méromorphes, pour le cas où $y(x)$ n'est pas analytique.

---

[1]) Lorsque le point a se trouve sur le contour du cercle $|x| = r$, on peut démontrer la continuité de la fonction

$$\frac{d\psi(r, a)}{dr} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \log|y - o| - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(y - a) \right\} d\varphi$$

au point a, en amenant par une translation ce point à l'origine et en prenant comme axes de coordonnées les deux directions perpendiculaires ξ et η. Il suffit ainsi de démontrer la continuité de

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \left(\frac{\partial \log|y|}{\partial \eta} - \frac{\partial \arg y}{\partial \xi} \right) d\xi$$

au point zéro.

3. Interprétation géométrique de $T(r)$. Dans la formule (I) considérons maintenant a comme variable. Désignons l'élément de surface de la sphère A dans le voisinage du point a par $d\omega(a)$. L'intégrale étendu sur toute la sphère

$$\iint_A \log \frac{1}{[y,\, a]}\, d\omega(a)$$

est indépendante de y. Si nous intégrons l'égalité (I) sur la sphère A, on a :

$$T(r) \iint_A d\omega(a) = \iint_A \log \frac{1}{[y,\, a]}\, d\omega(a) + \iint_A N(r,\, a)\, d\omega(a) + \iint_A \psi(r,\, a)\, d\omega(a),$$

$$T(r) = C + \frac{1}{\pi} \iint_A N(r,\, a)\, d\omega(a) + \frac{1}{\pi} \iint_A \psi(r,\, a)\, d\omega(a),$$

où C est la constante provenant de la première intégrale. Dérivons l'égalité ainsi obtenue par rapport à r :

$$T'(r) = \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{n(r,\, a)}{r}\, d\omega(a) + \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{\partial \psi(r,\, a)}{\partial r}\, d\omega(a).$$

Posons :

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \iint_A n(r,\, a)\, d\omega(a),$$

d'où

$$T'(r) = \frac{S(r)}{r} + \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{\partial \psi(r,\, a)}{\partial r}\, d\omega(a).$$

Puisque $T(0) = 0$, on obtient en intégrant $T'(r)$ de 0 à r :

$$\text{(II)} \qquad T(r) = \int_0^r \frac{S(r)}{r}\, dr + \frac{1}{\pi} \iint_A [\psi(r,\, a) - \psi(0,\, a)]\, d\omega(a).$$

Ici $S(r)$, comme dans le cas d'une application analytique $x \to y$, exprime géométriquement l'aire de l'image du cercle $|x| \leqq r$ dans le plan des y, mesurée dans la métrique sphérique, divisée par π ou la surface de la sphère A.

Désignons le 2e terme du second membre de $T(r)$ dans

$$\text{(II)}' \qquad J(r) = \frac{1}{\pi} \iint_A [\psi(r,\, a) - \psi(0,\, a)]\, d\omega(a).$$

(II)′ s'annule si la fonction $y(x)$ est analytique. En effet, d'après la définition de la fonction ψ à l'aide de

$$\frac{d\psi(r, a)}{dr}$$

dans (4), on obtient par une intégration de 0 à r:

$$\psi(r, a) - \psi(0, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg (y - a) \right\} d\varphi \; Ir. \tag{5}$$

On voit de (5) que la fonction $\psi(r, a)$ est constante pour une application analytique $y = y(x)$. Alors on peut interpréter $I(r)$ comme une mesure moyenne pour la déviation de l'application $x \to y$ par rapport à une application conforme.

Si l'ordre de grandeur de l'intégrale $I(r)$ est très petit relativement à la valeur $S(r)$, la fonction caractéristique $T(r)$ est approximativement égale à la valeur $T(r)$ classique correspondant au cas conforme et l'on peut déduire de (II) des conclusions semblables à celles qu'on connait de la théorie classique des applications conformes.

Dans la suite nous allons étudier cette question sous certaines restrictions convenables.

4. Majoration de l'expression $I(r)$. Essayons de majorer le terme $I(r)$. Nous nous bornons au cas particulier où l'application est *régulière*, c'est-à-dire où la fonction $y(x)$ n'admet pas les *pôles* b_μ.

En remplaçant dans (II)' la différence $\psi(r, a) - \psi(0, a)$ par sa valeur exprimée dans (5), nous obtenons pour $I(r)$:

$$I(r) = \frac{1}{\pi} \iint_A \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg (y - a) \right\} dr \, d\varphi \right] d\omega(a)$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[\iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg (y - a) \right\} d\omega(a) \right] dr \, d\varphi,$$

d'où

$$| I(r) | \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[\iint_A \left| \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg (y - a) \right| d\omega(a) \right] dr \, d\varphi.$$

Si nous désignons

$$J(x) = \iint_A \left| \frac{\partial}{\partial r} \log | y(x) - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg (y(x) - a) \right| d\omega(a),$$

nous aurons

$$| I(r) | \leq \frac{1}{2\pi^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} J(r e^{i\varphi})\, dr\, d\varphi.$$

Considérons d'autre part la fonction $z = \log[y(x) - a]$, $y = y(x)$ donnant une représentation quasiconforme du cercle $|x| < R (\leq \infty)$ dans le plan y. La densité de la rotation [1] rot y est égale à:

$$| E_{zx}(x) |^2 = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg[y(x) - a] - \frac{\partial}{\partial r} \log | y(x) - a | \right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial r} \arg[y(x) - a] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \log | y - a | \right)^2.$$

On a donc:

$$| E_{zx}(x) | \geq \left| \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \arg(y - a) \right|.$$

La représentation $x \rightarrow y$ étant une transformation quasiconforme et $y \rightarrow z$ conforme, la grandeur $E_{yx}(x)$ varie d'une manière contrevariante:

$$| E_{yx}(x)\, dz | = | E_{zx}(x)\, dy |,$$

d'où

$$| F_{zx}(x) | = | E_{yx}(x) | \cdot \left| \frac{dz}{dy} \right| = \frac{| E_{yx}(x) |}{| y(x) - a |}.$$

Or

$$| F_{zx}(x) | = \frac{| E_{yx}(x) |}{| y - a |} \geq \left| \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(y - a) \right|.$$

Nous pouvons remplacer l'intégrande de J par cette borne supérieure en E:

$$J(x) = \iint_A \left| \frac{\partial}{\partial r} \log | y - a | - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg(y - a) \right| d\omega(a) \leq \iint_A \frac{| E_{yx}(x) |}{| y - a |}\, d\omega(a).$$

La relation de la densité de la rotation $| E_{yx}(x) | = a_1 - a_2$ (a_1 et a_2 demi-axes de l'ellipse qui est l'image d'un cercle infinitésimal de rayon dr autour du point x) avec le quotient de dilatation $D_{yx}(x) = a_1/a_2$ est

$$| F_{yx}(x) | \leq (D_{yx}(x) - 1)\, | y'(x) |, \text{ [2]}$$

comme $D_r = \max D_{yx}(x)$ pour $| x | \leq r$, on a pour $E_r = \max\limits_{|x| \leq r} | E_{yx}(x) |$

---

[1] Sur la densité de la rotation E, voir R. NEVANLINNA [5].

[2] Ici $y'(x)$ désigne la dérivée de $y(x)$, définie comme *opérateur linéaire*, dans le sens du calcul différentiel absolu (voir F. u. R. NEVANLINNA [6]). La norme de $y'(x)$ est définie par $\max | y(x)\, dx |$ pour $| dx | = 1$.

$$E_r \leqq (D_r - 1) \max_{|x| \leqq r} |y'(x)|.$$

Remplaçons dans la borne supérieure de J, $|E_{yx}(x)|$ par cette dernière borne supérieure qui dépend de $y(x)$, $(x = r\,e^{i\varphi})$. Il vient :

$$J(x) \leqq \left[(D_r - 1) \max_{|x| \leqq r} |y'(x)|\right] \iint_A \frac{d\omega(a)}{|y(x) - a|}.$$

a étant un point variable et y un point fixe du plan complexe, évaluons l'intégrale

$$L(x) = \iint_A \frac{d\omega(a)}{|y(x) - a|}.$$

Prenons $y = \varrho_0$ (réel) et posons

$$y - a = \varrho\, e^{i\alpha}.$$

La distance entre le point fixe y et le point variable a est :

$$|y - a| = \varrho,$$

d'où

$$|a| = |\varrho_0 - \varrho\, e^{i\alpha}|.$$

$d\omega(a)$, l'élément d'aire sphérique s'exprime par :

$$d\omega(a) = \frac{df}{(1 + |a|^2)^2} = \frac{\varrho\, d\varrho\, d\alpha}{(i + \varrho_0^2 + \varrho^2 - 2\varrho_0\varrho\cos\alpha)^2},$$

$df = \varrho\, d\varrho\, d\alpha$, étant l'élément d'aire euclidien.

L'intégrale $L(x)$ est étendue sur A, donc sur tout le plan

$$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi, \qquad 0 \leqq \varrho \leqq \infty.$$

On a alors :

$$L(x) = \iint_A \frac{d\omega(a)}{|y(x) - a|} = \iint_A \frac{df}{(1 + |a|^2)^2 \cdot |y - a|}$$

$$= 2\int_0^\infty \int_0^\pi \frac{d\varrho\, d\alpha}{(1 + \varrho^2 + \varrho_0^2 - 2\varrho\,\varrho_0\cos\alpha)^2}.$$

En posant $1 + \varrho^2 + \varrho_0^2 = A$ et $2\varrho\,\varrho_0 = B$, l'intégrale devient :

$$L(x)=2\int_0^\infty\Big[\int_0^\pi\frac{d\alpha}{(A-B\cos\alpha)^2}\Big]d\varrho=2\int_0^\infty\Big[\frac{1}{A^2-B^2}\Big|\frac{2A}{\sqrt{A^2-B^2}}\operatorname{arg\,tg}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\frac{A-B}{A+B}}}$$

$$+\frac{2B\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{(A-B)+(A+B)\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\Big|_0^\pi\Big]d\varrho=2\pi\int_0^\infty\frac{A\,d\varrho}{(A^2-B^2)^{3/2}}=2\pi\int_0^\infty\frac{(1+\varrho_0^2+\varrho^2)\,d\varrho}{[(1+\varrho_0^2+\varrho^2)^2-(2\varrho_0\varrho)^2]^{3/2}},$$

d'où

$$\frac{L(x)}{2\pi}=\int_0^\infty\frac{(1+\varrho_0^2+\varrho^2)\,d\varrho}{[1+(\varrho+\varrho_0)^2]^{3/2}\cdot[1+(\varrho-\varrho_0)^2]^{3/2}}.$$

Essayons d'estimer cette dernière intégrale dans les intervalles $0\leq\varrho\leq\varrho_0$ et $\varrho_0\leq\varrho\leq\infty$ et désignons les deux intégrales ainsi obtenues par L_1 et L_2:

$$\frac{L(x)}{2\pi}=L_1+L_2.$$

1) *Estimation de L_1.*

Pour l'intervalle $0\leq\varrho\leq\varrho_0$, on a:

$$\frac{1+\varrho_0^2+\varrho^2}{[1+(\varrho+\varrho_0)^2]^{3/2}}\leq\frac{1+2\varrho_0^2}{(1+\varrho_0^2)^{3/2}}<\frac{2(1+\varrho_0^2)}{(1+\varrho_0^2)^{3/2}}=\frac{2}{(1+\varrho_0^2)^{1/2}},$$

d'où:

$$L_1=\int_0^{\varrho_0}\frac{(1+\varrho_0^2+\varrho^2)\,d\varrho}{[1+(\varrho+\varrho_0)^2]^{3/2}\cdot[1+(\varrho-\varrho_0)^2]^{3/2}}<\frac{2}{\sqrt{1+\varrho_0^2}}\int_0^{\varrho_0}\frac{d\varrho}{[1+(\varrho-\varrho_0)^2]^{3/2}}.$$

En posant $\varrho-\varrho_0=\operatorname{tg}t$, on obtient

$$\int\frac{d\varrho}{[1+(\varrho-\varrho_0)]^{3/2}}=\frac{\varrho-\varrho_0}{\sqrt{1+(\varrho-\varrho_0)^2}},$$

d'où:

$$L_1<\frac{2}{\sqrt{1+\varrho_0^2}}\Big|\frac{\varrho-\varrho_0}{\sqrt{1+(\varrho-\varrho_0)^2}}\Big|_0^{\varrho_0}=\frac{2\varrho_0}{1+\varrho_0^2}.$$

2) *Estimation de L_2.*

Pour l'intervalle $\varrho_0\leq\varrho\leq\infty$, on a:

$$\frac{1+\varrho_0^2+\varrho^2}{[1+(\varrho+\varrho_0)^2]^{3/2}}<\frac{1+2\varrho^2}{(1+\varrho^2)^{3/2}}<\frac{2}{(1+\varrho^2)^{1/2}}<\frac{2}{(1+\varrho_0^2)^{1/2}},$$

d'où:

$$L_2 = \int_0^{\infty} \frac{(1+\varrho_0^2+\varrho^2)\,d\varrho}{[1+(\varrho+\varrho_0)^2]^{3/2}\cdot[1+(\varrho-\varrho_0)^2]^{3/2}} < \frac{2}{\sqrt{1+\varrho_0^2}} \int_{\varrho_0}^{\infty} \frac{d\varrho}{[1+(\varrho-\varrho_0)^2]^{3/2}}$$

$$L_2 < \frac{2}{\sqrt{1+\varrho_0^2}} \left| \frac{\varrho-\varrho_0}{\sqrt{1+(\varrho-\varrho_0)^2}} \right|_{\varrho_0}^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{1+\varrho_0^2}}.$$

Dans l'expression de $L(x)$ remplaçons L_1 et L_2 par leurs bornes supérieures et remarquons que $\varrho_0 < \sqrt{1+\varrho_0^2}$, d'où:

$$\frac{L(x)}{2\pi} = L_1 + L_2 = \frac{2\varrho_0}{1+\varrho_0^2} + \frac{2}{\sqrt{1+\varrho_0^2}} < 2\left(\frac{\sqrt{1+\varrho_0^2}}{1+\varrho_0^2} + \frac{1}{\sqrt{1+\varrho_0^2}}\right)$$

$$L(x) < \frac{8\pi}{\sqrt{1+\varrho_0^2}} \qquad (\varrho_0 = |y|).$$

Ainsi nous avons majoré $J(x)$

$$J(x) \leqq [(D_r-1) \max_{|x|\leqq r} |y'(x)|] \cdot \frac{8\pi}{\sqrt{1+|y(x)|^2}},$$

d'où l'on obtient pour la borne supérieure de la valeur absolue de (II)′

$$|I(r)| \leqq \frac{1}{2\pi^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} J(r\,e^{i\varphi})\,dr\,d\varphi < \frac{4}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left[(D_r-1)\frac{\max_{|x|\leqq r} |y'(x)|}{\sqrt{1+|y|^2}}\right] dr\,d\varphi.$$

Dans cette dernière intégrande le facteur

$$\frac{1}{\sqrt{1+|y|^2}}$$

est de l'ordre de $1/|y|$, d'où

$$\text{(II)}'' \qquad |I(r)| < \frac{4}{\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} (D_r-1)\cdot\frac{\max_{|x|\leqq r} |y'(x)|}{|y|}\,dr\,d\varphi.$$

$I(r)$ est le terme additif provenant du caractère quasiconforme de la représentation $y = y(x)$ dans l'expression (II) de $T(r)$:

$$\text{(II) et (II)}' \qquad T(r) = \int_0^r \frac{S(r)}{r}\,dr + I(r).$$

De la majoration de $I(r)$ nous pouvons tirer les *conclusions* ci-dessous. Au début du paragraphe, nous nous sommes bornés au cas particulier où l'application est *régulière*. Les pôles étant ainsi exclus,

$$\frac{|y'(x)|}{|y(x)|} \neq \infty$$

et l'estimation de la borne supérieure de $|I(r)|$ a un sens.

On pourrait voir de (II) et de (II)″ que dans la *représentation à différentielle continue* considérée, si le quotient

$$\left| \frac{y'(x)}{y(x)} \right| \tag{6}$$

est en moyen d'un ordre de croissance inférieur à $S(r)$ au voisinage de $x = \infty$, tout le terme complémentaire ou le reste $I(r)$ est relativement petit par rapport à $S(r)$. Dans ce cas, la remarquable propriété classique de l'invariance de la somme $m(r, a) + N(r, a)$ reste encore valable pour la classe des représentations non conformes.

En outre, lorsque la *représentation $x \to y$ est presque-conforme*, de façon que $D_r - 1$ s'annule pour $r \to \infty$, on conclut de (5) que le reste $I(r)$ peut devenir petit en comparaison de $S(r)$, même lorsque le quotient (6) croît plus rapidement que $S(r)$. La croissance de (6) est reliée d'une certaine façon au quotient de dilatation D_r, et ce serait une question intéressante d'étudier si l'on ne pourrait pas estimer directement la valeur de (6) à l'aide de la dilatation. En effet, c'est le cas de la représentation conforme où comme on le sait l'expression

$$m\left(r, \frac{y'}{y}\right)$$

ne croît pas plus vite que

$$\log\left(r\,T(r)\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHLFORS, L. V. : *Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen*, 7 Congr. Math. scand. Oslo, (1929).

[2] » » : *Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen*, Soc. Sci. fenn. Comment. Phys. Math. 8 No. 10, (1935).

[3] NEVANLINNA, R. : **La théorème de PICARD - BOREL et la théorie des fonctions méromorphes.** GAUTHIER - VILLARS, Paris, (1929).

[4] » » : **Eindeutige analytische Funktionen, 2**, SPRINGER-VERLAG, Berlin, (1953).

[5] » » : *Über fastkonforme Abbildungen*, Ann. Akad. Sci. Fenn., A1, 251, 7, (1958).

[6] NEVANLINNA, F. u. R. : **Absolute Analysis.** SPRINGER - VERLAG, Berlin, (1959).

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL — TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 6 Juillet 1962)

ÖZET

Bu yazıda kompleks düzlemin diferensiyeli haiz ve birebir tasvirleri için, R. NEVANLINNA'nın analitik meromorf fonksiyonlar teorisindeki birinci esas teoremine benzer bir formül AHLFORS metodu ile incelenmekte ve düzgün bir tasvir halinde, sürekli diferensiyeli haiz tasvir sınıfları ve fastkonform tasvir sınıfları için konform hale benzer sonuçlar elde edilmektedir.