SUR L'ARGUMENT DES FONCTIONS UNIVALENTES

SUZAN KAHRAMANER

Dans le présent travail on emploie une suite de fonctions unités pour déterminer une borne supérieure et une borne inférieure de

$$\left(\frac{\partial}{\partial (\arg z)} \left[\arg \frac{f(z)}{z} \right] \right)_{|z|=r} ,$$

où $f(z)$ appartient à la famille (S) des fonctions univalentes et normées dans le cercle unité. On calcule de même pour la sous-classe de (S) représentant le cercle $|z| \leq r$ sur un domaine étoilé, une borne supérieure identique à la précédente et une borne inférieure différente.

1. Introduction

Considérons la famille (S) des fonctions analytiques régulières, univalentes et normées dans le cercle unité :

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \qquad (|z| < 1) \tag{1.1}$$

$$f(0) = a_0 = 0 \quad , \quad f'(0) = a_1 = 1.$$

Pour les fonctions de cette famille, les bornes supérieures des modules suivants :

$$|f(z)| \ , \ |f'(z)| \ , \ |\arg f'(z)| \ , \ \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| ,$$

ont été calculées dans $|z| \leq r < 1$ en fonction de r seul. Les bornes citées sont atteintes effectivement pour une fonction appartenant à la famille (S), c'est-à-dire elles sont rigoureuses.

Quant à $|\arg f(z)|$ ou plus exactement $\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right|$, A. MARX [1] a trouvé pour la famille considérée la borne supérieure suivante :

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| < 2 \ \mathrm{arc\ sin} \sqrt{\frac{|z|}{2} \log \frac{1+|z|}{1-|z|}}$$

qui n'est valable que pour $|z| \leq r_0 = 0{,}8335$. L'auteur a calculé de même des bornes supérieures valables pour tout $|z| < 1$ pour des fonctions de la famille (S) représentant le cercle unité sur un domaine étoilé ou convexe.

La borne supérieure rigoureuse valable pour tout $|z| < 1$:

$$\arg \frac{f(z)}{z} \Big| \leq \log \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

a été atteinte par G. M. GOLUZIN [2].

Cependant nous avions trouvé dans un travail antérieur [3], une borne supérieure

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{C\,|z|}{1-|z|^2} \tag{1.2}$$

$$(\,|a_2| < C < 2{,}77\,)$$

valable aussi pour tout $|z| < 1$, mais non rigoureuse comme la précédente. La méthode employée pour démontrer l'inégalité (1.2), qui s'appuie sur une suite de fonctions unités, peut être appliquée à d'autres problèmes sur les fonctions univalentes.

Dans le paragraphe 2 du présent travail seront donnés les théorèmes auxiliaires et les explications nécessaires afin de ne pas interrompre la suite dans les paragraphes suivants.

Dans le paragraphe 3, nous démontrerons brièvement l'inégalité (1.2) comme application du procédé.

Dans les paragraphes 4 et 5, nous calculerons par la même méthode une borne supérieure et une borne inférieure pour

$$\left(\frac{\partial}{\partial\,(\arg z)} \left[\arg \frac{f(z)}{z} \right] \right)_{|z|=r} \tag{1.3}$$

2. *a*) c étant un nombre complexe quelconque de module plus petit que l'unité $(|c| < 1)$, considérons la fonction linéaire

$$w = \omega\,(z, c) = \frac{c-z}{1-\bar{c}z} \tag{2.1}$$

qui transforme le cercle $|z| = r < |c|$ en un cercle D possédant les propriétés suivantes :

1) D est situé entièrement à l'intérieur du cercle $|w| < 1$.

2) Au point intérieur $z=0$ de $|z| = r$ correspond le point intérieur $w=c$ de D.

Au point extérieur $z=c$ correspond le point extérieur $w=0$.

3) Aux points conjugués par rapport au cercle $|z|=r$ correspondent des points conjugués par rapport au cercle image D. Soit $\arg c = \beta$. Comme les points conjugués $(z=0,\ z^*=\infty)$ et les points correspondants $\left(w=c\,,\ w^* = \dfrac{e^{i\beta}}{|c|}\right)$ se trouvent sur une droite passant par le centre, le centre de D se trouve donc sur la droite $\arg w = \arg c$.

Par une rotation d'angle β dans le sens négatif, le cercle D est transformé en un cercle D' dont le centre se trouve sur l'axe réel. C'est l'image de $|z|=r$ donnée par la fonction

$$\omega\,(z, c) = e^{i\beta} \,.\, \omega\,(e^{-i\beta} \,.\, z\,,\ |c|). \tag{2.2}$$

Désignons par

$$w = \omega\,(z\,,\ |c|). \tag{2.2'}$$

Comme aux points réels $z=r$ et $z=-r$ correspondent des points réels

$$w(r) = \frac{|c| - r}{1 - |c|\, r} \quad , \quad w(-r) = \frac{|c| + r}{1 + |c|\, r} \, ,$$

on peut déterminer le rayon du cercle D' :

$$R = \tfrac{1}{2} \left[w(r) - w(-r) \right] = \frac{r(1 - |c|^2)}{1 - |c|^2 r^2}$$

et la distance du centre M de D' à l'origine O $(w = 0)$:

$$OM = \tfrac{1}{2} \left[w(r) + w(-r) \right] = \frac{|c|\,(1 - r^2)}{1 - |c|^2 r^2} \, .$$

En désignant par α l'angle de la tangente menée par O à D' avec l'axe réel, on obtient :

(2.3) $$\sin \alpha = \frac{r}{(1 - r^2)} \cdot \frac{(1 - |c|^2)}{|c|} \, , \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r(1 - |c|^2)}{\sqrt{(|c|^2 - r^2)\,(1 - |c|^2 r^2)}} \, .$$

De (2.2) on calcule l'argument :

(2.4) $$\arg \omega(z, c) = \arg \omega(e^{-i\beta} \, . \, z, \, |c|) + \arg c.$$

On a donc

$$\max_{0 \leq \varphi < 2\pi} \arg \omega(z, c) = \alpha + \beta \qquad (z = re^{i\varphi})$$

d'où l'on obtient explicitement :

(2.5) $$\max_{0 \leq \varphi < 2\pi} \arg \frac{c - z}{1 - \bar{c}z} = \operatorname{arc\,sin} \frac{|z|}{1 - |z|^2} \cdot \frac{(1 - |c|^2)}{|c|} + \arg c.$$

b) Considérons (1.1), la famille (S) des fonctions univalentes dans $|z| < 1$ et formons la famille (S^*) des fonctions

(2.6) $$F(z) = \frac{z}{4 f(z)} \, .$$

De la limitation du module des fonctions univalentes

(2.7) $$\frac{|z|}{(1 + |z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} \, ,$$

il en résulte pour $F(z)$:

(2.8) $$|F(z)| < 1 \qquad \text{dans } |z| < 1$$

et on a

$$F(z) \neq 0.$$

En développant en série la fonction $F(z)$:

$$F(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots ,$$

on obtient pour les premiers coefficients :

$$b_0 = \frac{1}{4} \quad , \quad b_1 = -\frac{a_2}{4} \, , \cdots$$

Démontrons maintenant que pour toute fonction bornée de la famille (S^*) dont le module est inférieur à l'unité dans le cercle $|z| < 1$, il existe une suite de fonctions unités $E_1(z), E_2(z), \ldots,$ où $E_n(z)$ est une fonction unité d'ordre n qui converge vers $F(z)$ [4].

On appelle *fonction unité* une fonction analytique et régulière, de module inférieur à l'unité dans $|z| < 1$, continue et de valeur absolue égale à l'unité sur $|z| = 1$. Toute fonction unité peut être écrite sous la forme suivante

$$E_n(z) = e^{i\vartheta} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{c_\nu - z}{1 - \bar{c}_\nu z}, \quad (|c_\nu| < 1). \tag{2.9}$$

Lorsque d_0 est un point intérieur quelconque de $|z| < 1$, $(|d_0| < 1)$, la fonction

$$\widetilde{E}_n(z) = \frac{d_0 - E_n(z)}{1 - \bar{d}_0 E_n(z)} \tag{2.10}$$

est une fonction unité de même que $E_n(z)$.

$E_n(z)$ qui est une fonction rationnelle dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes de degré n, est appelée une fonction unité d'ordre n.

La famille des fonctions unités constitue une famille normale dans $|z| < 1$. Il n'est pas nécessaire que la fonction limite de la suite formée par les fonctions unités soit elle-même une fonction unité. Mais elle est bornée et de module inférieur à l'unité dans $|z| < 1$.

Considérons la fonction unité

$$E_1(z) = \frac{b_0 - z}{1 - \bar{b}_0 z}$$

dont le développement en série commence par $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. On peut alors déterminer les uns après les autres l'ensemble des fonctions $E_n(z)$ en passant d'abord par (2.10) aux fonctions unités $\widetilde{E}_n(z)$ que l'on peut de même exprimer comme fonction linéaire de la fonction unité $E_{n+1}(z)$ à l'aide du lemme de Schwarz:

$$\widetilde{E}_n(z) = \frac{b_0 - E_{n+1}(z)}{z(1 - \bar{b}_0 E_{n+1}(z))}.$$

Ainsi on obtient avec

$$E_{n+1}(z) = \frac{b_0 - z\,\widetilde{E}_n(z)}{1 - \bar{b}_0 z\,\widetilde{E}_n(z)} \tag{2.11}$$

une formule de récurrence qui permet d'écrire une suite de fonctions unités

$$E_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{c_{\nu(n)} - z}{1 - \bar{c}_{\nu(n)} z} \tag{2.12}$$

dont le développement en série commence avec les n premiers coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ de $F(z)$.

La suite $E_n(z)$ tend uniformément dans $|z| < 1$ vers la fonction $F(z)$:

$$\lim_{n\to\infty} E_n(z) = F(z). \tag{2.13}$$

$F(z)$ est un produit infini convergent d'après (2.8). On a par suite

$$\lim_{n\to\infty} |c_{\nu(n)}| = 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{2.14}$$

Pour les deux premiers coefficients b_0, b_1 indiqués plus haut, nous pouvons déduire de (2.12) :

$$b_0 = \prod_{\nu=1}^{n} c_{\nu(n)} = \tfrac{1}{4} \quad . \quad b_1 = -\frac{a_2}{4} = -\tfrac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 - |c_{\nu(n)}|^2}{c_{\nu(n)}} . \tag{2.15}$$

Dans (2.6) en désignant par φ l'argument de z et par $\vartheta(\varphi)$ celui de $f(z)$, on a pour $|z| = r$:

$$\arg F(z) = \arg \frac{z}{4f(z)} = \varphi - \vartheta(\varphi). \tag{2.16}$$

Nous pouvons de même obtenir l'argument de $F(z)$ comme la limite de la somme des arguments des fonctions unités. On a d'après (2.12) et (2.1)

$$\varphi - \vartheta = \lim_{n\to\infty} \arg E_n(z) = \lim_{n\to\infty} \arg \prod_{\nu=1}^{n} \omega(z, c_{\nu(n)})$$

et d'après (2.4)

$$\arg \omega(z, c_{\nu(n)}) = \arg \omega(z, |c_{\nu(n)}|) + \arg c_{\nu(n)} .$$

Or $\prod_{\nu=1}^{n} c_{\nu(n)} = \frac{1}{4}$ (2.15) est réel, son argument sera nul :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \arg c_{\nu(n)} = 0.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \varphi - \vartheta &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \arg \omega(z, |c_{\nu(n)}|) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \arg \frac{|c_{\nu(n)}| - z}{1 - |c_{\nu(n)}| z} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu(n)} . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Il s'agit de chercher le maximum de cette limite, c'est-à-dire de trouver une borne supérieure pour $\varphi - \vartheta$.

c) Comme théorème auxiliaire nous allons utiliser *le critère de convergence* résultant de la sommation partielle *d'Abel* [5].

Soient $(a_1, a_2, \ldots)$ et $(b_1, b_2, \ldots)$ deux suites de nombres quelconques. Si on désigne par :

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = A_n ,$$

on a :

$$(2.18) \qquad \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\, b_\nu = \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu\,(b_\nu - b_{\nu+1}) + A_{n-1}\, b_n\,.$$

Le critère d'Abel établit la convergence de la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\, b_\nu$ dans le cas où la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ est convergente et où la suite (b_ν) est monotone et bornée.

Si $a_\nu > 0$ et la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ est convergente, c'est-à-dire

$$(2.19) \qquad A_{\nu-1} < A_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

et si la suite (b_ν) est monotone décroissante avec $b_N > 0$, c'est-à-dire

$$(2.20) \qquad b_{\nu-1} > b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

on déduit de (2.18), l'inégalité suivante :

$$(2.21) \qquad \sum_{\nu=1}^{n-1} a_\nu\, b_\nu < A_{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} (b_\nu - b_{\nu+1}) + A_{n-1}\, b_n = A_{n-1}\, b_1\,,$$

ce qui vérifie le critère.

3. Citons brièvement le théorème relatif à l'argument de $F(z)$:

Théorème : *Paur la famille (S) des fonctions univalentes vaut l'inégalité suivante :*

$$\left| \arg \frac{f(z)}{z} \right| < \frac{C\,|z|}{1-|z|^2}$$

où la constante C désigne :

$$C = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} (1-|c_{\nu(n)}|^2).$$

$$(\,|a_2| < C < 2{,}77\,)$$

La démonstration est basée sur le fait que la fonction régulière $F(z)$, de module inférieur à l'unité dans $|z| < 1$ peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions unités (2. b).

On a de (2.5) :

$$|\arg \omega\,(z,\ |c|)\,| = \left| \arg \frac{|c|-z}{1-|c|\,z} \right| \leq \text{arc sin} \left(\frac{|z|}{1-|z|^2} \cdot \frac{1-|c|^2}{|c|} \right)$$

et de (2.17) avant le passage à la limite :

$$\arg E_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \arg \frac{|c_{\nu(n)}|-z}{1-|c_{\nu(n)}|\,z}\,.$$

De ces deux relations on déduit :

$$(3.1) \qquad |\arg E_n(z)| \leq \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{|z|}{1-|z|^2} \cdot \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|}\right).$$

Pour borner supérieurement $|\arg E_n(z)|$, il faut démontrer la convergence de ia série (3.1) pour $n \to \infty$. De (2.14), on a $\lim\limits_{n\to\infty} |c_{\nu(n)}| = 1$. Alors à la limite pour $n \to \infty$ l'expression

$$\alpha_{\nu(n)} = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{|z|}{1-|z|^2} \cdot \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|}\right)$$

tend vers zéro. On peut donc admettre $\alpha_{\nu(n)} < \frac{\pi}{2}$. Comme pour les petites valeurs de α, on a $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$, on peut écrire pour de tels $\alpha_{\nu(n)}$:

$$\sin\alpha_{\nu(n)} < \alpha_{\nu(n)} < \operatorname{tg}\alpha_{\nu(n)}.$$

S_n désignant la somme (3.1) de n termes, il en résulte :

$$(3.2) \qquad \frac{|z|}{1-|z|^2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|} < S_n < |z| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{\sqrt{(|c_{\nu(n)}|^2-|z|^2)(1-|c_{\nu(n)}|^2|z|^2)}}$$

Nous allons démontrer que la première et la seconde série de (3.2) convergent et qu'elles ont *la même* valeur limite. Pour la démonstration, nous allons nous servir de l'inégalité (2.21) qui résulte de la sommation d'Abel. Désignons par :

$$a_{\nu(n)} = 1 - |c_{\nu(n)}|^2 \quad , \quad b_{\nu(n)} = \frac{1}{|c_{\nu(n)}|}.$$

D'après (2.15) puisque le produit infini converge et la limite

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{\nu=1}^{n} c_{\nu(n)} = \frac{1}{4}$$

existe, il en est de même de la série

$$(3.3) \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (1-|c_{\nu(n)}|^2) = C'.$$

On a donc de (2.14) et de (3.3) :

$$\lim_{n\to\infty} b_{1(n)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} A_{n-1(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (1-|c_{\nu(n)}|^2) = C'.$$

Ainsi en appliquant (2.21) on démontre la convergence de la première série de (3.2) :

$$(3.4) \qquad \frac{C|z|}{1-|z|^2} \quad \text{où} \quad C = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|}.$$

Les deux expressions

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (1 - |c_{\nu(n)}|^2) = C' \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(1 - |c_{\nu(n)}|^2)}{|c_{\nu(n)}|} = C$$

possèdent la même limite, ce que l'on peut vérifier en appliquant la sommation partielle d'Abel.

Démontrons maintenant que la seconde série de (3.2) est de même convergente et possède la même valeur limite. La série en question de (3.2) a comme série majorante la série dont le terme général est :

$$|z| \cdot \frac{1 - |c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|^2 - |z|^2} = |z| \cdot \frac{1 - |c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|} \cdot \frac{|c_{\nu(n)}|}{|c_{\nu(n)}|^2 - |z|^2} .$$

Abstraction faite de $|z|$, désignons le premier facteur par $a_{\nu(n)}$ et le second par $b_{\nu(n)}$ et soit

$$A_{k(n)} = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu(n)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} b_{1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{1(n)}|}{|c_{1(n)}|^2 - |z|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2} ,$$

il s'ensuit d'après (2.21) la convergence de la série majorante qui a la somme

$$\frac{C\,|z|}{1 - |z|^2} \qquad \text{où} \qquad C = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1 - |c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|} .$$

Le théorème est ainsi démontré. On remarque que la constante C qui est une valeur caractéristique dépendant de la fonction $f(z)$ se trouve entre les bornes suivantes

$$|a_2| < C = C' < \log_e 16 \approx 2{,}77.$$

4. Calculons dans ce paragraphe le maximum et le minimum de $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ · De (2.2′) nous avons en désignant $|c|$ par λ.

$$\omega(z, |c|) = \omega(z, \lambda) = \frac{\lambda - z}{1 - \lambda z} , \quad (0 \leqq r < |c| = \lambda < 1), \tag{4.1}$$

d'où

$$\arg \omega(z, \lambda) = \alpha .$$

De

$$\omega(z, \lambda) = \frac{[\lambda(1 + r^2) - (1 + \lambda^2) r \cos\varphi] - i(1 - \lambda^2) r \sin\varphi}{|1 - \lambda z|^2} ,$$

nous obtenons explicitement la valeur de l'argument :

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{r(1 - \lambda^2)\sin\varphi}{\lambda(1 + r^2) - r(1 + \lambda^2)\cos\varphi} . \tag{4.2}$$

Dérivons (4.2) :

(4.3)
$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{(1-\lambda^2)(1+r^2)\left[\dfrac{r(1+\lambda^2)}{\lambda(1+r^2)} - \cos\varphi\right]}{4r\lambda\left[\cos\varphi - \dfrac{(r^2+\lambda^2)}{2r\lambda}\right]\left[\cos\varphi - \dfrac{(1+r^2\lambda^2)}{2r\lambda}\right]}\cdot$$

Pour abréger, posons :

$$0 < \frac{(1-\lambda^2)(1+r^2)}{4r\lambda} = A,$$

$$0 < \frac{r(1+\lambda^2)}{\lambda(1+r^2)} = a < 1,$$

$$0 < \frac{1+r^2\lambda^2}{2r\lambda} = b > 1,$$

$$0 < \frac{r^2+\lambda^2}{2r\lambda} = c > 1.$$

On a en outre $c < b$, d'où $a < 1 < c < b$. (4.3) peut s'écrire alors :

(4.3′)
$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{A(a-\cos\varphi)}{(\cos\varphi-b)(\cos\varphi-c)} = \frac{A(a-\cos\varphi)}{D}$$

où le dénominateur est toujours positif ($\cos\varphi \leqq 1 < c < b$) et le numérateur peut être positif ou négatif ($a < 1$). (4.3) s'annule donc pour $0 < \varphi = \varphi_0 = \text{arc}\cos a < \frac{\pi}{2}$ en passant du négatif au positif et $\varphi = 2\pi - \varphi_0 = 2\pi - \text{arc}\cos a$ en passant du positif au négatif. La valeur φ_0 est la valeur de φ qui rend l'argument α minimum

$$\left(\min \operatorname{tg}\alpha = -\frac{r(1-\lambda^2)}{\sqrt{(\lambda^2-r^2)(1-\lambda^2r^2)}}\right)$$

et $2\pi - \varphi_0$ rend l'argument α maximum

$$\left(\max \operatorname{tg}\alpha = \frac{r(1-\lambda^2)}{\sqrt{(\lambda^2-r^2)(1-\lambda^2r^2)}}\right)\cdot$$

Les valeurs de minimum et de maximum sont symétriques, comme nous avions déjà calculé géométriquement dans (2.3).

Étudions maintenant la variation de la fonction $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, ce qui est notre but dans ce paragraphe. $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ étant fonction de $\cos\varphi$, il suffit de considérer l'intervalle $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ au lieu de $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Calculons la dérivée :

(4.4)
$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \frac{d^2\alpha}{d\varphi^2} = \frac{A\sin\varphi}{D^2}\left[-\cos^2\varphi + 2a\cos\varphi + bc - ab - ac\right]\cdot$$

Posons :

(4.5)
$$g(\cos\varphi) = -\cos^2\varphi + 2a\cos\varphi + bc - ab - ac.$$

On a alors :

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)' = \frac{A}{D^2} \cdot \sin\varphi \cdot g(\cos\varphi). \tag{4.5'}$$

Pour trouver les extrema de $\frac{d\alpha}{d\varphi}$, calculons les valeurs de φ qui annulent la dérivée :

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)' = 0 \quad \begin{cases} \text{pour} \quad \sin\varphi = 0, & \text{d'où} \quad \varphi = 0, \; \pi, \\ \text{pour} \quad g(\cos\varphi) = 0, & \text{d'où,} \quad \cos\varphi_{1,2} = a \pm \sqrt{(b-a)(c-a)}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Désignons $\cos\varphi$ par x : $\cos\varphi_1 = x_1$, $\cos\varphi_2 = x_2$.

L'équation $g(x) = 0$, du second degré par rapport à la variable $\cos\varphi = x$, possède deux racines réelles x_1 et x_2, car $0 < a < 1 < c < b$. Pour que ces racines puissent constituer une solution, il faut qu'elles soient comprises entre -1 et $+1$: $-1 < x_1 < x_2 < +1$.

Or
$$x_1 = a - \sqrt{(b-a)(c-a)} < a < 1.$$

Pour situer x_2, comparons le nombre 1 avec les racines de l'équation $g(x) = 0$. Si

$$g(1) > 0 \quad , \quad \text{on a} \quad x_1 < 1 < x_2,$$

$$g(1) < 0 \quad , \quad \text{on a} \quad x_1 < x_2 < 1.$$

Formons $g(1)$:

$$g(1) = -1 + 2a + (bc - ab - ac)$$

$$= \frac{(\lambda - r)(1 - \lambda r)}{4r^2\lambda^2(1+r^2)}\left[r(1+r^2)\lambda^2 + (r^4 - 6r^2 + 1)\lambda + r(1+r^2)\right].$$

Posons :

$$h(\lambda) = r(1+r^2)\lambda^2 + (r^4 - 6r^2 + 1)\lambda + r(1+r^2).$$

Le signe de $g(1)$ est le même que celui de $h(\lambda)$ qui est un trinôme du second degré en λ. Son discriminant

$$\Delta_h = (r^4 - 6r^2 + 1)^2 - 4r^2(1+r^2)^2$$

$$= (1 - r^2)^2 (r^2 - 4r + 1)(r^2 + 4r + 1)$$

s'annule pour les racines

$$r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \qquad \text{de l'équation} \qquad r^2 - 4r + 1 = 0,$$

$$r_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3} \qquad \text{"} \quad \text{"} \qquad r^2 + 4r + 1 = 0,$$

$$r_{5,6} = \pm 1 \qquad \text{"} \quad \text{"} \qquad 1 - r^2 = 0.$$

1) Si $2 - \sqrt{3} \leq r < 1$, on a $\Delta_h \leq 0$, $h(\lambda) > 0$, $g(1) > 0$ et par suite

$$x_1 < 1 < x_2.$$

x_2 n'est pas une solution.

2) Si $0 \leq r < 2 - \sqrt{3}$, on a $\Delta_h > 0$ et $h(\lambda) = 0$ possède deux racines de même signe λ_1 et λ_2 dont le produit est égal à 1. Si $|\lambda_1| < 1$, alors $|\lambda_2| > 1$. Pour déterminer leur signe, calculons leur somme :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{(r^2 + 2r - 1)(-r^2 + 2r + 1)}{r(1 + r^2)}$$

qui s'annule pour les racines

$$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2} \qquad \text{de l'équation} \qquad r^2 + 2r - 1 = 0,$$

$$r_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2} \qquad \text{"} \qquad \text{"} \qquad -r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Alors le signe de la somme dans l'intervalle considéré, $0 \leq r < 2 - \sqrt{3}$, sera négatif.

L'équation $h(\lambda) = 0$ possède donc deux racines négatives :

$$\lambda_2 < -1 < \lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} < 0.$$

Pour les valeurs positives de $\lambda (r < \lambda)$, $h(\lambda) = r(1 + r^2)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ est toujours positive. Par suite $g(1) > 0$. On a alors comme dans le cas précédent :

$$x_1 < 1 < x_2 .$$

x_2 ne constitue pas une solution.

En définitive, la grande racine

$$x_2 = \frac{r(1 + \lambda^2)}{\lambda(1 + r^2)} + \frac{(1 - r^2)\sqrt{(\lambda^2 - r^2)(1 - \lambda^2 r^2)}}{2\lambda r(1 + r^2)}$$

de l'équation $g(x) = 0$ est plus grande que 1, tandis que la petite racine

$$x_1 = \frac{r(1 + \lambda^2)}{\lambda(1 + r^2)} - \frac{(1 - r^2)\sqrt{(\lambda^2 - r^2)(1 - \lambda^2 r^2)}}{2\lambda r(1 + r^2)}$$

est plus petite.

Examinons le signe de x_1. Dans $g(x) = 0$, la somme des racines est :

$$x_1 + x_2 = 2a > 0,$$

le produit des racines est :

$$x_1 \cdot x_2 = -(bc - ab - ac)$$

$$= \frac{1}{4r^2\lambda^2}\,[\,r\lambda^2 - (1 - r^2)\lambda + r\,]\,[\,r\lambda^2 + (1 - r^2)\lambda + r\,].$$

Le produit est formé de deux trinômes du second degré en λ qui ont le même discriminant

$$\Delta = 1 - 6r^2 + r^4 .$$

Le signe du discriminant est le signe opposé de la somme $\lambda_1 + \lambda_2$ précédente. Alors nous avons deux cas à distinguer :

I. Si $\sqrt{2}-1 \leqq r < 1$, $\Delta \leqq 0$, alors $x_1 x_2 > 0$.

Dans l'équation $g(x) = 0$, la somme et le produit des racines étant positifs, il existe deux racines positives :

$$0 < x_1 < 1 < x_2 .$$

La racine x_1 est une solution.

II. Si $0 \leqq r < \sqrt{2}-1$, $\Delta > 0$. Alors l'équation $x_1 x_2 (\lambda) = 0$ possède 4 racines.

Dans l'équation $r\lambda^2 + (1-r^2)\lambda + r = 0$, la somme des racines étant

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{(1-r^2)}{r} < 0$$

et leur produit $\lambda_1 \lambda_2 = 1 > 0$, on a deux racines négatives :

$$\lambda_1 < -1 < \lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} < 0 .$$

Le trinôme $r\lambda^2 + (1-r^2)\lambda + r$ est positif pour $r > 0$.

Dans l'équation $r\lambda^2 - (1-r^2)\lambda + r = 0$, la somme des racines étant

$$\lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1-r^2}{r} > 0$$

et leur produit $\lambda_3 \lambda_4 = 1 > 0$, on a deux racines positives :

$$0 < \lambda_3 < 1 < \lambda_4 = \frac{1}{\lambda_3} .$$

Le trinôme $r\lambda^2 + (1-r^2)\lambda + r$ est positif pour $0 < \lambda < \lambda_3$ et négatif pour $\lambda_3 < \lambda < 1$.

Le signe de ces deux trinômes donne le signe du produit $x_1 x_2$ et nous aurons encore 2 cas à distinguer suivant ce signe :

A. Si $0 < \lambda < \lambda_3 = \dfrac{1-r^2}{2r} - \dfrac{\sqrt{1-6r^2+r^4}}{2r}$ $(0 \leqq r \leqq \sqrt{2}-1 \rightarrow 0 \leqq \lambda_3 \leqq 1)$

ou en tenant compte de la condition $r < \lambda$, si $r < \lambda < \lambda_3$, le produit $x_1 x_2$ est positif. L'équation $g(x) = 0$ possède donc deux racines positives comme dans le cas I :

$$0 < x_1 < 1 < x_2 .$$

La racine x_1 est la solution du problème.

B. Si $\lambda_3 < \lambda < 1$, le produit $x_1 x_2$ est négatif. La somme étant positive, on a

$$x_1 < 0 < 1 < x_2 \qquad (|x_1| < x_2) .$$

Pour que x_1 puisse être une solution il faut que

$$-1 \leqq x_1 .$$

Résoudre cette inégalité revient au même de comparer -1 avec les racines de l'équation $g(x) = 0$. Formons $g(-1)$:

$$g(-1) = -1 - 2a + (bc - ab - ac)$$
$$= \frac{(\lambda + r)(1 + \lambda r)}{4r^2 \lambda^2 (1 + r^2)} [-r(1+r^2)\lambda^2 + (r^4 - 6r^2 + 1)\lambda - r(1+r^2)].$$

Posons :

$$k(\lambda) = -r(1+r^2)\lambda^2 + (r^4 - 6r^2 + 1)\lambda - r(1+r^2).$$

Le signe de $g(-1)$ est le même que celui de $k(\lambda)$ qui est un trinôme du second degré en λ possédant le même discriminant que $h(\lambda)$:

$$\Delta_k = \Delta_h = (1 - r^2)^2 (r^2 - 4r + 1)(r^2 + 4r + 1).$$

Nous aurons de nouveau deux cas à distinguer suivant le signe de Δ_k :

1. Si $2 - \sqrt{3} \leqq r < 1$, on a $\Delta_k \leqq 0$. Comme nous sommes dans le cas (II. B.) : $0 \leqq r < \sqrt{2} - 1$, il faut prendre

$$2 - \sqrt{3} \leqq r < \sqrt{2} - 1.$$

Le discriminant étant négatif, $k(\lambda)$ et par suite $g(-1)$ est toujours négatif et $-g(-1) > 0$. -1 est alors en dehors des racines :

$$-1 < x_1 < 0 < 1 < x_2.$$

x_1 constitue une solution.

2. Si $0 \leqq r < 2 - \sqrt{3}$, on a $\Delta_k > 0$. L'équation $k(\lambda)$ possède deux racines λ_1, λ_2 dont le produit $\lambda_1 \lambda_2 = 1 > 0$. On a donc 2 racines de même signe,

$$|\lambda_1| < 1, \ |\lambda_2| = \frac{1}{|\lambda_1|} > 1.$$

Calculons la somme des racines :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = - \frac{(r^2 + 2r - 1)(-r^2 + 2r + 1)}{r(1 + r^2)}.$$

Le signe de cette somme est opposé à celui de la somme relative à $h(\lambda)$, c'est-à-dire positif dans l'intervalle considéré. $k(\lambda)$ possède donc deux racines positives, d'où nous déduisons le signe de $k(\lambda)$ et par suite de $g(-1)$:

$$k(\lambda) < 0 \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda < \lambda_1,$$
$$k(\lambda) > 0 \quad \text{pour} \quad \lambda_1 < \lambda < 1 < \lambda_2.$$

Nous aurons de nouveau deux cas à considérer :

a) $r < \lambda < \lambda_1 = \dfrac{r^4 - 6r^2 + 1}{2r(1 + r^2)} - \dfrac{(1 - r^2)\sqrt{(r^2 - 4r + 1)(r^2 + 4r + 1)}}{2r(1 + r^2)}.$

Comme nous sommes dans le cas **B** : $\lambda_3 < \lambda < 1$, nous devons donc prendre $\lambda_3 < \lambda < \lambda_1$. (On vérifie aisément que $\lambda_3 < \lambda_1$ pour tout $0 < r < 1$.)

Nous avons dans ce cas, $k(\lambda) < 0$, par suite $g(-1) < 0$ et $-g(-1) > 0$. C'est un cas analogue au premier :

$$-1 < x_1 < 0 < 1 < x_2 .$$

x_1 constitue une solution.

b) Si $\lambda_1 < \lambda < 1$, on a $k(\lambda) > 0$, par suite $g(-1) > 0$, $-g(-1) < 0$. Alors -1 est compris entre les racines :

$$x_1 < -1 < +1 < x_2 .$$

x_1 n'est pas une solution.

Résumons les différents cas concernant les racines de l'équation $g(x) = 0$: $1 < x_2$ n'est pas une solution, $x_1 < 1$ peut être une solution.

α) Dans le cas I : $\sqrt{2} - 1 \leqq r < 1$

et II : $0 \leqq r < \sqrt{2} - 1$, A. $0 < \lambda < \lambda_3$,

il existe une racine positive $0 < x_1 < 1$.

β) Dans le cas II. B. $\lambda_3 < \lambda < 1$

1) $2 - \sqrt{3} \leqq r < \sqrt{2} - 1$

et 2) $0 \leqq r < 2 - \sqrt{3}$, a) $\lambda_3 < \lambda < \lambda_1$,

il existe une racine négative $-1 < x_1 < 0$.

γ) Dans le cas II. B. 2) b) $\lambda_1 < \lambda < 1$,

il n'existe aucune solution du problème.

Après avoir calculé la seule racine valable de $g(x) = 0$ que nous désignons par

$$x_1 = \cos\varphi_1 = a - \sqrt{(b-a)(c-a)}, \tag{4.7}$$

examinons le signe de (4.5') $\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)'$ et déterminons les extrema de $\dfrac{d\alpha}{d\varphi}$ correspondant aux trois cas cités plus haut.

α) Cas d'une racine positive : $0 < x_1 < 1$.

Ecrivons (4.5') ainsi :

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)' = -\frac{A}{D^2}\sin\varphi\,(\cos\varphi - \cos\varphi_1)\,(\cos\varphi - \cos\varphi_2). \tag{4.5''}$$

Comme $x_2 > 1$, le facteur $(\cos\varphi - \cos\varphi_2)$ est toujours négatif. Dans ce cas, puisque $0 < x_1 = \cos\varphi_1 < 1$, on a $0 < \varphi_1 < \dfrac{\pi}{2}$ · Le signe de $\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)'$ dépend de $\sin\varphi$ et de $(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$.

Dans l'intervalle $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $\sin\varphi \geqq 0$, $(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$ s'annule pour une valeur $\varphi = \varphi_1$ en passant des valeurs positives aux valeurs négatives.

Alors $\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)' = 0$ pour $\varphi = 0$, $0 < \varphi = \varphi_1 < \dfrac{\pi}{2}$ et $\varphi = \pi$.

$\varphi = \varphi_1$ correspond à un maximum et $\varphi = 0$ et π à un minimum de $\dfrac{d\alpha}{d\varphi}$ · Nous avions vu que (4.3') s'annulait pour $\varphi_0 = \arccos a < \varphi_1$. $(\cos\varphi_0 = a > \cos\varphi_1)$.

Calculons les valeurs minima correspondant à $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi$:

$$(4.8)\qquad \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = \frac{A\,(a-1)}{(1-b)\,(1-c)} = \frac{(1-\lambda^2)\,[\,r\,(1+\lambda^2)-\lambda\,(1+r^2)\,]}{4\,r\,\lambda\left[1-\dfrac{(r^2+\lambda^2)}{2\,r\,\lambda}\right]\left[1-\dfrac{(1+r^2\lambda^2)}{2\,r\,\lambda}\right]}$$

$$= -\frac{r\,(1-\lambda^2)}{(\lambda-r)\,(1-\lambda\,r)}\,.$$

$$(4.9)\qquad \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = \frac{A\,(a+1)}{(-1-b)\,(-1-c)} = \frac{(1-\lambda^2)\,[\,r\,(1+\lambda^2)+\lambda\,(1+r^2)\,]}{4\,r\,\lambda\left[1+\dfrac{(r^2+\lambda^2)}{2\,r\,\lambda}\right]\left[1+\dfrac{(1+r^2\lambda^2)}{2\,r\,\lambda}\right]}$$

$$= \frac{r\,(1-\lambda^2)}{(\lambda+r)\,(1+\lambda\,r)}\,.$$

et la valeur maxima correspondant à $\varphi = \varphi_1$ (4.7) :

$$(4.10)\qquad \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = \frac{A\sqrt{(b-a)\,(c-a)}}{(\,a-b-\sqrt{(b-a)\,(c-a)}\,)\,(a-c-\sqrt{(b-a)\,(c-a)}\,)}$$

$$= \frac{A}{(\,\sqrt{b-a}+\sqrt{c-a}\,)^2}$$

$$= \frac{(1-\lambda^2)\,(1+r^2)^2}{2\,(1-r^2)\,(\,\sqrt{1-r^2\lambda^2}+\sqrt{\lambda^2-r^2}\,)^2}\,.$$

β) Cas d'une racine négative : $-1 < x_1 < 0$.

Nous pouvons écrire (4.5″) où le facteur $(\cos\varphi - \cos\varphi_2)$ est toujours négatif comme dans le cas précédent ($x_2 = \cos\varphi_2 > 1$). Pusique dans ce cas $-1 < x_1 = \cos\varphi_1 < 0$, on a $\dfrac{\pi}{2} < \varphi_1 < \pi$. Le signe de $\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)'$ dépend de $\sin\varphi$ et de $(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$.

Dans l'intervalle $0 \leqq \varphi \leqq \pi$, $\sin\varphi \geqq 0$, $(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$ s'annule pour une valeur $\varphi = \varphi_1$ en passant des valeurs positives aux valeurs négatives.

Alors $\left(\dfrac{d\alpha}{d\varphi}\right)' = 0$ pour $\varphi = 0$, $\dfrac{\pi}{2} < \varphi = \varphi_1 < \pi$ et $\varphi = \pi$. $\varphi = \varphi_1$ *correspond à un maximum et* $\varphi = 0$ *et* π *à un minimum de* $\dfrac{d\alpha}{d\varphi}$. $\dfrac{d\alpha}{d\varphi} = 0$ pour $\varphi = \varphi_0 =$ arc $\cos a < \dfrac{\pi}{2} < \varphi_1 < \pi$.

Les valeurs du maximum et des minima sont les mêmes que dans le cas précédent. Alors on peut considérer ces deux cas comme identiques. Dans le premier, la valeur φ_1 donnant le maximum est dans l'intervalle $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, dans le second dans l'intervalle $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$. C'est le *cas général.*

Cherchons de plus une borne supérieure pour la valeur maxima :

$$(4.11)\qquad \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = \frac{(1+r^2)^2\,(1-\lambda^2)}{2\,(1-r^2)\,(\,\sqrt{1-r^2\lambda^2}+\sqrt{\lambda^2-r^2}\,)^2} < \frac{(1+r^2)^2\,(1-\lambda^2)}{2\,(1-r^2)\,(2\sqrt{\lambda^2-r^2}\,)^2}$$

$$< \frac{(1+r^2)^2\,(1-\lambda^2)}{8\,(1-r^2)\,(\lambda^2-r^2)}\,.$$

γ) C'est un *cas particulier* : il n'existe aucune racine de (4.5) entre -1 et $+1$.

Dans (4.5''), $x_1 < -1$, donc $(\cos\varphi - x_1)$ est toujours positif,

$x_2 > +1$, donc $(\cos\varphi - x_2)$ est toujours négatif.

Le signe de $\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)'$ dépend seulement de $\sin\varphi \cdot \left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)'$ s'annule pour $\varphi = 0$ en passant du négatif au positif et pour $\varphi = \pi$ en passant du positif au négatif. $\varphi = 0$ *correspond à un minimum et* $\varphi = \pi$ *à un maximum.*

Calculons les valeurs du minimum et du maximum :

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)_{\varphi=0} = -\frac{r(1-\lambda^2)}{(\lambda - r)(1-\lambda r)}. \tag{4.8}$$

$$\left(\frac{d\alpha}{d\varphi}\right)_{\varphi=\pi} = \frac{r(1-\lambda^2)}{(\lambda + r)(1+\lambda r)}. \tag{4.9}$$

5. Généralisons ce que nous avons fait dans le paragraphe précédent pour les valeurs maxima et minima de $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ de l'argument α de la fonction $\omega(z, |c|)$. Prenons maintenant les fonctions unités

$$E_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \omega(z, c_{\nu(n)})$$

définies dans 2. b) dont l'argument est d'après (2.17) :

$$\arg E_n(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \arg \frac{|c_{\nu(n)}| - z}{1 - |c_{\nu(n)}|\, z} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\nu(n)}$$

et calculons les valeurs maxima et minima de $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$ en nous servant des résultats du paragraphe 4.

En dérivant (2.17) et en démontrant à l'aide d'une série majorante la convergence uniforme de la série dérivée

$$1 - \theta' = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}, \tag{5.1}$$

on justifie le passage à la limite.

Considérons 2 cas :

a) *Cas général* correspondant à α et β.

Comme borne supérieure de $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$, prenons la somme des bornes supérieures des valeurs maxima de $\frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$ de (4.11). Remplaçons λ par $|c_{\nu(n)}|$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi} < \frac{(1+r^2)^2}{8(1-r^2)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|^2 - r^2}. \tag{5.2}$$

Nous allons nous servir de l'inégalité (2.21) résultant de la sommation d'ABEL. En posant:

$$A_{k(n)} = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu(n)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$a_{\nu(n)} = 1 - |c_{\nu(n)}|^2 \quad , \quad b_{\nu(n)} = \frac{1}{|c_{\nu(n)}|^2 - r^2},$$

les conditions suivantes sont remplies :

$$A_{k(n)} < A_{k+1(n)}, \qquad b_{\nu(n)} > b_{\nu+1(n)},$$

puisque d'une part on a d'après (3.3) :

$$\lim_{n\to\infty} A_{n-1(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (1 - |c_{\nu(n)}|^2) = C,$$

et d'autre part les $(b_{\nu(n)})$ forment une suite monotone décroissante ($r < |c_{\nu(n)}| < 1$). Dans le passage à la limite, d'après (2.14) $\lim\limits_{n\to\infty} |c_{\nu(n)}| = 1$, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} b_{1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|c_{1(n)}|^2 - r^2} = \frac{1}{1-r^2}.$$

En appliquant donc l'inégalité (2.21), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu(n)}\, b_{\nu(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-|c_{\nu(n)}|^2}{|c_{\nu(n)}|^2 - r^2} < \frac{C}{1-r^2},$$

et par suite de (5.1) et (5.2), on obtient :

$$1 - \theta' = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi} < C\, \frac{(1+r^2)^2}{8(1-r^2)^2}. \tag{5.3}$$

Trouvons de la même façon une borne inférieure pour $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$. Prenons comme cette borne la somme des valeurs minima des $\dfrac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$ de (4.8) :

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi} > \sum_{\nu=1}^{n} \min\left(\frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}\right) = -r \sum_{\nu=1}^{n} (1 - |c_{\nu(n)}|^2) \frac{1}{(|c_{\nu(n)}| - r)(1 - |c_{\nu(n)}|\, r)}.$$

Posons :

$$a_{\nu(n)} = 1 - |c_{\nu(n)}|^2 \quad , \quad b_{\nu(n)} = \frac{1}{(|c_{\nu(n)}| - r)(1 - |c_{\nu(n)}|\, r)}$$

et appliquons l'inégalité (2.21) de la sommation d'ABEL. Les conditions requises sont remplies. D'une part, on a :

$$A_{k(n)} < A_{k+1(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} (1 - |c_{\nu(n)}|^2) = C.$$

D'autre part, les $(b_{\nu(n)})$ forment une suite monotone décroissante

$$b_{\nu(n)} > b_{\nu+1(n)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1)$$

car lorsque les $|c_{\nu(n)}|$ augmentent, le dénominateur croit et $b_{\nu(n)}$ décroît. On obtient à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} b_{1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(|c_{1(n)}| - r)(1 - |c_{1(n)}|\, r)} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Il résulte de l'inégalité (2.21) :

$$1 - \theta' = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi} > -Cr\,\frac{1}{(1-r)^2}. \tag{5.4}$$

Ainsi nous avons déterminé la borne supérieure et la borne inférieure de

$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$:

$$-Cr\,\frac{1}{(1-r)^2} < 1 - \theta' < \frac{C(1+r^2)^2}{8(1+r)^2}\,\frac{1}{(1-r)^2}. \tag{5.5}$$

En désignant par

$$Cr = C_1(r) \qquad \text{et} \qquad \frac{C(1+r^2)^2}{8(1+r)^2} = C_2(r),$$

alors on peut écrire :

$$-\frac{C_1(r)}{(1-r)^2} < 1 - \theta' < \frac{C_2(r)}{(1-r)^2},$$

d'où l'on déduit :

$$1 - \frac{C_2(r)}{(1-r)^2} < \theta' < 1 + \frac{C_1(r)}{(1-r)^2}. \tag{5.6}$$

Remarque. En calculant la borne supérieure de $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$, nous avons pris la somme des bornes supérieures des valeurs maxima. Pour la borne inférieure, nous avons ajouté les valeurs minima. On voit donc que la borne supérieure est augmentée davantage par rapport à la borne inférieure. Il s'ensuit par contre que la borne supérieure de θ' est plus exacte par rapport à la borne inférieure.

b) *Cas particulier* correspondant à γ.

Comme borne supérieure de $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi}$, prenons la somme des valeurs maxima (4.9) et comme borne inférieure la somme des valeurs minima (4.8) :

$$-r\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(1-|c_{\nu(n)}|^2)}{(|c_{\nu(n)}|-r)(1-|c_{\nu(n)}|r)} < \sum_{\nu=1}^{n}\frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi} < r\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(1-|c_{\nu(n)}|^2)}{(|c_{\nu(n)}|+r)(1+|c_{\nu(n)}|r)}. \tag{5.7}$$

Pour la borne supérieure, posons :

$$a_{\nu(n)} = 1-|c_{\nu(n)}|^2 \quad , \quad b_{\nu(n)} = \frac{1}{(|c_{\nu(n)}|+r)(1+|c_{\nu(n)}|r)}.$$

On a

$$A_{k(n)} = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu(n)} \qquad (k=1,2,\cdots,n-1)$$

$$A_{k(n)} < A_{k+1(n)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu(n)} = C.$$

La série des $a_{\nu(n)}$ est convergente.

La suite formée par les $(b_{\nu(n)})$ est monotone décroissante :

$$b_{\nu(n)} > b_{\nu+1(n)},$$

car les $|c_{\nu(n)}|$ augmentant, le dénominateur croît et $b_{\nu(n)}$ décroît. Les conditions étant remplies, appliquons l'inégalité (2.21) de la sommation d'Abel :

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu(n)}\, b_{\nu(n)} < A_{n-1(n)}\, b_{1(n)},$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{1(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(c_{1(n)}|+r)(1+|c_{1(n)}|r)} = \frac{1}{(1+r)^2}.$$

On obtient :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(1-|c_{\nu(n)}|^2)}{(|c_{\nu(n)}|+r)(1+|c_{\nu(n)}|r)} < \frac{C}{(1+r)^2}. \tag{5.8}$$

Pour la borne inférieure, posons :

$$a_{\nu(n)} = 1 - |c_{\nu(n)}|^2 \quad , \quad b_{\nu(n)} = \frac{1}{(|c_{\nu(n)}| - r)\,(1 - |c_{\nu(n)}|\, r)} .$$

On a

$$A_{k(n)} = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu(n)} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$A_{k(n)} < A_{k+1(n)} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu(n)} = C .$$

Les $(b_{\nu(n)})$ forment une suite monotone décroissante :

$$b_{\nu(n)} > b_{\nu+1(n)}$$

car les $|c_{\nu(n)}|$ augmentant, le dénominateur croît et $b_{\nu(n)}$ décroit.

Les conditions étant remplies, appliquons l'inégalité (2.21) de la sommation d'ABEL :

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu(n)}\, b_{\nu(n)} < A_{n-1(n)}\, b_{1(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} b_{1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(|c_{1(n)}| - r)\,(1 - |c_{1(n)}|\, r)} = \frac{1}{(1-r)^2} .$$

On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(|c_{\nu(n)}| - r)\,(1 - |c_{\nu(n)}|\, r)} < \frac{C}{(1-r)^2} . \tag{5.9}$$

Avec le signe l'inégalité change de sens et l'on déduit :

$$-\frac{Cr}{(1-r)^2} < 1 - \theta' = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d\alpha_{\nu(n)}}{d\varphi} < \frac{Cr}{(1+r)^2} . \tag{5.10}$$

Par suite, on a pour θ' :

$$1 - \frac{Cr}{(1+r)^2} < \theta' < 1 + \frac{Cr}{(1-r)^2} . \tag{5.11}$$

La borne inférieure de θ' est toujours positive :

$$1 - \frac{Cr}{(1+r)^2} > 0 .$$

Or la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(z)$ représente le cercle $|z| \leqq r$ sur un domaine étoilé est que l'on ait

$$\frac{\partial\,[\arg f]}{\partial\,\varphi} = \theta' = \Re\left(z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geq 0\,,$$

lorsque le module de z est r.

Cette condition est remplie pour ce cas particulier. Les fonctions correspondantes sont donc des fonctions univalentes appartenant à la sous-classe des fonctions étoilées.

Théorème. *Dans la famille (S) des fonctions univalentes, il existe pour*

$$\left(\frac{\partial}{\partial\,(\arg z)}\left[\arg\,\frac{f(z)}{z}\right]\right)_{|z|=r}$$

la borne supérieure et la borne inférieure suivante (5.5) :

$$-\frac{C\,(1+r^2)^2}{8\,(1-r^2)^2} < \left(\frac{\partial}{\partial\,(\arg z)}\left[\arg\,\frac{f(z)}{z}\right]\right)_{|z|=r} < \frac{Cr}{(1-r)^2}\,.$$

Pour la sous-classe des fonctions univalentes représentant le cercle $|z| \leq r$ *sur un domaine étoilé, la borne supérieure est identique, la borne inférieure différente* (5.10) :

$$\frac{Cr}{(1+r)^2} < \left(\frac{\partial}{\partial\,(\arg z)}\left[\arg\,\frac{f(z)}{z}\right]\right)_{|z|=r} < \frac{Cr}{(1-r)^2}\,.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] MARX, A. : *Untersuchungen über schlichte Abbildungen*, Math. Ann. 107, 40-67, Satz *A, B* und *C*, (1933).

[2] GOLUZIN, G. M. : Math. Sb. N. S. 2 (44), 37-64, 685-688, (1937).

„ „ : Geometrische Funktionentheorie, Hochschulbücher für Mathematik, 31, (1957).

[3] TERZİOĞLU, A. N., UND KAHRAMANER, SUZAN : *Ein Verzerrungssatz des Argumentes der schlichten Funktionen*, Rev. Fac. Sci. Univ. İstanbul, Série A, 20, 81-90, (1955).

[4] CARATHEODORY, C : Funktionentheorie, BIRKHÄUSER-VERLAG, Basel, II, 12-13, (1950).

[5] KNOPP, K. : Theorie und Anwendungen der unendlichen Reichen, 3. Aufl. 323-324, (1931).

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL — TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 19 Juin 1967)

ÖZET

Bu yazıda birim dairede tariflenmiş yalınkat ve normlanmış (S) fonksiyon ailesine ait $f(z)$ fonksiyonlar için

$$\left(\frac{\partial}{\partial (\arg z)} \left[\arg \frac{f(z)}{z} \right] \right)_{|z|=r}$$

ifadesinin üst ve alt sınırlarını belirlemekte birim fonksiyonları dizisinden faydalanılıyor. Aynı şekilde $|z| \leq r$ dairesini bir yıldız bölge üzerine tasvir eden (S) nin alt sınıfı için evvelkinin aynı bir üst sınır ve farklı bir alt sınır hesaplanıyor.