

ÜBER DIE CHARAKTERISIERUNG DER IM ARITHMETISCHEN SINNE ALGEBRAISCHEN FUNKTIONEN (*)

ORHAN Ş. İÇEN

SCHNEIDER hatte 1951 und 1954 zwei verschiedenartige Kriterien gegeben für die Charakterisierung einer analytischen Funktion im arithmetischen Sinne. Das erste dieser Kriterien wurde in zwei Arbeiten vom Verfasser bei gleichzeitiger Verallgemeinerung ins p -adische übertragen. Hier wird zunächst eine weitere Verallgemeinerung in dieser Richtung gegeben mit Anwendung auf zwei Irrationalitätsfragen. Dann wird eine Verallgemeinerung und Übertragung des zweiten der oben erwähnten Kriterien gegeben.

EINLEITUNG

1. Der Fall der gewöhnlichen analytischen Funktionen. Bekanntlich heißt eine analytische Funktion $w=f(z)$, welche einer Gleichung der Form

$$\sum_{\substack{l,m \\ \mu,\lambda=0,0}} a_{\lambda\mu} z^\lambda w^\mu = 0 \quad (m \geq 1)$$

mit komplexen Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ genügt, eine algebraische Funktion. Dabei sind natürlich der Definitionsbereich und Wertevorrat von $w=f(z)$ im Körper der komplexen Zahlen enthalten. Falls die Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, heißt $w=f(z)$ algebraisch im arithmetischen Sinne. (Damit $w=f(z)$ im arithmetischen Sinne algebraisch wird, genügt es, daß die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ nur algebraische Zahlen sind. Denn in diesem Falle erhält man eine algebraische Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten für $w=f(z)$, indem man die Norm der linken Seite der ursprünglichen Gleichung bildet und diese mit einem gemeinsamen Nenner der entstandenen Koeffizienten multipliziert und den letzten Ausdruck gleich Null setzt.) Es ist klar, daß sowohl eine solche Funktion, als auch ihre sämtlichen Ableitungen für algebraische Argumente algebraische Werte annehmen.

Eine Umkehrung dieser Aussage in einem speziellen Fall wurde zum ersten Mal 1886 von Emil STRAUSS, einem Schüler von WEIERSTRASS, aufgeworfen. Diese lautet: "Wenn die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v z^v,$$

mit nichtverschwindendem Konvergenzradius und mit rationalen Koeffizienten, für jeden rationalen Wert von z ebenfalls einen rationalen Wert annimmt, ist $f(z)$ eine rationale Funktion" (folglich wird sie eine algebraische Funktion im arithmetischen Sinne vom ersten Grad, da in diesem Falle die Koeffizienten $a_{\lambda\mu}$ der Gleichung, welcher $f(z)$ genügt, als ganze rationale Zahlen gewählt werden können (!))

Darauf hat WEIERSTRASS die E. Straußsche Behauptung widerlegt, indem er ein Beispiel einer ganzen transzendenten Funktion mit rationalen Koeffizienten gab, welche an allen ratio-

(*) Unveränderte deutsche Übersetzung der Habilitationsschrift des Verfassers, die am 31. März 1958 der Math. - Naturwiss. Fakultät der Universität Istanbul vorgelegt wurde.

(!) Für diese letzte Behauptung vgl. (?) in der nächsten Seite.

nalen Stellen rationale Werte annimmt. Endlich ist Faber durch Angabe der Beispiele transzendenter Potenzreihen, welche sogar an allen algebraischen Stellen rationale Werte annehmen, in dieser Richtung viel weiter gegangen. Für ausführlichere Information über dieses Thema vgl. die Einleitung von K. DÖRGE, *Entscheidung des algebraischen Charakters von Potenzreihen mit algebraischen Koeffizienten aufgrund ihres Wertevorrates*. Math. Ann. Bd. 122, S. 259-275 (1950). Es stellt sich auf diese Weise heraus, daß die Annahme algebraischer Werte an allen algebraischen Stellen zur Sicherung der Algebraizität (folglich der Algebraizität im arithmetischen Sinne) einer analytischen Funktion nicht genügt. So entsteht folgende Frage :

Gegeben sei eine endliche oder unendliche Folge von algebraischen Argumenten, welche dem Definitionsbereich einer analytischen Funktion $w=f(z)$ gehören (solche Folgen werden im Folgenden manchmal auch Interpolationsfolgen genannt) (1). Welche zusätzlichen Bedingungen außer Algebraischsein müssen die Werte dieser Funktion und eventuell diejenigen ihrer Ableitungen erfüllen, damit $w=f(z)$ algebraisch (und folglich algebraisch im arithmetischen Sinne(2)) wird? (Falls die Argumentfolge endlich ist, muss mindestens an einer Stelle unendlichviele Ableitungswerte herangezogen werden, da eine analytische Funktion durch abzählbar unendlich viele Parameter bestimmt wird.)

Dies können wir auf folgende Weise besser ausdrücken :

Betrachten wir die Matrix

$$\begin{bmatrix} a_{10} & a_{20} & \cdots & a_{i0} & \cdots \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{i1} & \cdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ a_{1j} & a_{2j} & & a_{ij} & \cdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \end{bmatrix},$$

wo $a_{ij} = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_i)$ ist.

Diese Matrix habe unendlich viele algebraische Elemente für eine Folge aus algebraischen Zahlen $\{z_i\}$. Welche zusätzlichen Bedingungen sichern die Algebraizität von $w=f(z)$? Die zusätzlichen Bedingungen, die bisher gegeben worden sind, können wir in drei Typen einteilen :

1) $f(z)$ soll eine ganze Funktion und die Wachstumsordnung von $f(z)$ für $z \rightarrow \infty$ soll nach Oben beschränkt sein (In diesem Falle wird die Funktion, wenn algebraisch, zwangsweise ein Polynom. Bedingungen von diesem Typ wurden zuerst von PÓLYA gegeben. Vgl. G. PÓLYA. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1920, S 1.-10, und für einen allgemeinen Satz von diesem Typ die Einleitung von TH. SCHNEIDER. *Ein Satz über ganzwertige Funktionen als Prinzip für Transzendenzbeweise*. Math. Ann. Bd. 121, S. 131-140 (1949). Offenbar sind diese Bedingungen für die Algebraizität von $f(z)$ hinreichend, aber nicht notwendig. Diese Ergebnisse und deren Verallgemeinerung auf die algebraische Abhängigkeit im arithmetischen Sinne mehrerer Funktionen wurden von SCHNEIDER für die Beweise der Transzendenz von e^α ($\alpha \neq 0, 1$ algebraisch), α^β (α, β algebraisch, $\alpha \neq 0, 1, \beta$ irrational) und dgl. m. verwendet. Für Information vgl. die oben zitierte Arbeit von SCHNEIDER.

(1) Da die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist, kann jede Untermenge von ihr in eine endliche oder unendliche Folge angeordnet werden.

(2) Diese letzte Behauptung wird genau so bewiesen wie in der oben aufgeführten Arbeit von K. Dörge, "Hilfssatz 6" S. 264. Da wir in der vorliegenden Arbeit direkt die Algebraizität im arithmetischen Sinne von $f(z)$ beweisen werden, benutzen wir die obige Tatsache nirgends.

2) Als der Natur der Sache besser passend, wurde eine Folge $z_i \rightarrow \zeta$ genommen, wobei ζ dem Regularitätsbereich von $f(z)$ gehört, und auf die Grössen von $f(z_i)$ und ihren Ableitungen an den Stellen z_i einige Beschränkungen auferlegt. Wenn auch die Grössen der Glieder von $\{z_i\}$ passenderweise eingeschränkt werden, werden die vorhin angegebenen Bedingungen nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, womit algebraische Funktionen im arithmetischen Sinne vollständig charakterisiert werden. Der erste Satz von dieser Art wurde 1950 von K. DÖRGE angegeben. Vgl. Satz 5 in der oben angeführten Arbeit von DÖRGE.

In seinem Kriterium hat DÖRGE nur die erste Zeil (Funktionswerte für eine Argumentenfolge) und nur eine Spalte (sämtliche Ableitungswerte an einer Stelle) gebraucht. Danach hat Th. SCHNEIDER (1951) das erste Kriterium gegeben, welche nur die Funktionswerte (also nur die erste Zeile der matrix (a_{ij})) benutzt und zwar an den Stellen der unendlichen Interpolationsfolge $\{z_i\} = \left\{ \frac{1}{i} \right\}$ (i natürliche Zahl). Vgl. Satz I und II in SCHNEIDER [1]. Die Schneiderschen Kriterien wurden in İÇEN [1] auf allgemeinere Interpolationsfolgen verallgemeinert (1957). In İÇEN [2] wurde das erste Kriterium der vorhergehenden Arbeit auf den Fall verallgemeinert, wo in der Matrix (a_{ij}) diejenigen Elemente a_{ij} verwendet wurden, welche für jedes i nur die Bedingung $j < j(i)$ erfüllen. Dabei ist $j(i)$ eine geeignete Funktion (1956).

3) Eine andere Eigenschaft der Funktionswerte der algebraischen Funktionen im arithmetischen Sinne wurde von Eisenstein (1852) gegeben. Vgl. z. B. PÖLYA-SZEGÖ. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis Bd. II, VIII. Abschnitt, Aufg. 141 und 236. Berlin 1925 oder BIEBERBACH. Lehrbuch der Funktionentheorie II 2. Aufl. Kap. VII § 11, Leipzig und Berlin 1931. Bekanntlich ist diese Eigenschaft nur notwendig, aber nicht ausreichend. Auch in dieser Richtung hat Th. SCHNEIDER 1954 eine Charakterisierung der algebraischen Funktionen im arithmetischen Sinne gegeben, indem er die Eisensteinsche Eigenschaft statt an einer einzigen Stelle, an endlichvielen, der Folge $\{z_i\} = \left\{ \frac{1}{i} \right\}$ gehörenden, Stellen voraussetzte und einige Größenbedingungen hinzufügte. Für weitere Einzelheiten vgl. SCHNEIDER [2].

II. Der Fall der Potenzreihen im p -adischen Gebiet. Parallel zu I 1) 2) 3) lässt sich auch im p -adischen Gebiet Algebraizitätskriterien angeben. Hier wird als Argumentenbereich das p -adische Gebiet genommen, welches wie folgt definiert wird :

Bekanntlich lässt sich der Körper P der rationalen Zahlen nach zwei verschiedenen Typen bewerten (¹⁾ : Die gewöhnliche Bewertung nach dem Absolutbetrag und je eine p -adische Bewertung für jedes natürliche Primzahl p . Wie der Körper der komplexen Zahlen den kleinsten Oberkörper der rationalen Zahlen ist mit der Eigenschaft, zugleich algebraisch abgeschlossen und nach der Absolutbetragbewertung perfekt zu sein, so kann für jede p -adische Bewertung der rationalen Zahlen einen solchen Oberkörper gebildet werden, welcher sowohl algebraisch abgeschlossen als auch nach der vorliegenden p -adischen Bewertung perfekt und überdies die kleinste von derartigen Oberkörpern ist. Diesen letzten Körper, welcher den Seitenstück zum Körper der komplexen Zahlen für die p -adische Bewertung bildet, wollen wir das p -adische Gebiet (p -fest) nennen und um die Analogie zu bewahren, wollen wir den Körper der komplexen Zahlen nunmehr "das komplexe" Gebiet nennen. In der vorliegenden Arbeit wird irgend eine Bewertung mit $|\cdot|$ bezeichnet. Wenn es präzisiert werden soll, daß es um die Absolutbetrag- bzw. eine p -adische Bewertung handelt, wird die Bezeichnung $|\cdot|_\infty$ bzw. $|\cdot|_p$ verwendet.

(¹) Für die Bewertungstheorie vgl. folgende Bücher : H. Hasse. Zahlentheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1949, und insbesondere Loonstra. Analytische Untersuchungen über bewertete Körper. Amsterdam 1941.

Danach ist das p -adische Gebiet sowohl ein algebraisch abgeschlossener Körper, als auch ein metrischer Raum mit der Metrik $|a-b|_p$, wobei a, b zwei beliebige Elemente des p -adischen Gebiets bedeuten. Bekanntlich lässt sich im p -adischen Gebiet außer algebraischen Operationen, aus der obigen Metrik entstammende Konvergenz und Limesbegriffe definieren und hiernach die stetigen zu unterscheiden unter den Funktionen mit Definitionsbereich und Wertevorrat aus dem p -adischen Gebiet. Unter den stetigen Funktionen wollen wir uns hier insbesondere für die Potenzreihen interessieren: Betrachten wir die Potenzreihe

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v (z-\zeta)^v,$$

wobei die Koeffizienten c_v und ζ dem p -adischen Gebiet entnommen sind.

Wenn hier für z Werte aus demselben Gebiet eingesetzt werden, wird die obige Reihe wenigstens für $z = \zeta$ konvergent. Falls dieselbe für noch einen anderen Wert von z konvergiert, dann kann eine reelle Zahl $r > 0$ (welche eventuell $+\infty$ sein darf) gefunden werden, derart, daß die obige Reihe für alle z , welche der Bedingung $|z - \zeta|_p < r$ genügen, konvergiert. Aber die analytische Fortsetzung von einer p -adischen Potenzreihe durch Umbildung ist, im Gegensatz zum komplexen Fall, nicht möglich; denn das Konvergenzgebiet der durch Umbildung entstandenen Reihe stimmt mit dem ursprünglichen überein (Vgl. z. B. das oben angeführte Buch von Loonstra, Kap III § 19 S. 53 ff.). Folglich wird unter einer analytischen Funktion im p -adischen Gebiet nur eine einzige Potenzreihe von der obigen Art verstanden. Wenn eine analytische Funktion im p -adischen Gebiet, $w = f(z)$, identisch eine Gleichung

$$\sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} z^\lambda w^\mu = 0$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ erfüllt, heißt $f(z)$ "algebraisch im arithmetischen Sinne im p -adischen Gebiet". Danach lässt sich, parallel zum komplexen Fall, auch für die analytischen Funktionen im p -adischen Gebiet Kriterien angeben für deren Algebraizität im arithmetischen Sinne:

1) Zum erstenmal wurden von A. GÜNTHER Algebraizitätsbedingungen im p -adischen Gebiet angegeben, indem er das in I 1) erwähnte Satz von SCHNEIDER ins p -adische übertrug, um das gewonnene Theorem, wie bei seinem Urbild, auf einige Transzendenzbeweise anzuwenden (*). Vgl. A. GÜNTHER. *Über transzendente p -adische Zahlen I*. Journ. f. d. reine u. angew. Math. Bd. 192 S. 155-166 (1953).

2) Das in I 2) erwähnte (notwendige und hinreichende) Kriterium von SCHNEIDER wurde in zwei Arbeiten vom Verfasser sowohl verallgemeinert als auch ins p -adische Gebiet übertragen (Vgl. İÇEN [1] und [2]). Als Anwendung wurden je einen Transzendenzbeweis im

(*) Bekanntlich enthält das komplexe Gebiet, d. h. der Körper der komplexen Zahlen zwei Sorten von Elementen, welche algebraisch und transzendent heißen. Die ersteren erfüllen eine algebraische Gleichung von der Form $\sum_{\sigma=0}^s a_\sigma x^\sigma = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, die letzteren keine solche Gleichung. Auch die Elemente des p -adischen Gebiets lassen sich, parallel zum Obigen, auf zwei Klassen, eine (p -adisch) algebraische und eine (p -adisch) transzendente, einteilen, je nachdem sie eine oder keine Gleichung $\sum_{\sigma=0}^s a_\sigma x^\sigma = 0$ mit ganzen rationalen Koeffizienten erfüllen.

p -adischen Gebiet gegeben. In diesen Arbeiten hat die Idee der "zulässigen Folge", welche teilweise schon bei DÖRGE vorhanden ist, die wesentliche Rolle gespielt. Das Vorhandensein im p -adischen Gebiet von zulässigen Folgen, deren Absolutbetrag nach $+\infty$, aber deren p -adische Betrag nach Null streben, macht dieses Kriterium zur Anwendung auf p -adische Transzendenzprobleme besonders brauchbar. Während man im komplexen Gebiet Interpolationsfolgen so nehmen muß, daß die Absolutbeträge der einzelnen Glieder gegen $+\infty$ divergieren, woraus die Notwendigkeit entsteht, daß man auch das Verhalten der Funktion im unendlichen (z. B. deren Wachstumsordnung) heranziehen muß. Daher lassen sich die klassischen (d. h. im komplexen Gebiet) Transzendenzergebnisse (von e^α , $\alpha\beta$) aus dem obigen, sich nur auf den Funktionswerten an den Stellen einer zulässigen Folge stützenden, Kriterium nicht herleiten. Im Satz I der vorliegenden Arbeit wird das Kriterium in Içen [2] erweitert und danach werden hieraus einige Irrationalitätsergebnisse gewonnen.

3) Im Satz II der vorliegenden Arbeit wird das in I 3) erwähnte Kriterium von SCHNEIDER [2] sowohl auf allgemeinere Interpolationsfolgen als die dort betrachtete $\left\{ \frac{1}{i} \right\}$ erweitert, als auch in das p -adische Gebiet übertragen.

§ 1. Einige Definitionen und Hilfssätze

Die algebraischen Zahlen im komplexen und diejenigen im p -adischen Gebiet bilden zwei zueinander isomorphe Körper, da beide isomorph dem formalen algebraischen Abschluß im Kroncker-Steinitz'schen Sinne des Körpers der rationalen Zahlen sind. Weiter unten wird unter dem Absolutbetrag einer algebraischen Zahl aus dem p -adischen Gebiet den Absolutbetrag der komplexen Zahl verstanden, welche vermöge der obigen Isomorphie der ersten Zahl entspricht und folglich dieselbe Minimalgleichung (für eine Definition vgl. unten) erfüllt wie diese. Falls unten von einer algebraischen Zahl die Rede sein wird, wird ohne Unterschied eine aus dem komplexen oder p -adischen Gebiet verstanden. Nur im Laufe einer und derselben Überlegung wird das Gebiet, aus dem eine bestimmte algebraische Zahl entnommen wird, immer dasselbe bleiben, es sei denn das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird.

Wir wollen hier einige Definitionen aus der Anfangsgründe der Theorie der algebraischen Zahlen zusammenstellen, um dieselben klarer hervortreten zu lassen. Für weitere Auskunft vgl. z. B. : E. HECKE. Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen Leipzig 1923 und TH. SCHNEIDER. Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1957 (S. 4-7 und 10).

Die **Minimalgleichung** und das **Minimalpolynom** einer algebraischen Zahl. Unter allen algebraischen Gleichungen mit ganzen rationalen Koeffizienten, welche eine algebraische Zahl α erfüllt, gibt es eine, bis auf den Faktor ± 1 eindeutig bestimmte, mit minimalem

Grad und teilerfremden Koeffizienten. Es sei $G(x) \equiv \sum_{\sigma=0}^s a_\sigma x^\sigma = 0$ diese Gleichung. Die

Gleichung $G(x) = 0$, welche im Körper P der rationalen Zahlen notwendig irreduzibel sein muß, wird die Minimalgleichung und das Polynom $G(x)$ das Minimalpolynom von α genannt.

Der **Grad**, die **Höhe** und das **"Haus"** der algebraischen Zahl α . Der Grad von $G(x)$ heißt der Grad von α und das Maximum der (nach dem Vorigen durch α eindeutig bes-

timten) Absolutbeträge der Koeffizienten von $G(x)$ heißt die Höhe von α . Wird diese Höhe mit h_α bezeichnet, so ist

$$h_\alpha = \text{Max}_{\sigma=0, 1, \dots, s} |a_\sigma|_\infty.$$

Die anderen Wurzeln von $G(x) = 0$ nennt man die Konjugierten (nach dem Körper \mathfrak{B}) von α und die Gesamtheit aller Wurzeln (α einbegriffen) von $G(x)$ wird das System der Konjugierten von α genannt. Wenn $\alpha^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, s$) das Konjugiertensystem von α ist, heißt die Zahl

$$|\alpha| = \text{Max}_{i=1, 2, \dots, s} |\alpha^{(i)}|_\infty$$

das Haus von α und die Zahl $N(\alpha) = \prod_{i=1}^s \alpha^{(i)}$ die Norm von α . Weil $N(\alpha) = (-1)^s \frac{a_0}{a_s}$

gilt, ist die Norm eine rationale Zahl.

Ganze algebraische Zahl. Bekanntlich heißt α ganz-algebraisch, falls $a_s = \pm 1$ ist.

Wenn eine endliche algebraische Erweiterung vom g -ten Grad des Körpers der rationalen Zahlen gegeben ist, kann man in diesem Oberkörper Systeme $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ von g ganzen algebraischen Zahlen finden, derart, daß jede ganze algebraische Zahl α aus dem Oberkörper in der Form $\alpha = u_1 \omega_1 + u_2 \omega_2 + \dots + u_g \omega_g$ darstellbar ist mit ganzen rationalen u_1, u_2, \dots, u_g . Ein solches System $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ heißt eine Ganzheitsbasis des betreffenden Oberkörpers.

Der Nenner einer algebraischen Zahl α . Die kleinste natürliche Zahl N , für die $N\alpha$ zu einer ganzen algebraischen Zahl wird, heißt der Nenner von α . Da bekanntlich $a_s \alpha$ ganz ist, ist ein solches N immer vorhanden und es gilt $N \leq |a_s|_\infty \leq h_\alpha$.

Nun wollen wir einige Hilfssätze bringen, welche im Folgenden benutzt werden. Der erste von diesen ist ein längstbekanntes Resultat über die Abschätzung nach oben der Absolutbeträge der Wurzeln eines Polynoms. Der 3. und 4. gehören der Theorie der Diophantischen Approximationen und wurden von SIEGEL gegeben. Der 2., 5., 6., 7., 8., wurden in den früheren Arbeiten des Verfassers gegeben und die ersten vier enthalten einige einfache Abschätzungen für algebraische Zahlen, während der 8. eine auch im p -adischen gültige und der Verwendung in den kommenden Sätzen angepaßte Form des Schwarzsehen Lemmas aus der Funktionentheorie darstellt. Hilfssätze 9 und 10 werden erst in dieser Arbeit gegeben. Der erste davon verallgemeinert einige früher von Verf. gegebene Höhenabschätzungen; der zweite führt die Algebraizität im arithmetischen Sinne einer Funktion im p -adischen Gebiet auf dieselbe Eigenschaft im komplexen zurück.

Unten werden die oben erwähnten Hilfssätze aufgeführt und bis auf die letzten zwei werden keine Beweise gegeben, sondern nur auf die Stellen, wo dieselben zu finden sind, hingewiesen.

HS 1. Es sei h_α die Höhe,

$$\sum_{\sigma=0}^s a_\sigma x^\sigma = 0$$

die Minimalgleichung, und $|\alpha|$ das Haus von α . Dann gilt

$$|\alpha| \leq \frac{h_\alpha}{|a_s|_\infty} + 1.$$

Vgl. z. B. O. PERRON. Algebra II, Berlin und Leipzig 1927, S. 21 Satz 14.

HS 2. Der Nenner N von α genügt folgender unteren Abschätzung :

$$|a_s|_\infty^{\frac{1}{s}} \leq N.$$

Vgl. HS 4 in İÇEN [2].

HS 3. Es sei

$$P(x) = k_0 + \dots + k_n x^n$$

ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten, das im Körper der rationalen Zahlen reduziert ist, und

$$P(x) = (k'_0 + \dots + k'_{n'} x^{n'}) Q(x), \quad 0 < n' < n, \quad (k'_0, \dots, k'_{n'}) = 1$$

eine Zerlegung von $P(x)$. Setzt man

$$\text{Max} (|k_0|_\infty, \dots, |k_n|_\infty) = k, \quad \text{Max} (|k'_0|_\infty, \dots, |k'_{n'}|_\infty) = k',$$

so gilt

$$k' \leq n! k.$$

Vgl. C.L. SIEGEL. Approximation algebraischer Zahlen. Math. Zeitschr. Bd 10 (1921), S. 176.

HS 4. Es seien

$$a_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \mu = 1, \dots, m \\ \nu = 1, \dots, n \end{pmatrix}$$

ganze rationale Zahlen, und $n > m$. Dann hat das lineare System

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\nu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m)$$

eine nichttriviale Lösung in ganzen rationalen Zahlen x_1, \dots, x_n mit folgender Eigenschaft :

$$|x_\nu|_\infty \leq \left[(nB)^{\frac{m}{n-m}} + 1 \right] \quad (\nu = 1, \dots, n).$$

Dabei ist $B = \max |a_{\mu\nu}|_\infty$, und bekanntlich bedeutet $[v]$ für eine reelle Zahl v die grösste unter den ganzen rationalen Zahlen, die $\leq v$ sind. Ist insbesondere

$n > 2m$, so gilt

$$|x_\nu|_\infty \leq n B.$$

Dieser wichtige Hilfssatz wurde ebenfalls von SIEGEL gegeben. Vgl. C. L. SIEGEL. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen. Abb. Preuss. Akad. d. Wiss. Jahrgang 1929. Physikalisch-Math. Klasse No.1. Berlin 1930. S. 7-8.

HS 5. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ algebraische Zahlen mit den jeweiligen Graden $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ und Höhen h_1, h_2, \dots, h_k . Es seien ferner

$$[\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k): \mathbf{P}] = \sigma \text{ und } h_1, h_2, \dots, h_k \leq H.$$

Dann existiert in $\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ eine Ganzheitsbasis $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\sigma$ mit der Abschätzung

$$|\overline{\omega_j}| \leq C_1(\sigma) H^{G_2(\sigma)} \quad (j=1, 2, \dots, \sigma),$$

wobei für $C_1(\sigma), C_2(\sigma)$ folgende Werte genommen werden können:

$$C_1(\sigma) = \begin{cases} \sigma \left(2 \frac{\log \sigma}{\log 2} \cdot \sigma^{\log \sigma / \log 2} \right)^{\sigma-1}, & \text{falls } \sigma > 1 \\ 1, & \text{falls } \sigma = 1, \end{cases}$$

$$C_2(\sigma) = \left(\frac{\log \sigma}{\log 2} + 1 \right) (\sigma - 1) \quad \text{für } \sigma \geq 1.$$

Vgl. İÇEN [2], Hilfssatz 7.

HS 6. Es sei γ eine ganze algebraische Zahl aus einem algebraischen Zahlkörper K , $\omega_i (i=1, 2, \dots, \sigma)$ eine Ganzheitsbasis von K mit

$$|\overline{\omega_i}| \leq \Omega \quad (i=1, 2, \dots, \sigma).$$

Dann hat γ die Darstellung

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\sigma} u_i \omega_i, \quad u_i \quad (i=1, \dots, \sigma) \text{ ganz rational mit}$$

$$|u_i|_{\infty} \leq (\sigma!)^2 \Omega^{2\sigma} |\overline{\gamma}| \quad (i=1, \dots, \sigma).$$

Vgl. İÇEN [2] Hilfssatz 8.

HS 7. Es seien $u(z), \varphi(z)$, zwei an der Stelle $z=z_0$ reguläre analytische Funktionen. Es seien ferner

$$\frac{1}{j!} u^{(j)}(z_0) \quad (j=0, 1, \dots, \varrho) \text{ bzw. } \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(z_0) \quad (j=0, 1, \dots, \varrho)$$

lauter algebraische Zahlen mit den Hauptnennern A_0 bzw. B_0 . Dann ist auch

$$\frac{1}{i!} \frac{d^i}{dz^i} \left([u(z)]^\lambda [\varphi(z)]^\mu \right) \Big|_{z=z_0} \quad (i=0, 1, \dots, \varrho)$$

eine algebraische Zahl, die durch Multiplikation mit $A_0^\lambda B_0^\mu$ zu einer ganzen Zahl $K_{\lambda, \mu}^i(z_0)$ wird, welche der Abschätzung

$$|\overline{K_{\lambda, \mu}^i(z_0)}| \leq 2^{\varrho} (2U)^{\lambda} (2V)^{\mu}$$

genügt, wobei U bzw. V obere Schranken für

$$\left| \frac{1}{j!} u^{(j)}(z_0) A_0 \right| \quad (j=0, 1, \dots, \varrho) \text{ bzw. } \left| \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(z_0) B_0 \right| \quad (j=0, 1, \dots, \varrho)$$

bedeuten (also $U, V \geq 1$).

Vgl. İÇEN [2] Hilfssatz 9.

HS 8. Es sei $f(z)$ an der Stelle $z = \zeta$ in eine für $|z - \zeta| \leq r$ konvergente Potenzreihe entwickelbar und

$$\Phi(z) = \sum_{\lambda, \mu = 0, 0}^{l, m} c_{\lambda \mu} z^\lambda (f(z))^\mu$$

habe in $|z - \zeta| < \frac{r}{8}$ die Nullstellen $z = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$, wobei mehrfache Nullstellen mehrfach zu zählen sind. Dann gilt für $|z - \zeta| < \frac{r}{8}$ die Ungleichung

$$\left| \frac{\Phi(z)}{(z - \zeta_1)(z - \zeta_2) \dots (z - \zeta_N)} \right| \leq \mathfrak{L} \gamma_1^l \gamma_2^m \gamma_3^N.$$

Dabei bedeutet \mathfrak{L} eine obere Schranke von

$$|c_{\lambda \mu}| \quad \left(\begin{array}{l} \lambda = 0, \dots, l \\ \mu = 0, \dots, m \end{array} \right)$$

und es wurde gesetzt:

$$\gamma_1 = 4 \text{ Max } (1, |\zeta|, r),$$

$$\gamma_2 = 4 \text{ Max } \left(1, |f(\zeta)|, |f'(\zeta)|r, \dots, \left| \frac{f^{(j)}(\zeta)}{j!} \right| r^j, \dots \right),$$

$$\gamma_3 = \text{Max} \left(1, \frac{8}{r} \right).$$

Daß dieser Hilfssatz sowohl für das komplexe als auch für das p -adische Gebiet richtig ist, wollen wir hier betonen. Vgl. IČEN [1] Teil I § 2 Hilfssätze 5 und 6, und IČEN [2] § 1 Hilfssatz 10.

HS 9. Es sei

$$F(x_1, x_2, \dots, x_u) = \sum A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_u} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_u^{\alpha_u}$$

ein Polynom vom Grade d in u Unbestimmten x_1, x_2, \dots, x_u und mit ganzen rationalen Koeffizienten $A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_u}$. Es seien ferner $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u$ u algebraische Zahlen mit $[\mathbb{P}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u) : \mathbb{P}] = g$. Dann ist auch die Zahl $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u)$ algebraisch von höchstens g -tem Grad, deren Höhe H folgender Ungleichung genügt

$$H \leq g! (2K)^g 2^{gd} \cdot h_{\max}^{(u+1)gd},$$

wobei
$$K = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u} |A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_u}|_{\infty}$$

ist und h_{\max} das Maximum der Höhen von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u$ bedeutet.

Beweis. Es seien h_1, h_2, \dots, h_u die Höhen, a_1, a_2, \dots, a_u die Nenner von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u$. Wenn ferner $\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_u^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, g$) die jeweiligen Konjugiertenysteme von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u$ in Körper $\mathbb{P}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u)$ bedeuten, erfüllt die Zahl $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u)$ die Gleichung

$$(a_1 a_2 \dots a_u)^{gd} \prod_{i=1}^g [x - F(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_u^{(i)})] \equiv \sum_{v=0}^g c_v x^v = 0,$$

wobei die Koeffizienten c_v ($v=0, \dots, g$) leicht als ganze rationale Zahlen zu erkennen sind. Da die Minimalgleichung von $F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_u)$ ein Teiler von dieser letzten Gleichung ist, gilt nach HS 3 :

$$H \leq g! \max_{v=0}^g |c_v|_{\infty}.$$

Nun lässt sich eine obere Schranke für $|c_v|_{\infty}$ ($v=1, \dots, g$) wie folgt berechnen :

Aus

$$\left| F(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_u^{(i)}) \right| \leq \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u} |A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_u}|_{\infty} \frac{\alpha_1}{|\beta_1|} \frac{\alpha_2}{|\beta_2|} \dots \frac{\alpha_u}{|\beta_u|}$$

und aus dem HS 1 zu entnehmenden Beziehung $|\alpha| < 2h_{\alpha}$ erhält man

$$\left| F(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_u^{(i)}) \right| \leq K \cdot 2^d \cdot h_{\max}^d.$$

Die Koeffizienten des Polynoms $\sum_{v=0}^g c_v x^v$ sind Produkte von $(a_1 a_2 \dots a_u)^{gd}$ mit den elementarsymmetrischen Funktionen von $F(\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}, \dots, \beta_u^{(i)})$. Daher ergibt sich unter Berücksichtigung von $(a_1 a_2 \dots a_u)^{gd} \leq h_{\max}^{ugd}$:

$$|c_v|_{\infty} \leq h_{\max}^{ugd} \cdot \binom{g}{v} \cdot (K \cdot 2^d \cdot h_{\max}^d)^{g-v} \quad (v=0, 1, \dots, g)$$

Wegen $0 \leq v \leq g$ und $\binom{g}{v} \leq 2^g$ folgt hieraus

$$|c_v|_{\infty} \leq h_{\max}^{ugd} \cdot 2^g \cdot (K \cdot 2^d \cdot h_{\max}^d)^g \quad (v=0, 1, \dots, g).$$

Die Einsetzung dieses Ergebnisses in die rechte Seite der am Anfang des Beweises gegebenen Abschätzung $H \leq g! \max_{v=0}^g |c_v|_{\infty}$ liefert uns die Behauptung des Hilfssatzes.

HS 10. Jeder Potenzreihe $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$ im p -adischen Gebiet, deren Koeffizienten algebraisch sind, lässt sich eine Potenzreihe $f(Z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v Z^v$ mit denselben Koeffizienten im komplexen Gebiet zuordnen. Wenn $f(z)$ algebraisch im arithmetischen Sinne ist, ist $f(Z)$ es auch.

Beweis. Ist $f(z)$ algebraisch i. a. S., so gilt identisch in z eine Gleichung von der Form

$$\sum_{\lambda, \mu=0, 0}^{l, m} c_{\lambda \mu} z^{\lambda} (f(z))^{\mu} = 0,$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$. In der Potenzreihenentwicklung der linken Seite sind die Koeffizienten $P_j(c_{\lambda\mu}; a_v)$ von z^j ($j=0,1,\dots$) Polynome in den $c_{\lambda\mu}$, a_v mit ganzen rationalen Koeffizienten. Danach ist das Erfülltsein der obigen Gleichung gleichbedeutend mit dem Bestehen des Gleichungssystems $P_j(c_{\lambda\mu}; a_v) = 0$ ($j=0,1,\dots$). Andererseits zieht das Bestehen dieses Gleichungssystems die identische Gültigkeit in Z der Gleichung

$$\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} Z^\lambda (f(Z))^\mu = 0$$

nach sich. Denn in der Entwicklung der linken Seite nach Potenzen von Z tritt als Koeffizient von Z^j genau $P_j(c_{\lambda\mu}; a_v)$ ($j=0,1,\dots$) auf. $f(Z)$ bildet also eine der uns in der Funktionentheorie bekannten Puiseux-Entwicklungen an der Stelle $Z=0$ der durch die Gleichung

$$\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} Z^\lambda W^\mu = 0$$

definierten algebraischen Funktion.

§ 2. SATZ I

In Satz I werden wir eine—dem komplexen oder p -adischen Gebiet gehörende—Interpolationsfolge $\{z_n\}$ mit folgenden Eigenschaften gebrauchen:

1° Die Glieder z_n ($n=1,2,\dots$) der Folge sind voneinander verschieden und jedem Glied z_n wird eine natürliche Zahl j_n zugeordnet, die die Vielfachheit von z_n genannt wird. Die Vielfachheiten sind der Bedingung unterworfen: für $n \rightarrow \infty$ $j_{n+1} = o(j_n)$ wobei $J_n = \sum_{v=1}^n j_v$ gesetzt

wurde. (Für die Definitionen der Symbole O und o die wir im Folgenden häufig gebrauchen, sei z.B. auf die ersten Seiten von E. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie II. Leipzig 1927 verwiesen.)

2° z_n ist eine algebraische Zahl vom Grade s_n , wobei $s_n \leq s$ ($n=1,2,\dots$) mit einer festen positiven Zahl s gilt.

3° Es existiert eine positive Zahl c und ein Element ζ aus dem komplexen oder p -adischen Gebiet je nach der zugrunde gelegten Bewertung, so daß für genügend grosse n die Ungleichung

$$|z_n - \zeta| \leq \frac{1}{h_n^c}$$

gilt. Hier bedeutet h_n die Höhe von z_n .

(Wie in IČEN [2], Anfang vom § 2, kann aus 1°, 2° und 3° gefolgert werden, daß $h_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Folglich ist $\{z_n\}$ eine nach dem Limes ζ konvergierende Folge.)

4° Die Folge $\{\log h_n\}$ genügt folgender Bedingung: Es gibt eine positive konstante A , so daß für genügend grosses n

$$\frac{\sum_{v=1}^n j_v \log h_v}{J_n} \geq A \log \bar{h}_{n+c}$$

ist. (Für eine nach $+\infty$ divergierende Folge $\{u_n\}$ werden \bar{u}_n und \underline{u}_n , wie in İÇEN [1] und [2] folgendermaßen definiert: $\bar{u}_n = \max(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\underline{u}_n = \min(u_n, u_{n+1}, \dots)$. $\{\bar{u}_n\}$ und $\{\underline{u}_n\}$ sind offensichtlich monoton nicht-abnehmend und es gilt außerdem $\underline{u}_n \leq u_n \leq \bar{u}_n$ für jedes n .)

Satz I. *Es sei $\{z_n\}$ eine wie oben definierte Interpolationsfolge und $f(z)$ eine an der Stelle $z = \xi$ regulär analytische (d.h. in eine Potenzreihe nach den Potenzen von $z - \xi$ entwickelbare) Funktion. Wenn folgende Bedingungen erfüllt sind, ist $f(z)$ eine algebraische Funktion im arithmetischen Sinne: Es seien für genügend grosses n*

$$a) \quad a_{nj} = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_n) \quad (j=0, 1, \dots, j_n-1)$$

algebraische Zahlen mit

$$[P(a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{n, j_n-1}) : P] \leq t,$$

wobei t eine positive Konstante bedeutet,

$$b_1) \quad \log B_n < Q J_n \log h_n$$

$$b_2) \quad \text{Max}_{j=0, 1, \dots, j_n-1} \log H_{nj} < Q J_n \log h_n.$$

Hier bedeutet B_n den gemeinsamen Nenner von $a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{n, j_n-1}$ (d.h. die kleinste positive ganzrationale Zahl B_n , für welche $B_n a_{nj}$ ($j=0, 1, \dots, j_n-1$) ganz algebraisch werden), und H_{nj} die Höhe von a_{nj} . Q ist irgendeine positive Konstante, welche folgender Ungleichung genügt:

$$Q < Q_0(s, t, c, A) = \left(\frac{2st}{C_3(st)}, \frac{c^2 A^2}{512s^3 t^3 C_3(st)} \right).$$

An der rechten Seite ist $C_3(\sigma) = 1 + \sigma C_2(\sigma)$, wobei, wie in HS 5, $C_2(\sigma) = \left(\frac{\log \sigma}{\log 2} + 1 \right) (\sigma - 1)$ ist.

Umgekehrt: Die Funktionswerte an den Stellen einer wie oben definierten Folge $\{z_n\}$ jeder an der Stelle $z = \xi$ regulären algebraischen Funktion im arithmetischen Sinne $f(z)$ genügen den Bedingungen a), b₁), b₂).

Wir weisen ausdrücklich darauf hin, dass dieser Satz nebst seinem nachstehenden Beweis sowohl im komplexen als auch im p -adischen Gebiet gültig ist.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass wir aus $\{z_n\}$ durch Weglassung von endlichvieler, etwa n_0 , Anfangsglieder gewonnene Folge $\{z'_n\} = \{z_{n_0+n}\}$ mit den Vielfachheiten $j'_n = j_{n_0+n}$ wiederum die Eigenschaften 1^o), 2^o), 3^o), 4^o) hat (Wenn h'_n die Höhe von z'_n bedeutet,

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (f(z)) \Big|_{z=z'_n} = a'_{nj}$$

gesetzt wird und H'_{nj} die Höhe von a'_{nj} bedeutet, ist $h'_n = h_{n_0+n}$, $a'_{nj} = a_{n_0+n, j}$, $H'_{nj} = H_{n_0+n, j}$. Ferner gilt

$$J'_n = \sum_{v=1}^n j'_v = \sum_{v=1}^n j_{n_0+v} = J_n - \sum_{v=1}^{n_0} j_v.$$

Falls wir n_0 genügend groß wählen, können wir erreichen, dass die Folge $\{z'_n\}$ sowohl der Bedingung $|z'_n - \xi| < \frac{r}{8}$, wobei r dieselbe Bedeutung wie in HS 8 hat, genügt, als auch

für sie 3°) und 4°) von $n=1$ an verifiziert werden. Dabei kann die Konstante A' in 4°) beliebig nahe an A gewählt werden. Ausserdem kann man auf nämliche Weise auch die Voraussetzungen a), b₁), b₂) von Satz I von $n=1$ an als verifiziert annehmen. (Q' , die in diesem Falle die Konstante Q in b₁), b₂) ersetzt, genügt wiederum der Bedingung $Q' < Q_0(s, t, c, A') = Q_0$). Dem nachstehenden Beweis legen wir statt $\{z_n\}$ eine auf diese Weise normierte Folge $\{z'_n\}$ zugrunde.

Nun bilden wir ein Polynom

$$(1) \quad \phi_n(z) = \sum_{\mu, \lambda=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} z^\lambda (f(z))^\mu$$

in $z, f(z)$. Hier sind die Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ und die Grade l, m ($m \geq 1$) zunächst unbestimmt, aber werden nachher als Funktionen von n so gewählt, dass sie die Gleichungen

$$(2) \quad \frac{1}{j!} \phi_n^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{matrix} v=1, 2, \dots, n \\ j=0, 1, \dots, j'_v-1 \end{matrix} \right)$$

und einige weitere, später zu präzisierende Bedingungen erfüllen. Nachdem $l, m, c_{\lambda\mu}$ auf diese Weise gewählt worden sind, wollen wir zeigen, dass nicht nur (2), sondern auch

$$(3) \quad \frac{1}{j!} \phi_n^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{matrix} v=n+1, n+2, \dots \\ j=0, 1, \dots, j'_v-1 \end{matrix} \right)$$

gültig sein wird, wenn nur n genügend groß festgesetzt ist. Damit wird gezeigt sein, daß die Funktion $\phi_n(z)$ für jede Stelle einer nach ihrer Regularitätsstelle ζ konvergierende Interpolationsfolge $\{z'_v\}$ verschwindet. Hieraus wird nach dem Identitätssatz für Potenzreihen, der sowohl im komplexen als auch im p -adischen gilt, das identische Verschwinden von $\phi_n(z)$ gefolgt.

Zur Ausführung dieses Planes schreiben wir die Gleichungen (2) in der Form :

$$(4) \quad \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} \cdot \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z^\lambda f(z)^\mu) \Big|_{z=z'_v} = 0 \quad \left(\begin{matrix} v=1, 2, \dots, n \\ j=0, 1, \dots, j'_v-1 \end{matrix} \right)$$

Aus der Voraussetzung a) des Satzes I folgert man unter Berücksichtigung des HS 7, indem man $u(z) = z, v(z) = f(z)$ setzt und z'_v statt z_0, j'_v-1 statt ϱ nimmt, daß

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z^\lambda (f(z))^\mu) \Big|_{z=z'_v} (j=0, 1, \dots, j'_v-1)$$

algebraische Zahlen sind, die durch Multiplikation mit $A_v'^{\lambda} B_v'^{\mu}$ sämtlich ganz werden. Hier bedeutet A_v' den gemeinsamen Nenner von $\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z) \Big|_{z=z'_v} (j=0, 1, \dots, j'_v-1)$, also den Nenner von z'_v , und B_v' den gemeinsamen Nenner von

$$\frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (f(z)) \Big|_{z=z'_v} (j=0, 1, \dots, j'_v-1)$$

Multiplizieren wir also (4) durch $A_v'^l B_v'^m$, so werden alle Koeffizienten von $c_{\lambda\mu}$ ganze algebraische Zahlen. Auf diese Weise erhalten wir ein (4) äquivalentes aber mit ganzen Koeffizienten versehenes System

$$(5) \quad \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} L_{\lambda\mu}^{vj} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \nu=1,2,\dots,n \\ j=0,1,\dots,j'_\nu-1 \end{array} \right),$$

wo die Koeffizienten

$$(6) \quad \begin{aligned} L_{\lambda\mu}^{vj} &= A'_\nu{}^l B'_\nu{}^m \cdot \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z^\lambda (f(z)^\mu) \Big|_{z=z'_\nu} \\ &= A'_\nu{}^{m-\lambda} B'_\nu{}^{m-\mu} K_{\lambda\mu}^j(z'_\nu) \end{aligned}$$

folgende obere Abschätzung gestatten :

$$(7) \quad \left| L_{\lambda\mu}^{vj} \right| \leq 2^{j'_\nu + l + m} \cdot A'_\nu{}^l B'_\nu{}^m h'_\nu{}^l \left(\text{Max}_{j=0,1,\dots,j'_\nu-1} H'_{\nu j} \right)^m.$$

Die Abschätzung(7) folgt durch Anwendung vom HS 7 auf (6) unter Berücksichtigung von

$$\left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z) \Big|_{z=z'_\nu} \right| \leq 2 h'_\nu, \quad \left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (f(z)) \Big|_{z=z'_\nu} \right| \leq 2 H'_{\nu j} \quad (j=0,1,\dots,j'_\nu-1),$$

die eine Folge vom HS 1 sind. Andererseits gelten wegen der Normiertheit von $\{z'_n\}$ und laut den Voraussetzungen $b_1)$, $b_2)$ vom Satz I die Abschätzungen

$$(8_1) \quad \text{Max}_{\nu=1,2,\dots,n} \log B'_\nu < Q' J'_n \log \bar{h}'_n,$$

$$(8_2) \quad \text{Max}_{\substack{\nu=1,2,\dots,n \\ i=0,1,\dots,j'_\nu-1}} \log H'_{\nu i} < Q' J'_n \log \bar{h}'_n.$$

Nun folgt für (7) aus den Relationen $j'_\nu \leq J'_n$, $A'_\nu \leq h'_\nu \leq \bar{h}'_n$ ($\nu=1,2,\dots,n$) und (8₁), (8₂) :

$$\left| L_{\lambda\mu}^{vj} \right| \leq 2^{j'_\nu + l + m} \bar{h}'_n{}^{2(l+Q' J'_n m)},$$

woraus unter Zuhilfenahme der Tatsachen, daß m als ≥ 1 gewählt werden wird und $\log \bar{h}'_n \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, folgende Abschätzung für $L_{\lambda\mu}^{vj}$ gewonnen wird :

$$(9) \quad \left| L_{\lambda\mu}^{vj} \right| \leq e^{2(l+Q' J'_n m) \log \bar{h}'_n + o((l+Q' J'_n m) \log \bar{h}'_n)} \quad \left(\begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, j'_\nu - 1 \\ \lambda = 0, 1, \dots, l \\ \mu = 0, 1, \dots, m \end{array} \right).$$

Nach (6) sind $L_{\lambda\mu}^{vj}$ dem Körper

$$\mathfrak{K}'_\nu = P \left(z'_\nu, f(z'_\nu), \dots, \frac{1}{(j'_\nu - 1)!} f^{(j'_\nu - 1)}(z'_\nu) \right)$$

gehörende, ganze algebraische Zahlen. Nun hat nach HS 5 der Körper \mathfrak{K}'_v eine Ganzheitsbasis $\omega_{v_1}, \omega_{v_2}, \dots, \omega_{v\sigma}$, welche den Abschätzungen

$$(10) \quad \left| \overline{\omega_{v\sigma}} \right| \leq C_1(\sigma_v) (\text{Max}(h'_{v_0}, H'_{v_0}, H'_{v_1}, \dots, H'_{v, j'_v-1})^{C_2(\sigma_v)} \quad (\sigma=1, 2, \dots, \sigma_v)$$

genügt, wobei $\sigma_v = [\mathfrak{K}'_v : P]$ gesetzt wurde. Aus 2°) und Voraussetzung a) des Satzes ersieht man

$$(11) \quad \sigma_v \leq st \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Außerdem findet man mit Hilfe von (8₂):

$$\text{Max}(h'_v, H'_{v_0}, \dots, H'_{v, j'_v-1}) \leq \text{Max}(\bar{h}'_n, \bar{h}'_n Q'^{j'_n}).$$

Da $J'_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, wird unter geeigneter Wahl von N_1 , $J'_n > \frac{1}{Q'}$ für $n \geq N_1$ und folglich

$$\text{Max}(\bar{h}'_n, \bar{h}'_n Q'^{j'_n}) = \bar{h}'_n Q'^{j'_n} \quad \text{für } n \geq N_1.$$

Daraus folgt

$$(12) \quad \text{Max}(h'_v, H'_{v_0}, \dots, H'_{v, j'_v-1}) \leq \bar{h}'_n Q'^{j'_n} \quad (n \geq N_1).$$

Da $C_1(\sigma) > 0$ für $\sigma \geq 1$ ist, und $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma)$ monoton wachsende Funktionen sind, folgt für $n \geq N_1$ aus (10), (11) und (12)

$$(13) \quad \left| \overline{\omega_{v\sigma}} \right| \leq C_1(st) \bar{h}'_n Q'^{C_2(st)j'_n} \quad \left(\begin{array}{l} v = 1, 2, \dots, n \\ \sigma = 1, 2, \dots, \sigma_v \end{array} \right).$$

Jetzt sei

$$(14) \quad L_{\lambda\mu}^{vj} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma_v} L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \omega_{v\sigma} \quad \left(\begin{array}{l} v = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, j'_v-1 \\ \lambda = 0, 1, \dots, l \\ \mu = 0, 1, \dots, m \end{array} \right).$$

die Darstellung der zu \mathfrak{K}'_v gehörigen ganzen algebraischen Zahl $L_{\lambda\mu}^{vj}$ nach der Ganzheitsbasis $\omega_{v_1}, \omega_{v_2}, \dots, \omega_{v\sigma_v}$ von \mathfrak{K}'_v . Mit Hilfe von (9), (11) und (13) liefert der HS 6 folgende Abschätzung für die Absolutbeträge der ganzen rationalen Koeffizienten $L_{\lambda\mu\sigma}^{vj}$:

$$(15) \quad \left| L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \right|_{\infty} \leq ((st)!)^2 (C_1(st))^{2st} \bar{h}'_n Q'^{2st C_2(st)j'_n} L \quad (n \geq N_1).$$

Hier ist L eine Abkürzung für die rechte Seite der Ungleichung (9). Aus $m \geq 1$, (9) und (15) bekommt man nun

$$(16) \quad \left| L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \right|_{\infty} \leq e^{2(l+Q' C_3(st)j'_n m) \log \bar{h}'_n + o((l+Q' C_3(st)j'_n m) \log \bar{h}'_n)} \quad (n \geq N_1).$$

Hier wurde, genau wie beim Wortlaut des Satzes I, $C_3(\tau) = 1 + \sigma C_2(\sigma)$ gesetzt.

Jetzt erhalten wir folgendes lineares System für $c_{\lambda\mu}$, wenn wir (14) in (5) einsetzen :

$$(17) \quad 0 = \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} \left(\sum_{\sigma=1}^{\sigma_v} L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \omega_{v\sigma} \right) = \sum_{\sigma=1}^{\sigma_v} \left(\sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \right) \omega_{v\sigma}$$

$$\left(\begin{array}{l} v = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, j'_v - 1 \end{array} \right)$$

Da $\omega_{v1}, \omega_{v2}, \dots, \omega_{v\sigma_v}$ eine Ganzheitsbasis bilden, sind diese über dem Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig, folglich ist (17) dem System

$$(18) \quad \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, j'_v - 1 \\ \sigma = 1, 2, \dots, \sigma_v \end{array} \right)$$

äquivalent. Wenn man hier $n \geq N_1$ nimmt, genügen die Koeffizienten von $c_{\lambda\mu}$ in (18) den Ungleichungen (16). Das Gleichungssystem (18) enthält $(l+1)(m+1)$ Unbekannten $c_{\lambda\mu}$ und

$$\sum_{v=1}^n j'_v \sigma_v \quad (\leq st J'_n)$$

Gleichungen. Wir wollen hier l und m als Funktionen von n so wählen, daß die Anzahl der Unbekannten in (18) die doppelte Gleichungsanzahl übertrifft, d. h.

$$(19) \quad (l+1)(m+1) > 2 \sum_{v=1}^n j'_v \sigma_v$$

wird, und ferner die durch (16) gegebene obere Schranke der Koeffizienten von (18) von möglichst niedriger Grössenordnung für $n \rightarrow \infty$ wird. (Außerdem muß die, auch früher erwähnte, Bedingung $m \geq 1$ erfüllt sein, damit das Polynom $\Phi_n(z, f(z))$ die Funktion $f(z)$ wirklich enthält).

Alle diese Bedingungen werden erfüllt, wenn wir folgende Wahl treffen :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \lfloor \sqrt{2 st C_8 Q' J'_n} \rfloor \\ m = \lfloor \sqrt{\frac{2 st}{C_8 Q'}} \rfloor \end{array} \right.$$

(Hier ist $C_8 = C_8(st)$). Wenden wir nun auf (18) und (19) den Spezialfall des HS 4, so erkennen wir die Existenz einer nichttrivialen Lösung in ganzen rationalen Zahlen von (18) welche folgender Abschätzung genügt :

$$(21) \quad |c_{\lambda\mu}| \leq (l+1)(m+1) \max_{v,j,\lambda,\mu,\sigma} |L_{\lambda\mu\sigma}^{vj}| \quad \left(\begin{array}{l} \lambda = 0, 1, \dots, l \\ \mu = 0, 1, \dots, m \end{array} \right).$$

Für $n \geq N_1$ folgern wir nun aus (16) und (20) :

$$(22) \quad \max_{v,j,\lambda,\mu,\sigma} |L_{\lambda\mu\sigma}^{vj}| \leq e^{4 \sqrt{2 st C_8 Q' J'_n} \log \bar{h}'_n + o(J'_n \log \bar{h}'_n)}$$

Andererseits folgt aus $l+1 \leq 2^l$, $m+1 \leq 2^m$ und (20) :

$$(23) \quad (l + 1)(m + 1) \leq e^{o(j'_n \log \bar{h}'_n)}$$

Endlich ergibt sich aus (21), (22) und (23) für $n \geq N_1$ die Abschätzung

$$(24) \quad |c_{\lambda\mu}|_\infty \leq e^{4\sqrt{2st} C_3 Q' j'_n \log \bar{h}'_n + o(j'_n \log \bar{h}'_n)} \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \dots, l \\ \mu = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix}.$$

Die bisherigen Ausführungen kann man wie folgt zusammenfassen: Zu jedem natürlichen Zahl $n \geq N_1$ lassen sich ganze rationale Zahlen

$$l \geq 0, m \geq 1, \quad c_{\mu\lambda} \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \dots, l \\ \mu = 0, 1, \dots, m \end{pmatrix}$$

finden, derart, daß $c_{\lambda\mu}$ die Abschätzung (24) erfüllen und das mit diesen $l, m, c_{\lambda\mu}$ gebildete Polynom

$$\Phi_n(z) = \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} z^\lambda (f(z))^\mu$$

den Bedingungen (2) genügt, d.h.

$$\frac{1}{j!} \Phi_n^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \begin{pmatrix} v = 1, 2, \dots, n \\ j = 0, 1, \dots, j'_v - 1 \end{pmatrix} \text{ wird.}$$

Nun wollen wir durch einen Induktionsschluß zeigen, daß dieses $\Phi_n(z)$ nicht nur den Bedingungen (2), sondern auch denjenigen von (3) genügt, d.h.

$$(25) \quad \frac{1}{j!} \Phi_n^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \begin{pmatrix} v = 1, 2, \dots \\ j = 0, 1, \dots, j'_v - i \end{pmatrix}$$

wird, wenn nur $n \geq N_1$ hinreichend groß gewählt wird. Dazu genügt es, aus

$$(26) \quad \frac{1}{j!} \Phi_n^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \begin{pmatrix} v = 1, 2, \dots, n_1 \\ j = 0, 1, \dots, j'_v - 1 \end{pmatrix}$$

die Relationen

$$(27) \quad \frac{1}{j!} \Phi_n^{(j)}(z'_{n_1+1}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, j'_{n_1+1} - 1)$$

zu deduzieren; denn der Anfang der Induktion ist schon in den Gleichungen (2) vorhanden. Um (27) aus (26) zu folgern, wollen wir uns des folgenden indirekten Schlußes bedienen: Wäre (27) falsch, so gäbe es ein j_0 mit $0 \leq j_0 \leq j'_{n_1+1} - 1$, derart, daß

$$\frac{1}{j_0!} \Phi_n^{(j_0)}(z'_{n_1+1}) \neq 0$$

gilt. Falls es mehrere solche j_0 gibt, wählen wir das kleinste unter ihnen; wir können daher voraussetzen:

$$(28) \quad \frac{1}{j_0!} \Phi_n^{(j_0)}(z'_{n_1+1}) \neq 0, \text{ aber } \frac{1}{j!} \Phi_n^{(j)}(z'_{n_1+1}) = 0 \text{ für } 0 \leq j < j_0.$$

(Falls $j_0 = 0$ ist, ist die Menge der j mit $0 \leq j < j_0$ leer. Das stört aber die Gültigkeit des Beweises nicht).

Wir wollen unten zeigen, daß (25) und (28) zusammen auf einen Widerspruch führen, womit (25) nach dem Prinzip der vollständigen Induktion und folglich der direkte Teil des Satzes I nach dem am Anfang des Beweises Gesagten bewiesen sein wird.

Zu diesem Zweck bilden wir

$$(29) \quad \psi_{j_0}(z'_{n_1+1}) = A_{n_1+1}^{r_1} B_{n_1+1}^{m_1} \cdot \frac{1}{j_0!} \bar{\varphi}_n^{(j_0)}(z'_{n_1+1}).$$

$\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})$ ist eine dem Körper \mathfrak{K}'_{n_1+1} gehörende ganze algebraische Zahl und nach (28) gilt $\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}) \neq 0$. Mit der Bezeichnungswise von (6) ist

$$(30) \quad \psi_{j_0}(z'_{n_1+1}) = \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda, \mu}(n) L_{\lambda, \mu}^{n_1+1, j_0}.$$

Daraus folgt

$$(31) \quad \left| \overline{\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})} \right| \leq (l+1)(m+1) \left(\text{Max}_{\lambda, \mu} |c_{\lambda, \mu}|_{\infty} \right) \left(\text{Max}_{j, \lambda, \mu} \left| \overline{L_{\lambda, \mu}^{n_1+1, j}} \right| \right).$$

(23), (24) und $n_1 \geq n$ liefern zusammen

$$(32) \quad (l+1)(m+1) \text{Max}_{\lambda, \mu} |c_{\lambda, \mu}|_{\infty} \leq e^{4\sqrt{2st}C_3} Q' J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1}).$$

Außerdem folgt durch Einsetzung von n_1+1 statt n und für $\nu = n_1+1$ aus (9):

$$\text{Max}_{j, \lambda, \mu} \left| \overline{L_{\lambda, \mu}^{n_1+1, j}} \right| \leq e^{2(l+Q' J'_{n_1+1} m) \log \bar{h}'_{n_1+1} + o((l+Q' J'_{n_1+1} m) \log \bar{h}'_{n_1+1})}.$$

Unter Benutzung von $C_3 = C_3(st) = 1 + st C_2(st) \geq 1$ ergibt sich aus (20):

$$l + Q' J'_{n_1+1} m \leq 2\sqrt{2st} C_3 Q' J'_{n_1+1}.$$

Setzen wir diese Abschätzung in die vorige ein, so erhalten wir

$$(33) \quad \text{Max}_{j, \lambda, \mu} \left| \overline{L_{\lambda, \mu}^{n_1+1, j}} \right| \leq e^{4\sqrt{2st}C_3} Q' J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1}).$$

Endlich folgt aus (31), (32) und (33):

$$(34) \quad \left| \overline{\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})} \right| \leq e^{8\sqrt{2st}C_3} Q' J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1}).$$

Da $\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})$ eine von Null verschiedene ganze algebraische Zahl ist, muß einerseits

$$(35) \quad |N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))|_{\infty} \geq 1,$$

und andererseits

$$(36) \quad \left| \overline{\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})} \right| \geq 1$$

sein (Denn $N(\psi_{j_0})$, d.h. die Norm von ψ_{j_0} ist eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl; wäre $\left| \overline{\psi_{j_0}} \right| < 1$, so wäre $|N(\psi_{j_0})|_{\infty} < 1$). Zunächst findet man aus (11) und (36):

$$(37) \quad |N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))|_\infty \leq \left| \overline{\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})} \right|^{a_{n_1+1}} \leq \left| \overline{\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})} \right|^{st}.$$

Dann folgt durch Einsetzung von (34) in (37) :

$$(38) \quad |N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))|_\infty \leq e^{8st\sqrt{2st}C_0Q'} J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1})$$

Wenn wir andererseits im HS 8 für \mathfrak{L} die rechte Seite von (24) einsetzen (die rechte Seite von (24), welche > 1 ist, gibt eine obere Schranke von $|c_{\lambda\mu}|$ nicht nur im komplexen, sondern auch im p -adischen Gebiet; denn wegen der Ganzheit von $c_{\lambda\mu}$ ist $|c_{\lambda\mu}|_p \leq 1$) und ferner

$$\begin{aligned} N &= j'_1 + j'_2 + \dots + j'_{n_1} + j_0, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta'_{j'_1} = z'_1, \\ \zeta'_{j'_1+1} &= \zeta'_{j'_1+2} = \dots = \zeta'_{j'_1+j'_2} = z'_2, \dots, \\ \zeta'_{j'_1+j'_2+\dots+j'_{n_1}+1} &= \dots = \zeta'_{j'_1+j'_2+\dots+j'_{n_1}+j_0-1} = z'_{n_1+1} \end{aligned}$$

und endlich $z = z'_{n_1+1}$ setzen (daß $\zeta_1, \dots, \zeta'_{j'_1+j'_2+\dots+j'_{n_1}+j_0-1}$ Nullstellen von $\Phi_n(z)$ sind, folgt aus der Induktionsvoraussetzung und der Wahl von j_0), erhalten wir

$$(39) \quad \left| \frac{1}{j_0!} \Phi_n^{(j_0)}(z'_{n_1+1}) \right| \leq e^{4\sqrt{2st}C_0Q'} J'_n \log \bar{h}'_n + o(J'_n \log \bar{h}'_n) \cdot \gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3 \dots \gamma'_{n_1+j_0} \prod_{v=1}^{n_1} |z'_{n_1+1} - z'_v|^{j'_v}.$$

Da die normierte Folge $\{z'_n\}$ die Bedingungen 3°) und 4°) von $n=1$ an erfüllt, gilt

$$(40) \quad |z'_{n_1+1} - z'_v| \leq |z'_{n_1+1} - \zeta| + |z'_v - \zeta| \leq \frac{2}{h'_v{}^c} \quad (v = 1, \dots, n_1)$$

und folglich

$$(41) \quad \prod_{v=1}^{n_1} |z'_{n_1+1} - z'_v|^{j'_v} \leq 2^{J'_{n_1}} e^{-c \sum_{v=1}^{n_1} \log h'_v} \leq e^{J'_{n_1} \log 2 - c A' J'_{n_1} \log \bar{h}'_{n_1+1}}.$$

Unter Berücksichtigung von

$$J'_{n_1} = J'_{n_1+1} - j'_{n_1+1}, \quad j'_{n_1+1} = o(J'_{n_1+1}) \quad \text{und} \quad \log \bar{h}'_{n_1+1} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad n_1 \rightarrow \infty$$

lässt sich (41) schreiben als

$$(42) \quad \prod_{v=1}^{n_1} |z'_{n_1+1} - z'_v|^{j'_v} \leq e^{-c A' J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1})}.$$

Weil $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ von n und n_1 unabhängig sind und nach (20) $l = O(J'_{n_1+1}), m = O(1)$ gilt, lässt sich (39) mit Hilfe von (42) wie folgt umformen :

$$(43) \quad \left| \frac{1}{j_0!} \Phi^{(j_0)}(z'_{n_1+1}) \right| \leq e^{(4\sqrt{2st} C_3 Q' - cA') J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1})}$$

$$(n_1 \geq n \geq N_1).$$

(Dabei wurde $J'_{n_1} + j_0 < J'_{n_1+1}$ (weil $0 \leq j_0 \leq j'_{n_1+1} - 1$) benutzt). Daraus folgt für (29) die Abschätzung:

$$(44) \quad \left| \psi_{j_0}(z'_{n_1+1}) \right| \leq e^{(6\sqrt{2st} C_3 Q' - cA') J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1})}$$

$$(n_1 \geq n \geq N_1).$$

Denn es gilt im p -adischen Fall

$$\left| A'_{n_1+1} B'^m_{n_1+1} \right|_p \leq 1, \text{ weil } A'_{n_1+1}, B'_{n_1+1}$$

ganz sind, und im komplexen Fall

$$\left| A'_{n_1+1} B'^m_{n_1+1} \right|_\infty \leq h'^{l+Q'J'_{n_1+1}m}_{n_1+1} \leq e^{2\sqrt{2st} C_3 Q' J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1}},$$

weil

$$\left| A'_{n_1+1} \right|_\infty \leq \bar{h}'_{n_1+1}, \quad \left| B'_{n_1+1} \right|_\infty = B'_{n_1+1} \leq \bar{h}'_{n_1+1}^{Q' J'_{n_1+1}},$$

also in beiden Fällen:

$$\left| A'_{n_1+1} B'^m_{n_1+1} \right| \leq e^{2\sqrt{2st} C_3 Q' J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1}}.$$

Mit Hilfe von dieser Ungleichung und (43) folgt nun (44) aus der Definition (29).

Um den Beweis zu beenden, wollen wir jetzt $\left| N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})) \right|$ nach beiden Seiten abschätzen. Es gilt zuerst

$$(45) \quad \left| N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})) \right| \leq \left| \psi_{j_0}(z'_{n_1+1}) \right| \cdot \left| \overline{\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})} \right|^{\sigma_{n_1+1} - 1}.$$

Denn im komplexen Falle ergibt sich dies direkt aus der Norm- und $\left| \overline{} \right|$ -definitionen, verbunden mit der Tatsache, daß σ_{n_1+1} die höchste Anzahl der voneinander verschiedenen Konjugierten der algebraischen Zahl $\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})$ darstellt. Was den p -adischen Fall betrifft, gilt für irgendeine Konjugierte $\tilde{\psi}_{j_0}$ von $\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})$, die ebenfalls ganz algebraisch ist, $\left| \tilde{\psi}_{j_0} \right|_p \leq 1$, woraus unter Anwendung von (36) $\left| \tilde{\psi}_{j_0} \right|_p \leq \left| \overline{\psi_{j_0}} \right|$ folgt, was unmittelbar auf (45) führt.

Endlich erhält man aus (34), (44), (U) und (45):

$$(46) \quad \left| N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})) \right| \leq e^{(8\sqrt{2st} C_3 Q' - cA') J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1} \log \bar{h}'_{n_1+1})}$$

$$(n_1 \geq n \geq N_1).$$

Damit ist eine obere Schranke für $\left| N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1})) \right|$ gefunden worden. Eine untere Schranke desselben ist leichter zu finden:

In der Tat gilt im komplexen Fall schon die untere Abschätzung (35). Im p -adischen Fall folgt aus der für jede nicht verschwindende ganze rationale Zahl gültigen Relation

$|g|_p \geq \frac{1}{|g|_\infty}$ (Vgl. z. B. İÇEN [2], S. 174, Fußnote 1) :

$$|N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))|_p \geq \frac{1}{|N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))|_\infty}$$

Dies verbunden mit (35) führt zu

$$(47) \quad |N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))| \geq \frac{1}{|N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))|_\infty},$$

welche für beide Fälle gilt. Daraus und aus (38) erhält man endlich

$$(48) \quad |N(\psi_{j_0}(z'_{n_1+1}))| \geq e^{-8st\sqrt{2stC_8Q'}J'_{n_1+1}\log\bar{h}_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1}\log\bar{h}'_{n_1+1})}$$

$(n_1 \geq n \geq N_1),$

welche die gesuchte untere Abschätzung ist.

Die Vergleichung von (46) und (48) gibt

$$(49) \quad 1 \leq e^{(16st\sqrt{2stC_8Q'} - cA')J'_{n_1+1}\log\bar{h}'_{n_1+1} + o(J'_{n_1+1}\log\bar{h}'_{n_1+1})}$$

$(n_1 \geq n \geq N_1).$

Nun enthält (49) für grosse n einen Widerspruch. Denn nach der am Anfang des Beweises erwähnten Ungleichung $Q' < Q_0(s, t, c, A')$ ist $16st\sqrt{2stC_8Q'} - cA < 0$. Folglich kann ein $N_2 > 0$ gefunden werden, derart, daß für $n \geq N_2$

$$(16st\sqrt{2stC_8Q'} - cA')J'_n \log\bar{h}'_n + o(J'_n \log\bar{h}'_n) < 0 \text{ wird.}$$

Danach wird für $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$ die rechte Seite von (49) kleiner als 1, was uns den gesuchten Widerspruch liefert. Folglich hat $\Phi_n(z)$ die folgende Eigenschaft, falls n gleich am Anfang so festgesetzt ist, daß $n \geq \text{Max}(N_1, N_2)$ gilt :

Wenn
$$\frac{1}{j!} \Phi^{(j)}(z') = 0 \quad \left(\begin{array}{l} j = 0, 1, \dots, j_v - 1 \\ j = 1, 2, \dots, n_1 \end{array} \right)$$

für ein $n_1 \geq n$ gilt, dann ist

$$\frac{1}{j!} \Phi^{(j)}(z'_{n_1+1}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, j'_{n_1+1} - 1).$$

Da andererseits $\Phi_n(z)$ so gebildet wurde, daß (2) gilt, gilt nach dem Induktionsprinzip auch (3). Nach dem am Anfang gesagten folgt aber hieraus, daß $\Phi_n(z) \equiv 0$, d.h. $f(z)$ algebraisch i. a. S. ist, womit der Beweis beendet ist.

Beweis der Umkehrung von Satz I. Genau so wie bei İÇEN [2] wird a) durch Benutzung von HS 2 und HS 3 verifiziert und

$$(50) \quad \begin{cases} \log B_n \leq C_8 j_n \log h_n \\ \log H_{n_j} \leq C_8 j_n \log h_n \quad (j = 0, 1, \dots, j_n - 1) \end{cases}$$

gefunden. Dabei bedeuten hier, wie dort, C_8, C_8 zwei passende, von n und j unabhängige positive Zahlen. (Vgl. İÇEN [2], Formeln (72) und (90)). Da für $n \rightarrow \infty j_n = o(J_{n-1}) = o(J_n)$, wird für genügend grosse n

$$C_8 j_n, C_8 j_n < Q J_n,$$

welche durch Einsetzung in (50) b₁) und b₂) liefern. Für näheres hierüber siehe İÇEN [2]. Übrigens wird in unseren Anwendungen ausschließlich der direkte Teil des Satzes gebraucht.

§ 3. EINIGE ANWENDUNGEN VON SATZ I

Der oben angegebene Satz I enthält als Spezialfall den Satz von İÇEN [2] und damit den Satz I in İÇEN [1]. Es sind also der Satz von MAHLER-VELDKAMP über die Transzendenz von α^p im p -adischen Gebiet, sowie derjenige von MAHLER über dieselbe Eigenschaft von e^a , welche Folgen von jenen Sätzen sind, ebenfalls als Folgen vom obigen Satz I anzusehen.

Hier wird der Satz I auf einige Irrationalitätsprobleme angewendet. Wie aus den anzuführenden Beispielen zu ersehen ist, kann Satz I besonders auf einen Typus von Irrationalitätsproblemen mit Erfolg angewendet werden. Das rührt daher, daß hier das "o" in den Bedingungen b_1 und b_2 im Satz von İÇEN [2], sowie das "o" der Bedingung b) in Satz I von İÇEN [1] durch ein "O" ersetzt worden ist. Allerdings kann die Konstante Q im hiesigen "O" nicht beliebig gross werden, sondern sie muß der Bedingung $Q < Q_0$ genügen. Dies reicht nicht aus, um den Irrationalitätscharakter der einzelnen Werte der in folgenden Beispielen zu behandelnden Funktionen zu bestimmen. Es läßt sich nur Irrationalitätsaussagen über die Gesamtheit genügend vieler Funktionswerte machen. Für Näheres darüber siehe die Beispiele selbst.

Beispiel 1. (*) Betrachten wir die Reihe

$$(1) \quad \theta(p, z) = \sum_{v=0}^{\infty} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} z^v$$

im p -adischen Gebiet, wobei a, b, c ganz rational sind mit $a > 0$. (Bekanntlich läßt sich das allgemeinste Polynom zweiten Grades, das für ganze rationale Argumente ganze rationale Werte annimmt, in der Form $a \binom{v}{2} + bv + c$ schreiben, wobei a, b, c ganz rational sind. Um die Konvergenz von $\theta(p, z)$ im p -adischen Gebiet zu gewährleisten, muß $a > 0$ angenommen werden). Nach der auch im p -adischen Gebiet gültigen CAUCHY-HADAMARD'schen Regel ist die Reihe (1) für alle z aus diesem Gebiet konvergent. Ausserdem ist $\theta(p, z)$ keine algebraische Funktion i. a. S. Denn anderenfalls wäre auch dieser nach HS 10 im komplexen

Gebiet zugeordnete Funktion $\theta(p, Z) = \sum_{v=0}^{\infty} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} Z^v$ algebraisch i. a. S. Es sei

in diesem Falle $\sum_{\lambda, \mu=0.0}^{l, m} c_{\lambda \mu} Z^\lambda W^\mu = 0$ die definierende Gleichung von $\theta(p, Z)$. Hiernach

müsste $\theta(p, Z)$ mit einer der PUISEUX Entwicklungen an der Stelle $Z = 0$ der Wurzeln dieser Gleichung identisch sein und folglich hätte einen nicht verschwindenden Konvergenzradius. Das kann aber nicht sein, denn (im komplexen Gebiet) hat $\theta(p, Z)$ nach der CAUCHY-HADAMARD'schen Regel den Konvergenzradius Null.

Wir wollen nun die Funktionswerte von $\theta(p, z)$ für rationale Argumente z hinsichtlich ihrer Irrationalität prüfen:

Zunächst bemerken wir, daß $\theta(p, z) = f(z)$ folgender Funktionalgleichung genügt:

$$(2) \quad f(p^n z) = p^{-a \binom{n}{2} - bn} z^{-n} \left[f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} z^v \right].$$

(*) Dieses Beispiel wurde inzwischen in der folgenden Arbeit des Verf. direkt behandelt, wobei etwas schärfere Ergebnisse erzielt wurden: O. İÇEN, Journ. f. d. reine u. ang. Math. Bd. 202 (1959), S. 100 - 106.

Hieraus ersieht man, daß $f(z)$ und $f(p^{an} z)$ für irgend einen rationalen Wert von z denselben Erweiterungskörper vom Körper P der rationalen Zahlen bestimmen. Sie sind folglich, entweder beide transzendent oder beide algebraisch von demselben Grad. Wenn wir nunmehr die Vereinbarung treffen, eine transzendente Zahl hätte den Grad ∞ , dann lässt sich der obige Sachverhalt so ausdrücken:

Für irgend. einen rationalen Wert von z haben $f(z)$ und $f(p^{an} z)$ denselben Grad, sie bestimmen sogar denselben Erweiterungskörper von P .

Wir definieren jetzt in P eine Relation « \sim » folgender Art:

Es sei ${}_1z \sim {}_2z$, wenn ${}_1z, {}_2z \in P$ und ${}_1z = p^{av} {}_2z$ ist, Dabei ist v irgendeine ganze Zahl, welche positiv, negativ oder Null sein darf. Offensichtlich ist die Relation « \sim » reflexiv, symmetrisch und transitiv, folglich eine Äquivalenzrelation. Dieser Relation entspricht also eine Klasseneinteilung von P . Bei dieser Klasseneinteilung bildet die « 0 » eine Klasse für sich, die wir die triviale Klasse nennen wollen. Ein vollständiges Vertretersystem der nichttrivialen Klassen wird gegeben durch die Gesamtheit aller rationalen z , die der Doppelungleichung $p^{-a} < |z|_p \leq 1$ genügen. Hieraus ersieht man, daß die nichttrivialen Klassen in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Wie wir bei (2) bereits gesagt haben, nimmt die Funktion $f(z)$ für alle rationalen z von derselben Klasse Werte von demselben Grad an. Auf diese Weise wird jeder Klasse von rationalen Zahlen der gemeinsame Grad der Werte von $f(z)$ für diese Zahlen zugeordnet.

Nun können wir die folgende Behauptung formulieren:

Zu jeder vorgegebenen natürlichen Zahl t können wir eine (von p unabhängige) ganze rationale Zahl $n_0(t) \geq 0$ finden, derart, daß die p -adische Funktion

$$f(z) = \Theta(p, z) = \sum_{v=0}^{\infty} p^{a(\frac{v}{2}) + bv + c} z^v$$

bei festem p für höchstens $n_0(t)$ nichttrivialen Klassen rationaler Zahlen (oder äquivalenterweise: für höchstens $n_0(t)$ rationale z welche $p^{-a} < |z|_p \leq 1$ genügen) Werte von höchstens t -tem Grad annimmt.

Folglich nimmt $\Theta(p, z)$ für unendlich viele Klassen Werte an, welche grösser als t -tem Grad sind.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $f(z_i)$ ($i = 1, \dots, k$) von höchstens t -tem Grad für k rationalen Stellen z_i ($i = 1, \dots, k$), welche den Bedingungen

$$p^{-a} < |z_i|_p \leq 1 \quad (i = 1, \dots, k)$$

genügen. Daraus wollen wir schließen: $f(z)$ ist algebraisch i. a. S., falls $k > n_0(t)$ gewählt ist, mit später näher anzugebendem $n_0(t)$. Da wir gleich am Anfang gezeigt hatten, daß $f(z)$ keine algebraische Funktion i. a. S. ist, wird sich daraus ein Widerspruch ergeben. Dieser löst sich nur, wenn unsere Behauptung richtig ist.

Wir betrachten jetzt die Interpolationsfolge

$$(3) \quad z_N = p^{an} z_i \quad \begin{cases} N = kn + i \\ 0 < i \leq k \end{cases} \quad (N = 1, 2, \dots)$$

mit $j_N = 1$ ($N = 1, 2, \dots$). Wir zeigen zunächst, daß diese Folge die Bedingungen 1°), 2°), 3°), 4°) erfüllt, welche von den im Satz I verwendeten Interpolationsfolgen gefordert werden:

Aus $j_N = 1$, $J_N = N$ folgt offenbar 1°) und da z_i rational sind ist, auch 2°) wird mit $s = 1$ verifiziert. 3°) und 4°) lassen sich auf folgende Weise verifizieren: Es seien

$$z_i = \frac{u_i}{v_i}, \quad u_i, v_i \text{ ganz rational, } (u_i, v_i) = 1, \quad v_i > 0 \quad (i = 1, \dots, k).$$

Wenn wir

$$M_1 = \text{Min } |u_1|, \dots, |u_k|, v_1, \dots, v_k,$$

$$M_2 = \text{Max } |u_1|, \dots, |u_k|, v_1, \dots, v_k$$

setzen, folgt aus (3) und der Definition von h_N :

$$(4) \quad M_1 p^{an} \leq h_N \leq M_2 p^{an}$$

Da $|z_i|_p \leq 1$ war, folgt wieder aus (3), daß $|z_N|_p = p^{-an} |z_i|_p \leq p^{-an}$, was mit Hilfe von (4) $|z_N|_p \leq \frac{M_2}{h_N}$ gibt. Diese letzte Ungleichung aber zeigt, daß 3°) mit $c = 1 - \varepsilon$ erfüllt ist, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist. Was die übriggebliebene Bedingung 4°) betrifft, folgern wir aus (4) und $n = \left[\frac{N}{k} \right]$ die Relation

$$(5) \quad \frac{aN}{k} \log p + \mathfrak{M}_1 \leq \log h_N \leq \log \bar{h}_N \leq \frac{aN}{k} \log p + \mathfrak{M}_2,$$

wobei $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ zwei passende Konstante bedeuten. Diese ergibt

$$\frac{\sum_{v=1}^N \log h_v}{N \log \bar{h}_{N+1}} \geq \frac{\frac{a}{2k} N(N+1) + \mathfrak{M}_1 N}{\frac{a}{k} N(N+1) + \mathfrak{M}_2 N},$$

was uns das Erfülltsein von 4°) mit $\frac{1}{2} - \varepsilon$ für A zeigt, wobei $\varepsilon > 0$ beliebig klein ist.

Wenn wir nun zeigen, daß die Werte

$$a_{Nj} = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_N),$$

welche der obigen Interpolationsfolge entsprechen, den Bedingungen a), b₁) und b₂) vom Satz I genügen, wird dann der Satz I auf $f(z)$ anwendbar sein. Daraus wird sich die Algebraizität i. a. S. von $f(z)$ und damit der von uns gesuchte Widerspruch ergeben, womit unsere Behauptung bewiesen sein wird.

Dazu brauchen wir zunächst folgende Zwischenbetrachtung:

Da in der Folge (3) die Vielfachheiten j_N von z_N immer = 1 sind, handelt es sich hier nur um die Funktionswerte und nicht um die Werte der Ableitungen. D. h. es beschränkt sich hier die Menge a_{Nj} ($j = 0, 1, \dots, j_N - 1$) für jedes N auf das Element $a_{NO} = f(z_N)$. Folglich reduziert sich B_N auf den Nenner von a_{NO} , woraus $B_N \leq H_{NO}$ folgt. Wenn wir zur Abkürzung $H_{NO} = H_N$ setzen, dann reduzieren sich die Bedingungen b₁) und b₂) vom Satz I beide auf

$$b) \quad \log H_N < Q N \log h_N \left(Q < Q_0 \left(1, t, 1 - \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right) \right).$$

Wir brauchen jetzt nur a) und b) zu verifizieren: Aus der Voraussetzung für $f(z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) und den Gleichungen (2) und (3) folgt, daß $f(z_N)$ für jedes N eine algebraische Zahl von höchstens t -tem Grad ist, womit a) verifiziert wurde.

Um b) zu verifizieren, wollen wir H_N auf folgende Weise nach oben abschätzen :

In HS 9 setzen wir zunächst $F(x_1, x_2) \equiv x_1 - x_2$,

$$\beta_1 = f(z_i), \beta_2 = \sum_{v=0}^{n-1} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v.$$

Da hier $h_{\beta_1} = H_i$ und $h_{\beta_2} \leq np^{a \binom{n-1}{2} + b(n-1) + c} M_2^{n-1}$ sind, wird für genügend grosse n (äquivalenterweise für genügend grosse N)

$$h_{\text{Max}} = \text{Max} (h_{\beta_1}, h_{\beta_2}) \leq p^{\frac{an^2}{2} + o(n^2)}.$$

Ausserdem sind hier

$$u = 2, \quad d = 1, \quad K = 2 \quad \text{und} \quad g = [P(f(z_i)) : P] \leq t.$$

Also gilt nach HS 9 für die Höhe \widetilde{H}_N von

$$f(z_i) - \sum_{v=0}^{n-1} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v$$

die Abschätzung

$$\widetilde{H}_N \leq t! 4t \cdot 2^t \cdot p^{\frac{3at}{2} n^2 + o(n^2)} \quad (i = 1, \dots, k).$$

Die Höhe \widetilde{H}_N von $p^{-a \binom{n}{2} - bn} z_i^{-n}$ genügt der Ungleichung

$$\widetilde{H}_N \leq p^{a \binom{n}{2} + bn} M_2^n \leq p^{\frac{a}{2} n^2 + o(n^2)}.$$

Endlich, erhält man durch nochmalige Anwendung von HS 9 auf das Produkt

$$f(z_N) = p^{-a \binom{n}{2} - bn} z_i^{-n} \left[f(z_i) - \sum_{v=0}^{n-1} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v \right],$$

indem man $F(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2$,

$$\beta_1 = p^{-a \binom{n}{2} - bn} z_i^{-n}, \quad \beta_2 = f(z_i) - \sum_{v=0}^{n-1} p^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v$$

und $u = 2, d = 2, k = 1, g \leq t$ nimmt :

$$H_N \leq t! 2^t \cdot 2^{2t} (\text{Max} (\widetilde{H}, \widetilde{H}))^{6t}.$$

Durch Benutzung der obigen Abschätzungen von $\widetilde{H}_N, \widetilde{H}_N$ folgt hieraus :

$$H_N \leq \mathfrak{C}(t) p^{9at^2 n^2 + o(n^2)},$$

wobei $\mathfrak{C}(t)$ eine passende Funktion von t bedeutet. Da $n = \left[\frac{N}{k} \right]$ war, ergibt sich daraus

$$(6) \quad \log H_N \leq \frac{9at^2}{k^2} N^2 \log p + o(N^2)$$

womit die obere Abschätzung von (b) erzielt ist.

Nun können wir b) auf folgende Weise verifizieren:

Aus (5) und (6) erhält man

$$(7) \quad \frac{\log H_N}{\log h_N} \leq \frac{9t^2}{k} N + o(N).$$

Wenn nun die Zahl k am Anfang gemäß der Bedingung

$$(8) \quad k > \frac{9t^2}{Q_0(1, t, 1, \frac{1}{2})}$$

gewählt wurde, so ist die Bedingung b) erfüllt. Denn $\varepsilon > 0$ kann beliebig klein gewählt werden und $Q_0(s, t, c, A)$ ist eine stetige Funktion von ihren sämtlichen Argumenten.

Es kann nun

$$n_0(t) = \left[\frac{9t^2}{Q_0(1, t, 1, \frac{1}{2})} \right]$$

genommen werden.

Beispiel 2. Im komplexen Gebiet betrachten wir die Reihe

$$(1) \quad \vartheta(q, z) = \sum_{v=0}^{\infty} q^{a \binom{v}{2} + bv + c} z^v,$$

wo a, b, c ganz rational sind mit $a > 0$ und q einen rationalen Wert hat mit $0 < |q|_{\infty} < 1$. Nach der Cauchy-Hadamardschen Regel ist $f(z) = \vartheta(q, z)$ überall konvergent, folglich eine ganze transzendente Funktion. Wie bei dem Beispiel 1 genügt hier $f(z)$ folgender Funktionalgleichung:

$$(2) \quad f(q^{an} z) = q^{-a \binom{n}{2} - bn} z^{-n} \left[f(z) - \sum_{v=0}^{n-1} q^{a \binom{v}{2} + bv + c} z^v \right].$$

Wie beim vorigen Beispiel folgt nun hieraus, daß $f(q^{an} z)$ und $f(z)$ für rationale Werte von z denselben Grad haben. Wieder wie beim Beispiel 1 kann man auch hier eine Äquivalenzrelation in die Menge der rationalen Zahlen einführen, und zwar nach der Vorschrift: ${}_1z \sim {}_2z$, wenn eine ganze rationale Zahl v existiert mit ${}_1z = q^{av} {}_2z$. Die von dieser Äquivalenzrelation erzeugte Klasseneinteilung der rationalen Zahlen enthält unendlich viele Klassen. Denn irgend zwei verschiedene rationale Zahlen deren Zähler und Nenner sowohl mit dem Zähler als auch mit dem Nenner von q teilerfremd sind können nicht äquivalent sein und es gibt unendlich viele rationale Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Nun können wir die folgende Behauptung für die Funktion (1) formulieren:

Zu jeder vorgegebenen natürlichen Zahl t , gibt es eine ganze rationale Zahl $n_0 = n_0(q, t) \geq 0$, derart, daß die in (1) definierte Funktion $\vartheta(q, z)$ bei festem q für höchstens n_0 nicht-trivialen Klassen rationaler Zahlen Werte von höchstens t -tem Grad annimmt. Folglich, bei festem q , ist der Grad von $\vartheta(q, z)$ für unendlich viele Klassen rationaler Zahlen größer als t .

Für $(\frac{v}{2})$ und v^2 statt $a(\frac{v}{2}) + b v + c$, $t = 1$ und einige unten anzugebende Werte von q wurden früher von L. TSCHAKALOFF folgende schärfere Sätze gegeben (1):

I. «Wenn $q = \frac{r}{s}$, r, s ganz rational mit $r \neq 0$ und $|s|_\infty > |r|_\infty \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, nimmt

die Funktion $\sum_{v=0}^{\infty} q^{(\frac{v}{2})} z^v$ für jeden von Null verschiedenen rationalen Wert von z einen irrationalen Wert an.»

II. «Wenn q denselben Bedingungen wie in I genügt, nimmt die Funktion $\sum_{v=0}^{\infty} q^{v^2} z^v$

für jeden von Null verschiedenen rationalen Wert von z einen irrationalen Wert an.»

Beweis der Behauptung. Nehmen wir an, die Werte der Funktion (1) seien für $k > n_0(q, t)$ (der Wert von n_0 wird später angegeben) Klassen von t nicht übertreffenden Graden. Von jeder solchen Klassen wählen wir einen Vertreter, und mit diesen z_i ($i = 1, \dots, k$) bilden wir die Interpolationsfolge

$$(3) \quad z_N = q^{an} z_i \quad \left(\begin{array}{l} N = kn + i \\ 0 < i \leq k \end{array} \right) \quad (N = 1, 2, \dots)$$

Wir wollen zeigen, daß diese Folge und die ihr zugeordnete Folge $f(z_N)$ der Funktionswerte (Wir nehmen wiederum $f_N = 1$ für $N = 1, 2, \dots$) die Voraussetzungen des Satzes I erfüllen, woraus nach diesem Satz die Algebraizität i. a. S. von $f(z)$ folgen würde. Aber nach dem am Anfang dieses Beispiels Gesagten war $f(z)$ nicht algebraisch. Damit wird unsere Behauptung bewiesen sein.

Nun zeigen wir zunächst, daß die Folge z_N den am Anfang von § 2 gestellten Bedingungen 1°), 2°), 3°), 4°) genügt:

Das Erfülltsein von 1°) und 2°) ist klar ($s = 1$). Für 3°) setzen wir $q = \frac{u}{v}$, u, v ganz rational mit $(u, v) = 1$, $v > 0$. Da $|u|_\infty < v$ und die Anzahl von z_i endlich ($= k$) ist, folgt aus den evidenten Gleichungen

$$h_N = v^{an} + O(1) \quad \text{und} \quad n = \left[\frac{N}{k} \right]:$$

$$(4) \quad h_N = v^{\frac{a}{k} N} + O(1)$$

Andererseits ist laut (3):

$$(5) \quad \frac{1}{|z_N|_\infty} = \left(\frac{1}{|q|_\infty} \right)^{an + O(1)} = \left(\frac{v}{|u|_\infty} \right)^a \frac{N}{k} + O(1)$$

Aus (4) und (5) ersieht man das Erfülltsein der Bedingung 3°) mit

(1) L. Tschakaloff. Arithmetische Eigenschaften der unendlichen Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} x^v a^{\frac{v(v-1)}{2}}$ I. Math.

$$c = \frac{\log \frac{1}{|q|^\infty}}{\log v} - \varepsilon = 1 - \frac{\log |u|^\infty}{\log v} - \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$, beliebig klein) und dasjenige der Bedingung 4^o) mit $A = \frac{1}{2} - \varepsilon$.

Nun kommen wir zu den Voraussetzungen a), b₁) und b₂) des Satzes I:

Die Bedingung a) wird laut der Voraussetzung über z_i ($i = 1, 2, \dots, k$) und der Funktionalgleichung (2) erfüllt. b₁) und b₂) reduzieren sich, wie beim Beispiel 1, auf eine einzige Bedingung:

$$b) \quad \log H_N < Q \cdot N \log h_N, \quad Q < Q_0 \left(1, t, 1 - \frac{\log |u|^\infty}{\log v}, \frac{1}{2} \right)$$

Um b) zu verifizieren, setzen wir zunächst in (2) $z = z_i$ ($i = 1, \dots, k$) so daß wir für $f(z_N)$ die Relation

$$(6) \quad f(z_N) = q^{-a \binom{n}{2} - bn} z_i^{-n} \left[f(z_i) - \sum_{v=0}^{n-1} q^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v \right] \quad (i = 1, \dots, k)$$

erhalten. Dann bemerken wir, daß die Höhen der rationalen Zahlen

$$q^{-a \binom{n}{2} - bn} z_i^{-n} \quad \text{und} \quad \sum_{v=0}^{n-1} q^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v \quad (i = 1, \dots, k)$$

von der Form $v^{\frac{a}{2} n^2 + O(n)}$ sind. Danach setzen wir in Hilfssatz 9 $F(x_1, x_2, x_3) \equiv x_1(x_3 - x_2)$

$$(u = 3, d = 2), \quad \beta_1 = q^{-a \binom{n}{2} - bn} z_i^n, \quad \beta_2 = \sum_{v=0}^{n-1} q^{a \binom{v}{2} + bv + c} z_i^v, \quad \beta_3 = f(z_i).$$

Hiernach wird in HS 9: $k = 2$ und $g \leq t$. Da, nach dem eben Gesagten, außerdem

$$h_{Max} v^{\frac{a}{2} n^2 + O(n)} = v^{\frac{a}{2} \frac{N^2}{k^2} + O(N)}$$

gilt, folgern wir aus dem HS 9 die Abschätzung:

$$(7) \quad H_N \leq t! 4^t \cdot 2^{2t} h_{Max}^{8t} \leq V^{\frac{4at}{k^2} N^2 + O(N)}$$

für die Höhe H_N von $f(z_N)$. Endlich ergibt sich aus (4) und (7) für genügend große N

$$(8) \quad \frac{\log H_N}{N \log h_N} \leq \frac{4t}{k} + \varepsilon \quad (\varepsilon > 0, \text{ beliebig klein}).$$

Falls wir $n_0 = n_0(q, t)$ gleich am Anfang so gewählt hatten, daß die Ungleichung

$$(9) \quad k > \frac{4t}{Q_0 \left(1, t, 1 - \frac{\log |u|^\infty}{\log v}, \frac{1}{2} \right)}$$

erfüllt ist, wie z. B.

$$(10) \quad n_0 = \left[\frac{4t}{Q_0 \left(1, t, 1 - \frac{\log |u|^\infty}{\log v}, \frac{1}{2} \right)} \right],$$

zeigt uns (8) das Erfülltsein der Bedingung b). $f(z) = \vartheta(q, z)$ müßte also nach Satz I eine algebraische Funktion i. a. S. sein. Nach dem am Anfang Gesagten kann aber $\vartheta(q, z)$ nicht algebraisch sein. $\vartheta(q, z)$ darf also für höchstens $n_0 = n_0(q, t)$ Klassen algebraische Werte von t nicht übertreffenden Graden annehmen.

Als eine letzte Bemerkung, weisen wir darauf hin, daß in (10) gewähltes $n_0 = n_0(q, t)$ von q nur durch $\frac{\log |u|_\infty}{\log v}$ abhängt. Wenn z. B. q reziprok zu einer ganzen Zahl, d. h. $q = \pm \frac{1}{v}$ ist, so wird

$$n_0 = \left[\frac{4t}{Q_0 \left(1, t, 1, \frac{1}{2} \right)} \right],$$

also nur von t abhängig sein.

Da $\vartheta(q, z)$ im wesentlichen, auf die beiden von Tschakaloff untersuchten Reihen zurückgeführt werden kann, besteht das Interesse unserer Verallgemeinerung darin, daß sie nicht nur für $t = 1$, sondern für alle t und für alle nichttriviale q aus dem Konvergenzbereich der Reihe $\vartheta(q, z)$ (d. h. eigentlich für $0 < |q|_\infty < 1$; für die Grenzfälle $q = 0, 1$ erhalten wir $\vartheta(0, z) = 0$ und $\vartheta(1, z) = \frac{1}{1-z}$, in welchen Fällen n die Irrationalitätsuntersuchung trivial ist) behauptet wird.

§ 4. SATZ II

Wir betrachten hier folgende Interpolationsfolge mit parallelen Eigenschaften zu der von § 2:

- 1°) Die Glieder z_ν der Folge sind voneinander verschieden.
- 2°) Für jedes ν ist z_ν eine algebraische Zahl vom Grade s_ν ; es gibt eine konstante Zahl s , derart, daß $s_\nu \leq s$ ($\nu = 1, 2, \dots$) gilt.
- 3°) Es gibt ein Element ζ des p -adischen Gebiets und eine reelle Zahl $c > 0$, derart, daß für genügend große ν

$$|z_\nu - \zeta| \leq \frac{1}{h_\nu^c}$$

gilt.

- 4°) Es gibt eine Zahl $A > 0$, derart, daß für genügend große ν

$$\log h_\nu \geq A \log \bar{h}_{2\nu}$$

gilt.

Nun kommt der Wortlaut von

Satz II. Es seien eine Interpolationsfolge $\{z_\nu\}$ von obiger Art und eine im Punkte ζ regulär analytische Funktion $f(z)$ gegeben. Zu jedem Paar von positiven Zahlen t und γ_4 (mit außerdem ganz rationalen t) kann man zwei Zahlen $n_0 = n_0(t, \gamma_4, r | \{z_\nu\})$ und $n = n(t, \gamma_4, r | \{z_\nu\})$ finden, derart, daß $f(z)$ eine algebraische Funktion i. a. S. sein wird, falls in den Punkten z_ν ($\nu = n_0 + n + 1, \dots, n_0 + 2n$) folgende Bedingungen erfüllt sind (Hier bedeutet r eine positive Zahl, die so gewählt wird, daß $f(z)$ für $|z - \zeta| \leq r$ konvergiert):

$$a) \quad a_{vj} = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_v) \text{ algebraisch für } j=0,1, \dots \text{ und } [P(a_{v0}, a_{v1}, \dots, a_{vj}, \dots): P] \leq t,$$

$$b_1) \quad \log B_{vj} < \gamma_{\pm} j \log h_v \quad (j = 1, \dots)$$

$$b_2) \quad \text{Max}_{i=0,1, \dots, j-1} \log H_{vi} < \gamma_{\pm} j \log h_v \quad (j = 1, \dots)$$

Hier bedeutet B_{vj} den gemeinsamen Nenner von $a_{v0}, a_{v1}, \dots, a_{vj-1}$.

Umgekehrt jede im Punkte $z = \xi$ regulär analytische Funktion i. a. S. genügt, mit passenden t, γ_{\pm} , in jeder Interpolationsstelle mit genügend hohem Index den Bedingungen a), b₁) und b₂).

Beweis. Der Verlauf des Beweises ist sehr ähnlich demjenigen vom Satz I. Zunächst existiert hier, wie dort, eine solche Zahl $n_0 = n_0(r | \{z_v\})$, daß falls wir $z'_v = z_{n_0+v}$ setzen, die Bedingungen 1°), 2°), 3°), 4°) vom § 4 auch für $\{z'_v\}$ erfüllt, außerdem 3°) und 4°) von $v = 1$ an gültig sind und endlich die Ungleichung $|z'_v - \xi| < \frac{r}{8}$ von $v = 1$ ab gültig bleibt.

Genau wie beim Satz I bilden wir nun ein Polynom

$$(1) \quad \Phi_{n, j_0}(z) = \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l, m} c_{\lambda \mu} z^{\lambda} (f(z))^{\mu}$$

in $z, f(z)$, wo

$$(2) \quad \frac{1}{j!} \Phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ j = 0, 1, \dots, j_0-1 \end{array} \right)$$

sein soll. Wie wir unten zeigen wollen, die ganzen rationalen Zahlen

$$l \geq 0, m \geq 1 \quad \text{und} \quad c_{\lambda \mu} \left(\begin{array}{l} \lambda = 0, 1, \dots, l \\ \mu = 0, 1, \dots, m \end{array} \right)$$

als Funktionen von n und j_0 , so gewählt werden können, daß für genügend große n und j_0 das Polynom Φ_{n, j_0} in den Punkten $z_{n_0+n+1}, \dots, z_{n_0+2n}$ nicht nur mindestens von der Ordnung j_0 verschwindet, sondern es verschwinden in den nämlichen Punkten alle seine sukzessiven Ableitungen, d. h. es gilt

$$(3) \quad \frac{1}{j!} \Phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ j = 0, 1, \dots \end{array} \right)$$

für genügend große n und j_0 . (Ein expliziter Wert von n wird später angegeben.) Hieraus wird das identische Verschwinden von $\Phi_{n, j_0}(z)$ folgen, womit der direkte Teil des Satzes bewiesen werden wird.

Aus dem Gleichungssystem (2) ergibt sich folgendes lineares System für $c_{\lambda \mu}$:

$$(4) \quad \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l, m} c_{\lambda \mu} \cdot \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z^{\lambda} (f(z))^{\mu}) \Big|_{z=z'_v} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ j = 0, 1, \dots, j_0-1 \end{array} \right)$$

Wieder wie beim Satz I folgt aus dem System (4) das System

$$(5) \quad \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l,m} c_{\lambda\mu} L_{\lambda\mu}^{vj} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ j = 0, \dots, j_0-1 \end{array} \right)$$

mit ganzen Koeffizienten. Hier genügen die Koeffizienten

$$(6) \quad L_{\lambda\mu}^{vj} = A_v^{l'} B_{vj}^{m'} \cdot \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} (z^\lambda (f(z))^\mu) \Big|_{z=z'_v} = A_v^{l'-\lambda} B_{vj}^{m'-\mu} \cdot K_{\lambda\mu}^j(z'_v)$$

folgender Abschätzung :

$$(7) \quad \left| L_{\lambda\mu}^{vj} \right| \leq 2^{j_0+l+m} A_v^{l'} \left(\text{Max}_{j=0, \dots, j_0-1} B_{vj}' \right)^m \cdot h_v^{l'} \cdot \left(\text{Max}_{j=0, \dots, j_0-1} H_{vj}' \right)^m$$

($v = n+1, \dots, 2n$).

Da aus b₁) und b₂)

$$(8_1) \quad \text{Max}_{\substack{j=0, \dots, j_0-1 \\ v=n+1, \dots, 2n}} \log B_{vj}' < \gamma_4 j_0 \log \bar{h}_{2n} \quad \text{und}$$

$$(8_2) \quad \text{Max}_{\substack{j=0, \dots, j_0-1 \\ v=n+1, \dots, 2n}} \log H_{vj}' < \gamma_4 j_0 \log \bar{h}_{2n}$$

erhalten werden können, nimmt (7) mit Hilfe dieser Abschätzungen und von $A_v' \leq h_v' \leq \bar{h}_{2n}'$ die Form :

$$(9) \quad \left| L_{\lambda\mu}^{vj} \right| \leq 2^{j_0+l+m} \bar{h}_{2n}'^{2(l+\gamma_4 j_0 m)}$$

an. Nun nehmen wir n als so groß gewählt an, daß

$$(10) \quad \bar{h}_{2n} \quad , \quad \bar{h}_{2n}'^{\gamma_4} \geq 2$$

gilt. Unter Mitberücksichtigung von

$$2^{j_0+l+m} = 2^l \cdot 2^{j_0+m} \leq h_{2n}'^l \cdot h_{2n}'^{\gamma_4(j_0+m)} \leq h_{2n}'^l \cdot h_{2n}'^{2\gamma_4 j_0 m}$$

findet man jetzt

$$(11) \quad \left| L_{\lambda\mu}^{vj} \right| \leq \bar{h}_{2n}'^{4(l+\gamma_4 j_0 m)}$$

Nach (6) sind

$$L_{\lambda\mu}^{vj} \left(\begin{array}{l} j = 0, \dots, j_0-1 \\ \lambda = 0, \dots, l \\ \mu = 0, \dots, m \end{array} \right)$$

dem Körper $\mathfrak{K}'_v = P(z'_v, f(z'_v), \dots, \frac{1}{(j_0-1)!} f^{(j_0-1)}(z'_v))$ gehörende ganze algebraische

Zahlen. Nach HS 5 hat der Körper \mathfrak{K}'_v eine Ganzheitsbasis $\omega_{v_1}, \omega_{v_2}, \dots, \omega_{v_{\sigma_v}}$ mit

$$(12) \quad \left| \omega_{v\sigma} \right| \leq C_1(\sigma_v) \left(\text{Max}(h_v', H_{v_0}', \dots, H_{v, j_0-1}') \right)^{C_2(\sigma_v)} \quad (\sigma=1, 2, \dots, \sigma_v),$$

wobei $[\mathfrak{K}'_v : P] = \sigma_v$ gesetzt wurde. Aus 2^o) und der Bedingung a) vom § 4 ergibt sich

$$(13) \quad \sigma_v \leq st \quad (v = n+1, \dots, 2n).$$

Laut (8₂) ist $\text{Max}(H'_v, H'_{v_0}, \dots, H'_{v, j_0-1}) \leq \text{Max}(\bar{h}'_{2n}, \bar{h}'_{2n} \gamma_4^{j_0})$.

Wenn wir jetzt j_0 so einschränken, daß

$$(14) \quad j_0 \geq \frac{1}{\gamma_4}$$

gilt, nimmt die Abschätzung (12) die Form

$$(15) \quad \left| \overline{\omega_{v\sigma}} \right| \leq C_1(st) \bar{h}'_{2n} \gamma_4^{C_2(st)j_0} \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ \sigma = 1, 2, \dots, \sigma_v \end{array} \right)$$

an. Nun sei

$$(16) \quad L_{\lambda\mu}^{vj} = \sum_{\sigma=1}^{\sigma_v} L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \omega_{v\sigma} \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ j = 0, \dots, j_0-1 \\ \lambda = 0, \dots, l \\ \mu = 0, \dots, m \end{array} \right)$$

die Darstellung der zu \mathfrak{K}'_v gehörenden ganzen algebraischen Zahl $L_{\lambda\mu}^{vj}$ nach der oben angegebenen Ganzheitsbasis $\omega_{v_1}, \omega_{v_2}, \dots, \omega_{v\sigma_v}$ desselben Körpers. Mit Hilfe von (11), (13) und (15) ergibt sich aus dem HS 6 die folgende Abschätzung für die ganzen rationalen Koeffizienten $L_{\lambda\mu\sigma}^{vj}$:

$$(17) \quad \left| L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \right|_{\infty} \leq ((st)!)^2 (C_1(st))^{2st} \cdot \bar{h}'_{2n}{}^{2st C_2(st) \gamma_4 j_0} \cdot \bar{h}'_{2n}{}^{4(l+\gamma_4 j_0 m)}$$

Da $m \geq 1$ gewählt werden soll, erhalten wir hieraus

$$(18) \quad \left| L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} \right|_{\infty} \leq C_4(st) \bar{h}'_{2n}{}^{4(l+\gamma_4 C_3(st)j_0 m)}$$

wobei $1 + \sigma C_2(\sigma) = C_3(\sigma)$ und $(\sigma!)^2 (C_1(\sigma))^{2\sigma} = C_4(\sigma)$ gesetzt wurde.

Wenn wir jetzt, genau wie beim Satz I, (16) in (5) einsetzen und die Koeffizienten von $\omega_{v_1}, \omega_{v_2}, \dots, \omega_{v\sigma_v}$ in jeder Gleichung gleich Null setzen, erhalten wir das folgende, zu (5) äquivalente System mit ganzen rationalen Koeffizienten:

$$(19) \quad \sum_{\lambda, \mu=0}^{l, m} L_{\lambda\mu\sigma}^{vj} c_{\lambda\mu} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, n+2, \dots, 2n \\ \sigma = 1, 2, \dots, \sigma_v \\ j = 0, \dots, j_0-1 \end{array} \right).$$

Hier ist die Anzahl der Unbekannten $c_{\lambda\mu}$ gleich $(l+1)(m+1)$ und die Anzahl der

Gleichungen ist gleich $j_0 \sum_{v=n+1}^{2n} \sigma_v \leq n j_0 st$. Wenn wir nun

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} l = \left[\sqrt{2st C_3 \gamma_4 n j_0} \right] \\ m = \left[\sqrt{\frac{2stn}{C_3 \gamma_4}} \right] \end{array} \right.$$

wählen, wird $(l + 1)(m + 1) > 2nstj_0$, d. h. die Anzahl der Unbekannten wird mehr als die doppelte Gleichungsanzahl. Bei dieser Wahl von l, m wird außerdem die Grössenordnung der rechten Seite von (18) möglichst niedrig. Wenn wir darüber hinaus n so gewählt hatten, daß

$$(21) \quad n \geq \frac{C_3(st) \cdot \gamma_4}{2st}$$

gültig ist, wird $m \geq 1$ (wie verlangt wurde). Wenn wir nun auf das System (19) den Spezialfall des Siegeischen Hilfssatzes (HS 4) anwenden, erschen wir, daß dieses System für die Unbekannten $c_{\lambda\mu}$ eine nichttriviale Lösung hat, welche folgenden Ungleichungen genügt:

$$(22) \quad |c_{\lambda\mu}|_\infty \leq (l + 1)(m + 1) C_4(st) \bar{h}_{2n}^{4(l + \gamma_4 C_3(st)j_0 m)}$$

Mit Hilfe von

$$(23) \quad (l + 1)(m + 1) \leq 2^{l+m} \leq \bar{h}_{2n}^{(l + \gamma_4 C_3(st)j_0 m)}$$

folgt hieraus die Ungleichungen

$$(24) \quad |c_{\lambda\mu}|_\infty \leq C_4(st) e^{5(l + \gamma_4 C_3(st)j_0 m) \log \bar{h}'_{2n}}$$

Endlich erhält man aus (24) unter Mitberücksichtigung von (20) folgende obere Abschätzung für $|c_{\lambda\mu}|_\infty$:

$$(25) \quad |c_{\lambda\mu}|_\infty \leq C_4(st) e^{10\sqrt{2s} \sqrt{C_3 \gamma_4 n j_0} \log \bar{h}'_{2n}}$$

Wir wollen nun zeigen, daß das Polynom $\phi_{n, j_0}(z)$ den Bedingungen (3) genügt, wenn wir n und j_0 genügend groß wählen und l, m und $c_{\lambda\mu}$ als Funktionen von n und j_0 wie oben nehmen. Zu diesem Zweck wollen wir einen, von demjenigen von Satz I etwas abweichenden, Induktionsschluß führen:

Nehmen wir an, daß für $j_1 \geq j_0$

$$(26) \quad \frac{1}{j!} \phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n + 1, \dots, 2n \\ j = 0, \dots, j_1 - 1 \end{array} \right)$$

gilt, aber für ein v_0 mit $n + 1 \leq v_0 \leq 2n$

$$(27) \quad \frac{1}{j_1!} \phi_{n, j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \neq 0$$

ist. Es wird gezeigt werden, daß für genügend große n und j_0 (26) und (27) im Widerspruch stehen und folglich für dieselben n und j_0 die Gleichungen

$$\frac{1}{j!} \phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n + 1, \dots, 2n \\ j = 0, \dots, j_1 - 1 \end{array} \right)$$

das Verschwinden von $\frac{1}{j!} \phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v)$ auch für $v = n + 1, \dots, 2n$ und $j = j_1$ nach sich ziehen.

Da außerdem nach (2) $\frac{1}{j!} \phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0$ für $v = n + i, \dots, 2n$ und $j = 0, \dots, j_0 - 1$ ist, wird nach dem Induktionsprinzip die Gültigkeit von (3) und folglich die Richtigkeit des Satzes II gesichert sein.

Um den Widerspruch zwischen (26) und (27) zu zeigen, bilden wir die ganze algebraische Zahl

$$(28) \quad \psi_{j_1}(z'_{v_0}) = \frac{1}{j_1!} \Phi_{n, j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \cdot A_{v_0}^{r_1} B_{v_0 j_1}^{r_1 m}.$$

Nach (26) ist $\psi_{j_1}(z'_{v_0}) \neq 0$. In der Schreibweise von (6) ist

$$(29) \quad \psi_{j_1}(z'_{v_0}) = \sum_{\lambda, \mu=0,0}^{l, m} c_{\lambda, \mu} L_{\lambda, \mu}^{v_0, j_1+1}.$$

Für die in dieser Formel stehenden $L_{\lambda, \mu}^{v_0, j_1+1}$ findet man wie in (11) und unter denselben Bedingungen wie dort folgende obere Schranke:

$$(30) \quad \left| L_{\lambda, \mu}^{v_0, j_1+1} \right| \leq \bar{h}_{2n}^{4(l+\gamma_1(j_1+1)m)} \leq \bar{h}_{2n}^{8\sqrt{2st} C_8 \gamma_1 n (j_1+1)}.$$

Setzen wir nun, wieder wie beim Satz I, (23), (25) und (30) in (29) ein, so erhalten wir unter Mitberücksichtigung von $j_1 \geq j_0$

$$(31) \quad \left| \overline{L_{\lambda, \mu}^{v_0, j_1+1}} \right| \leq C_4(st) e^{20\sqrt{2st} C_8 \gamma_1 n (j_1+1) \log \bar{h}_{2n}}.$$

Mit Hilfe von (13) und (31) findet man aus

$$(32) \quad \left| N(\psi_{j_1}(z'_{v_0})) \right|_{\infty} \leq \left| \overline{\psi_{j_1}(z'_{v_0})} \right|_{\sigma_{v_0}} \quad \text{die Abschätzung}$$

$$\left| N(\psi_{j_1}(z'_{v_0})) \right|_{\infty} \leq (C_4(st))^{st} e^{20\sqrt{2st} C_8 \gamma_1 n (j_1+1) \log \bar{h}_{2n}}.$$

Wie es bei Satz I erläutert wurde, ist $N(\psi_{j_1}(z'_{v_0}))$ eine ganze rationale Zahl. Wenn man andererseits das \mathfrak{L} des HS 8 mit der rechten Seite von (25) ersetzt und

$$N = nj_1 + 1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_{j_1} = z'_{n+1},$$

$\zeta_{j_1+1} = \dots = \zeta_{2j_1} = z'_{n+2}, \dots, \zeta_{(n-1)j_1+1} = \dots = \zeta_{nj_1} = z'_{2n}$ und $\zeta_{nj_1+1} = z'_{v_0}$ setzt, erhält man

$$(33) \quad \left| \frac{1}{j_1!} \Phi_{n, j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \right| \leq C_4(st) e^{10\sqrt{2st} C_8 \gamma_1 n j_0 \log \bar{h}_{2n}} \cdot \gamma_1^l \gamma_2^m \gamma^{nj_1+1} \cdot \prod_{\substack{v=n+1 \\ v \neq v_0}}^{2n} |z'_v - z'_{v_0}|^{j_1}$$

Nach dem in HS 8 Gesagten ist hier

$$\gamma_1 = 4 \max(1, |\zeta|, r),$$

$$\gamma_2 = 4 \max\left(1, |f(\zeta)|, |f'(\zeta)|r, \dots, \left| \frac{f^{(j)}(\zeta)}{j!} \right| r^j, \dots\right),$$

$$\gamma_3 = \max\left(1, \frac{8}{r}\right).$$

Außerdem sind n und j_0 von j_1 unabhängig. Aus der Eigenschaft 3^o) (am Anfang von § 4) von $\{z_v\}$ ergibt sich

$$(34) \quad |z'_{v_0} - z'_v| \leq |z'_{v_0} - \zeta| + |z'_v - \zeta| \leq \frac{1}{\underline{h}_{v_0}{}^{c'}} + \frac{1}{\underline{h}_v{}^{c'}} \leq \frac{2}{\underline{h}_n{}^{c'}}.$$

Mit Hilfe von (20), (34) und $j_1 \geq j_0$ wird (33) zu

$$(35) \quad \left| \frac{1}{j_1!} \Phi_{n,j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \right| \leq C_4(st) \cdot e^{10 \sqrt{2st C_3 \gamma_4 n} (j_1+1) \log \frac{\bar{h}'_{2n}}{h_n}} \cdot \gamma_1^{\sqrt{2st C_3 \gamma_4 n} (j_1+1)} \cdot \gamma_2^{\sqrt{\frac{2stn}{C_3 \gamma_4}}} \cdot \gamma_3^{nj_1+1} \cdot \left(\frac{2}{\underline{h}_n{}^{c'}} \right)^{(n-1)j_1}.$$

Wenn wir (35) etwas vereinfachen und n so groß wählen, daß

$$(36) \quad \bar{h}'_{2n} \geq \gamma_1$$

gilt, erhalten wir

$$(37) \quad \left| \frac{1}{j_1!} \Phi_{n,j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \right| \leq \mathfrak{C}(n) e^{11 \sqrt{2st C_3 \gamma_4 n} (j_1+1) \log \frac{\bar{h}'_{2n}}{h_n}} \cdot 2^{(n-1)j_1} \gamma_3^{nj_1} \underline{h}_n^{-c(n-1)j_1}.$$

Hier ist $\mathfrak{C}(n)$ von j_1 unabhängig. Da nach der Eigenschaft 4^o) am Anfang des § 4 $\underline{h}'_n \geq \bar{h}'_{2n}{}^A$ gilt, wird (37) zu

$$(38) \quad \left| \frac{1}{j_1!} \Phi_{n,j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \right| \leq \mathfrak{C}(n) e^{11 \sqrt{2st C_3 \gamma_4 n} (j_1+1) \log \frac{\bar{h}'_{2n}}{h_n}} \cdot (2\gamma_3)^{nj_1} \cdot e^{-cA(n-1)j_1 \log \frac{\bar{h}'_{2n}}{h_n}}.$$

Wählen wir nun n zusätzlich der obigen Einschränkungen noch so, daß

$$(39) \quad \bar{h}'_{2n} \geq (2\gamma_3)^{\frac{2n}{(n-2)cA}}$$

gilt, so wird $(2\gamma_3)^{nj_1} \leq \bar{h}'_{2n}{}^{\frac{n-2}{2}cAj_1}$, was durch Einsetzung in (38) gibt

$$(40) \quad \left| \frac{1}{j_1!} \Phi_{n,j_0}^{(j_1)}(z'_{v_0}) \right| \leq \widetilde{\mathfrak{C}}(n) e^{(11 \sqrt{2st C_3 \gamma_4 n} - \frac{1}{2}cAn) j_1 \log \frac{\bar{h}'_{2n}}{h_n}}.$$

Dabei bedeutet $\widetilde{\mathfrak{C}}(n)$, so wie im folgenden $\widetilde{\mathfrak{C}}(n)$, $\widetilde{\widetilde{\mathfrak{C}}}(n)$, $\widetilde{\widetilde{\widetilde{\mathfrak{C}}}}(n)$, eine passende, von j_1 unabhängige Funktion von n .

Hieraus, wie bei Satz I, erhält man folgende Abschätzung für (28):

$$(41) \quad \left| \psi_{j_1}(z'_{v_0}) \right| \leq \widetilde{\mathfrak{C}}(n) e^{(13 \sqrt{2st C_3 \gamma_4 n} - \frac{cA}{2}n) j_1 \log \frac{\bar{h}'_{2n}}{h_n}}.$$

Nun können wir $|N(\psi_{j_1}(z'_{v_0}))|$ nach beiden Seiten leicht abschätzen:

Wie bei Satz 1 folgert man aus

$$(42) \quad |N(\psi_{j_1}(z'_{v_0}))| \leq |\psi_{j_1}(z'_{v_0})| \cdot \left| \overline{\psi_{j_1}(z'_{v_0})} \right|^{\sigma_v - 1}$$

mit Hilfe von (41), (31) und (13)

$$(43) \quad \left| N(\psi_{j_1}(z'_{v_0})) \right| \leq \tilde{\mathfrak{C}}(n) e^{j_1 (20 st \sqrt{2 st C_u \gamma_4} - \frac{cA}{2} \sqrt{n})} \sqrt{n} \log \tilde{h}'_{2n},$$

womit die gewünschte obere Abschätzung gewonnen worden ist. Für die untere Abschätzung findet man, wieder wie bei Satz I, mit Hilfe von (32) aus der Ungleichung

$$(44) \quad \left| N(\psi_{j_1}(z'_{v_0})) \right| \geq \frac{1}{\left| N(\psi_{j_1}(z'_{v_0})) \right|_{\infty}}$$

folgende Ungleichung

$$(45) \quad \left| N(\psi(z'_{v_0})) \right| \geq \tilde{\mathfrak{C}}(n) e^{-j_1 (20 st \sqrt{2 st C_u \gamma_4})} \sqrt{n} \log \tilde{h}'_{2n}.$$

Es folgt nun aus (43) und (45)

$$(46) \quad 1 \leq \tilde{\mathfrak{C}}(n) e^{j_1 (40 st \sqrt{2 st C_u \gamma_4} - \frac{cA}{2} \sqrt{n})} \sqrt{n} \log \tilde{h}'_{2n}.$$

Es sei nun n gleich am Anfang so gewählt worden, daß (10), (21), (36), (39) und

$$(47) \quad n > \frac{12800 s^3 t^3 C_u \gamma_4}{c^2 A^2}$$

erfüllt sind. Dieses n hängt nur von der Interpolationsfolge $\{z_v\}$ und von t, γ_4, r .

(46) kann auch wie folgt geschrieben werden :

$$(48) \quad 0 \leq j_1 \left(40 st \sqrt{2 st C_u \gamma_4} - \frac{cA}{2} \sqrt{n} \right) \sqrt{n} \log \tilde{h}'_{2n} + \log \tilde{\mathfrak{C}}(n).$$

Nach (47) ist der Koeffizient von j_1 in (46) negativ. Nun können wir j_0 so groß gewählt denken, daß für $j_1 \geq j_0$ die rechte Seite von (48) negativ wird. In diesem Falle enthält (48) einen Widerspruch. Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn die Gültigkeit von (26) die Nichtgültigkeit von (27) zur Folge hat, d. h. für jedes v ($n+1 \leq v \leq 2n$) und jedes $j_1 \geq j_0$ muß aus

$$\frac{1}{j!} \Phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} v = n+1, \dots, 2n \\ j = 0, \dots, j_1 - 1 \end{array} \right),$$

die Gleichungen $\frac{1}{j!} \Phi_{n, j_0}^{(j)}(z'_v) = 0$ ($v = n+1, \dots, 2n$) folgen.

So wird nach dem früher Gesagten der Induktionsschluß und damit der Beweis des Satzes II zu Ende gebracht.

Beweis der Umkehrung des Satzes II. Wie es beim Beweise der Umkehrung des Satzes I gesagt wurde, ist die Verifikation von a) aus İÇEN [2] sehr leicht. Für b₁) und b₂) bemerken wir, daß laut dem für İÇEN [2] (72) Gesagten

$$(49) \quad \log B_{v,j} \leq c_3 j \log h_v,$$

und laut İÇEN [2] (88)

$$(50) \quad \log H_{v,j} \leq c_7 j \log h_v$$

gelten, woraus b₁) und b₂) folgen, wenn nur $\gamma_4 > c_3, c_7$ genommen wird.

Beispiel 1) Nehmen wir $z_v = \frac{1}{a^v}$ ($a > 1$, ganz rational). Hier sind die Bedingungen 1°), 2°), 3°), 4°) am Anfang vom § 4 mit $s = 1$, $h_v = a$, $c = 1$, $A = \frac{1}{2}$ verifiziert. n_0 muß der Bedingung $\frac{1}{a^{n_0+1}} < \frac{r}{8}$ genügen; man kann folglich

$$n_0 = \text{Max} \left(0, \left[\frac{\log \frac{8}{r}}{\log a} \right] \right)$$

nehmen. Für n geben die Ungleichungen (10), (21), (36) und (39) unter Mitberücksichtigung der nach (33) gegebenen Werte von γ_1 und γ_u folgende Bedingung:

$$(51) \quad n_0 + n \geq \text{Max} \left(\frac{1}{2} \frac{\log 2}{\log a}, \frac{\log 2}{2 \gamma_1 \log a}, \frac{C_3 \gamma_1}{2t}, \frac{[\log 4 \text{Max}(1, r)]}{2 \log a}, \right. \\ \left. \frac{2 \log \left[2 \text{Max} \left(1, \frac{8}{r} \right) \right]}{\log a} + 2 \right) = U(t, \gamma_1, r).$$

Hier ist $C_3 = C_3(t) = 1 + t C_2(t) = 1 + t(t-1) \left(\frac{\log t}{\log 2} + 1 \right)$.

Wenn man jetzt (51) mit (47) verbindet, kann man endlich

$$n = \left[\text{Max} (0, U(t, \gamma_1, r) - n_0, 51200 t^3 c_3 \gamma_1) \right] + 1$$

nehmen.

Beispiel 2) Für $z_v = \frac{1}{v}$ erhält man ein geringfügig allgemeiner Satz als SCHNEIDER [2], Satz 1 und 2, insofern dieser Spezialfall unseres Satzes II nicht nur im komplexen, sondern auch im p -adischen Gebiet gültig ist. Dafür sind aber die aus unserem Satz II zu errechnenden Schranken für n_0 und n nicht so gut (d. h. nicht so klein) als diejenigen bei SCHNEIDER [2]. Deswegen ist hier davon abgesehen, dieselben explizit anzugeben. Der Schwerpunkt beider Sätze liegt ohnehin auf der Endlichkeit der Zahl n .

Literaturverzeichnis

- [1] Th. SCHNEIDER : *Zur Charakterisierung der algebraischen und der rationalen Funktionen durch ihre Funktionswerte*, Acta Math. 86, 57-70 (1951).
- [2] Th. SCHNEIDER : *Zur Charakterisierung algebraischer Funktionen mit Hilfe des Eisensteinschen Satzes*, Math. Zeitschr. 60, 98-108 (1954).
- [3] O. Ş. İÇEN : *Eine Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitätskriterien ins p -adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p -adischen*, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 198, 28-55 (1957).
- [4] O. Ş. İÇEN : *Eine weitere Verallgemeinerung eines Schneiderschen Algebraizitätskriteriums*, Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul. Série A, 21, 155-187 (1956).

ÖZET

$a_{\lambda\mu}$ rasyonel tam sayılar olmak üzere $\sum_{\lambda,\mu=0,0}^{l,m} a_{\lambda\mu} z^\lambda w^\mu = 0$ şeklinde bir denklemi idantik

olarak lahkik eden $w = f(z)$ analitik fonksiyonuna aritmetik manada cebri fonksiyon denir. Burada $w = f(z)$ 'in hem tarif, hem de değer bölgeleri y (kompleks alana da diyeceğimiz) kompleks sayılar cismine, yahut p -adik alan diyeceğimiz, rasyonel sayılar cisminin kendisinin bir p -adik değerlendirmesine göre perfekt ve ayrıteten cebri kapalı olan cn küçük üst cismine ait olarak alınacaktır. Herhangi bir alanda alınabilen analitik (yani kuvvet serisine açılabilen) bir $w = f(z)$ fonksiyonunun aritmetik manada cebri olabilmesi için fonksiyonun (ve icabında türevlerinin) $f(z)$ 'in tarif bölgesine ait bir interpolasyon dizisi için aldığı değerler cinsinden SCHNEIDER (1951) tarafından kompleks alanda verilen ve sonra müellifin iki travayunda (1956-57) genişletilip p -adik alana nakledilerek bazı p -adik transandans ispatlarına tatbik olunan bir kriteriyum bu travayın Teorem I (§2)'inde daha da genişletilmekte ve sonra

p -adik alanda $\sum_{v=0}^{\infty} p^a \binom{v}{2} + bv + c z^v$ ($a > 0$, b, c tam rasyonel, p asal sayı) ve komp-

leks alanda $\sum_{v=0}^{\infty} q^a \binom{v}{2} + bv + c z^v$ (a, b, c yukarıki gibi, $0 < |q| < 1$ ve rasyonel) fonk-

siyonlarının z^v 'in rasyonel değerlerine tekabül eden değerlerinin irrasyonelliğinin tetkikine tatbik olunmaktadır (§3 Misal 1, 2) Daha sonra Teorem II (§4) te ise, SCHNEIDER'in 1954 te kompleks alanda verdiği, aritmetik manada cebri fonksiyonların EISENSTEIN Teoreminin yardımıyla karakterizasyonu tamim edilmekte ve aynı zamanda p -adik alana teşmil edilmektedir.

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL, TÜRKİYE

(Manuskript eingegangen am 1. Oktober 1968)

Berichtigung

Die Formel an der 6. Zeile der Seite 9 soll wie folgt lauten :

$$\left| \frac{\Phi(z)}{(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_N)} \right| \leq \mathfrak{L} \gamma_1^l \gamma_2^m \gamma_3^N$$