ÜBER EINE VERALLGEMEINERUNG DES DIRICHLETSCHEN SATZES [*]

Ö. ÇELİK

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird man versuchen mit Hilfe der arithmetisch - linearen Transformationen den Dirichletschen Satz auf normierte Polynome des Körpers der rationalen Funktionen vom endlichen Koeffizientenkörper und im zweiten auf ganze Divisoren des algebraischen Funktionenkörpers über einem Galoiskörper zu verallgemeinern

K. YAMAMOTO [1] hat den Dirichletschen Satz mittelst arithmetisch - linearen Transformationen bewiesen : Es gibt in einer arithmetischen Progression

$$a + bn \quad ; \quad (a, b) = 1 \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

unendlich viele Primzahlen. Sein Verfahren läßt sich auf die ganzen Divisoren des algebraischen Funktionenkörpers über einem Galoiskörper anwenden. Er ist der Überzeugung, daß man den Grundgedanken seiner Arbeit auf den algebraischen Zahlenkörper ausdehnen kann, indem man statt ganzer Zahlen ganze Ideale benutzt.

ERSTES KAPITEL

1. Arithmetisch - lineare Transformationen.

Die arithmetisch - lineare Transformation läßt sich, durch eine komplexe Funktion - deren Argumente nicht negative reelle Zahlen sind und die im Intervall [0,1) verschwindet - und eine komplexe arithmetische Funktion - die nur für die natürlichen Zahlen definiert ist - auf folgende Weise erklären :

$$S_\alpha f(x) = \sum_n \alpha(n) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

wobei f eine komplexe -, α eine komplexe arithmetische Funktion, x eine positive reelle - und n eine natürliche Zahl ist.

Die Menge T der arithmetisch-linearen Transformationen und die Menge A der komplexen arithmetischen Funktionen bilden zwei verschiedene Algebren über dem Körper der komplexen Zahlen.

[*] Meinem verehrten Lehrer Herrn Ord. Prof. Dr. CAHİT ARF sei hier mein besonderer Dank ausgesprochen für seine wertvolle Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit.

[1] Theory of arithmetic linear transformations and its application to an elementary proof of Dirichlet's theorem, Journal of the math. soc. of Japan, 7, Supp., Dec., (1955).

Die durch $\alpha \to S_\alpha$ definierte, umkehrbar eindeutige Abbildung von der Algebra A auf die T ist ein Isomorphismus, während die Multiplikation nicht erhalten bleibt, sondern die gewöhnliche Multiplikation zur konvolutische übergeht und umgekehrt d. h.

$$S_{\alpha \circ \beta} = S_\alpha S_\beta \quad , \quad S_{\alpha\beta} = S_\alpha \circ S_\beta \, .$$

Nach beiden Multiplikationen gelten das assoziative - und kommutative Gesetz. In A kann man bezüglich der beiden Multiplikationen zwei verschiedene Einseiemente definieren :

(a) $i \; ; \; i(n) = 1$: Das Einselement bezüglich gewöhnlicher Multiplikation

(b) $\varepsilon \; ; \; \varepsilon(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad n \neq 1 \end{cases}$: Das Einselement bezüglich konvolutischer Multiplikation, wobei n die natürlichen Zahlen durchläuft. Es gilt $\varepsilon = i_\circ \mu$, wo μ Möbiussche Funktion ist :

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ein Primzahlquadrat enthält} \\ (-1)^r & \text{falls } n \text{ aus } r \text{ verschiedenen Primzahlen zusammengesetzt ist,} \\ & \text{speziell } \mu(1) = 1 \text{ für } r = 0 \, . \end{cases}$$

2. Im ersten Kapitel dieser Arbeit wird man versuchen. mit Hilfe der arithmetisch linearen Transformationen den Dirichletschen Satz auf normierte Polynome - deren höchste Koeffiziente 1 sind - eines Körpers der rationalen Funktionen vom endlichen Koeffizientenkörper Ω zu verallgemeinern. In diesem Zuzammenhang werden wir die im Körper der rationalen Zahlen vorkommenden Definitionen und Begriffe und ihre im Körper der rationalen Funktionen entsprechenden auf folgende Weise zusammenstellen :

Komplexe arithmetische Funktionen im Körper der rationalen Zahlen.	Komplexe arithmetische Funktionen im Körper der rationalen Funktionen.
Komplexe Funktionen, die für reelles x aus $[0, +\infty)$ erklärt sind und die über $[0,1)$ verschwinden.	Komplexe Funktionen, die für rationale Funktionen erklärt sind und die für rationale Funktionen negativen Grades verschwinden.

A : Die Menge der komplexen arithmetischen Funktionen.

F : Die Menge der komplexen Funktionen.

Die arithmetische Funktion α läßt sich in F einbetten, indem sie für $x \leq 0$ und nicht ganze Zahlen verschwindet.	Die arithmetische Funktion α läßt sich in F einbetten, indem sie für nicht ganzrationale Funktionen verschwindet.
x : Reelle Größe und Argument der komplexen Funktionen.	$E(z) = q^{g(z)}$: Reelle Größe, wobei q die Ordnung des Koeffizientenkörpers und $g(z)$ der Grad der rationalen Funktion z ist.
Mit $\alpha \in A$, $f \in F$, der reellen x und der natürlichen Zahl n läßt sich die Transformation S_α auf folgende Weise erklären : $$(S_\alpha f)(x) = \sum_n \alpha(n) f\left(\frac{x}{n}\right) .$$ Dann ist $S_\alpha f \in F$.	Mit $\alpha \in A$, $f \in F$, der rationalen Funktion z und dem normierten Polynom U läßt sich die Transformation S_α auf folgende Weise erklären: $$(S_\alpha f)(z) = \sum_U \alpha(U) f\left(\frac{z}{U}\right) .$$ Dann ist $S_\alpha f \in F$.

Einige Eigenschaften der arithmetisch-linearen Transformationen

Es sei ϑ eine komplexe Zahl, $\alpha, \beta, \gamma \in A$ und $f \in F$. Dann gilt

$$S_{\vartheta\alpha} f = S_\alpha \vartheta f = \vartheta S_\alpha f$$

$$S_\alpha f + S_\beta f = S_{\alpha+\beta} f$$

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha \qquad \text{(Kommutatives Gesetz)}$$

$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \qquad \text{(Assoziatives Gesetz)}$$

$$\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma \qquad \text{(Distributives Gesetz),}$$

indem man $\alpha \circ \beta$ durch die Beziehung

$$S_{\alpha\circ\beta} f = S_\alpha S_\beta f$$

definiert.

ε sei für die normierten Polynome U auf folgende Weise definiert:

$$\varepsilon(U) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad U = 1 \\ 0 & \text{falls} \quad U \neq 1 \end{cases}$$

Daraus folgt, daß ε ein Einselement des kommutativen Ringes A mit beiden Verknüpfungen $+ , \circ$ ist. i sei für die normierten Polynome U auf folgende Weise definiert:

$$i(U) = 1 .$$

Daraus folgt, daß i ein Einselement des kommutativen Ringes A mit beiden Verknüpfungen $+ , \cdot$ ist.

Die Möbiussche Funktion μ wird für die normierten Polynome folgendermaßen definiert:

$$\mu(U) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } P_i^2 \mid U \text{ für ein } P_i \\ (-1)^r & , \text{ falls } U = P_1 \dots P_r \text{ (also } U \text{ quadratfrei)} \\ 1 & , \text{ falls } U = 1 \text{ ist,} \end{cases}$$

wo $P_1, \dots, P_r$ die verschiedenen normierten Primfaktoren des normierten Polynoms U. Daraus folgt $i \circ \mu = \varepsilon$.

L sei eine durch $L(n)=\log n$ definierte Funktion, während log eine durch	L sei eine durch $L(U)=g(U)$ definierte Funktion, während log eine durch
$\log x = \begin{cases} \log x & \text{falls } x \geq 1 \\ 0 & \text{falls } x \in [0,1) \end{cases}$	$\log z = \begin{cases} g(z) & \text{falls } g(z) \geq 0 \\ 0 & \text{falls } g(z) < 0 \end{cases}$
definierte Funktion bedeuten soll.	definierte Funktion bedeuten soll.

Damit ergibt sich $L \in A$, $\log \in F$. Für $\alpha, \beta \in A$ gilt die Beziehung

$$L(\alpha \circ \beta) = (L \cdot \alpha) \circ \beta + \alpha \circ (L \cdot \beta).$$

Für reelle Zahl $x > 0$, $f \in F$, $\alpha \in A$ besteht die Formel	Für rationale Funktion z , $\alpha \in A$, $f \in F$ besteht die Formel
(2.1) $\log x\, S_\alpha f(x) = S_{L\alpha} f(x) + S_\alpha \log x\, f(x)$.	(2.1) $\log z\, S_\alpha f(z) = S_{L\alpha} f(z) + S_\alpha \log z\, f(z)$.
Λ wird auf folgende Weise definiert:	Λ wird auf folgende Weise definiert:
$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{falls } n = p^e, \\ 0 & \text{falls } n \neq p^e, \end{cases}$	$\Lambda(U) = \begin{cases} g(P) & \text{falls } U = P^e, \\ 0 & \text{falls } U \neq P^e, \end{cases}$

wo p eine Primzahl und e eine natürliche Zahl ist.
Daraus folgt

wo P ein normiertes irreduzibles Polynom und e eine natürliche Zahl ist.

$$\Lambda \in A \quad \text{und} \quad L_{\circ}\mu = \Lambda$$

$\overline{\Lambda}$ kann auf folgende Weise definiert werden :

$$\overline{\Lambda}(n) = \begin{cases} \log p & \text{falls} \quad n = p, \\ 0 & \text{falls} \quad n \neq p, \end{cases}$$

wo p eine Primzahl ist.

$\overline{\Lambda}$ kann auf folgende Weise definiert werden :

$$\overline{\Lambda}(U) = \begin{cases} g(P) & \text{falls} \quad U = P, \\ 0 & \text{falls} \quad U \neq P, \end{cases}$$

wo P ein normiertes irreduzibles Polynom ist.

In einer bezüglich der Multiplikation geschlossenen Menge M, falls eine komplexe Funktion f definiert werden kann, sodaß für jedes Elementpaar a, b aus M

$$f(a \, . \, b) = f(a) \cdot f(b)$$

gilt, so heißt f über M vollständig multiplikativ.

Ist $\alpha \in A$ und über der Menge der natürlichen Zahlen vollständig multiplikativ, so gilt für $\beta, \gamma \in A$

$$\alpha \cdot (\beta_{\circ} \gamma) = (\alpha \cdot \beta)_{\circ} (\alpha \cdot \gamma).$$

i sei eine durch $i(x) = 1$ definierte komplexe Funktion.

Mit den natürlichen Zahlen a, k $(a,k)=1$ und kann mau die arithmetische Funktion i_a folgendermaßen definieren :

$$i_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad n \equiv a \mod (k) \\ 0 & \text{falls} \quad n \not\equiv a \mod (k). \end{cases}$$

Man bezeichne mit χ den Charakter der primen Restklassengruppe mod k und mit χ_0 den Hauptcharakter.

Dann gilt

$$i_a(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(a) \, \chi(n),$$

wo φ (k) die Ordnung der primen Restklassengruppe mod k - Eulersche Funktion $\varphi : \varphi(k) = k \prod_{p/k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ — und $\overline{\chi}$ zu χ konjugierter Charakter ist.

Ist $\alpha \in A$ und über der Menge der normierten Polynome vollständig multiplikativ, so gilt für $\beta, \gamma \in A$

$$\alpha \cdot (\beta_{\circ} \gamma) = (\alpha \cdot \beta)_{\circ} (\alpha \cdot \gamma).$$

i sei eine durch $i(z) = 1$ definierte komplexe Funktion.

Mit den normierten Polynome D, B, U und $(D, B) = 1$ kann mau die arithmetische Funktion i_D folgendermaßen definieren :

$$i_D(U) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad U \equiv D \mod (B) \\ 0 & \text{falls} \quad U \not\equiv D \mod (B). \end{cases}$$

Man bezeichne mit χ den Charakter der primen Restklassengruppe mod B und mit χ_0 den Hauptcharakter.

Dann gilt

$$i_D(U) = \frac{1}{\varphi(B)} \sum_{\chi} \overline{\chi}(D) \, \chi(U),$$

wo φ (B) die Ordnung der primen Restklasseu gruppe mod B— verallgemeinerte Eulersche Funktion φ :

$$\varphi(B) = q^{g(B)} \prod_{P/B} \left(1 - \frac{1}{q^{g(P)}}\right)$$ — und $\overline{\chi}$ zu χ konjugierter Charakter ist.

Ist χ ein reeller, Nichthauptcharakter der primen Restklassengruppe mod k, so sei

$$\xi = \chi_0 i$$

Es sei nun $\bar{\xi}$ auf folgende Weise definiert :

$$\bar{\xi}(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = m^2, \\ 0 & \text{falls } n \neq m^2, \end{cases}$$

wobei m, n die natürlichen Zahlen durchlaufen.

Ist $x > x_0$, $|f_1(x)| < K\,|f_2(x)|$

mit f_1 , $f_2 \in F$ und zwei positiven Konstanten K, x_0 , so sei

$$f_1(x) = O(f_2(x)).$$

Ist χ ein reeller, Nichthauptcharakter der primen Restklassengruppe mod B, so sei

$$\xi = \chi_0 i.$$

Es sei nun $\bar{\xi}$ auf folgende Weise definiert :

$$\bar{\xi}(U) = \begin{cases} 1 & \text{falls } U = V^2, \\ 0 & \text{falls } U \neq V^2, \end{cases}$$

wobei U, V die normierten Polynome durchlaufen.

Ist $g(z) > g(z_0)$, $|f_1(z)| < K\,|f_2(z)|$ mit f_1 , $f_2 \in F$ und zwei positiven Konstanten $K, g(z_0)$, so sei

$$f_1(z) = O(f_2(z)).$$

Die Anzahl der Polynome n. Grades ist ersichtlich $(q-1)\,q^n$ und die der normierten Polynome desselben Grades q^n. Für U, $n = g(U) \geq g(B)$ kann man zwei Polynome C und A eindeutig bestimmen, sodaß folgendes gilt :

$$U = B \cdot C + A \quad , \quad 0 \leq g(A) < g(B).$$

Daraus folgt $U \equiv A$ mod B. Nun zählen wir die Polynome, n. Grades die in derselben Klasse liegen wie A. Da die Anzahl der Polynome C $(q-1)\,q^{n-g(B)}$ ist und es zwischen U und C umkehrbar eindeutige Zuordnung gibt, ist die Anzahl der Polynome U n. Grades mit $U \equiv A$ mod (B) $(q-1)\,q^{n-g(B)}$. Ist insbesondere U normiertes Polynom mit $U \equiv A$ mod (B) und $(A, B) = 1$, so ist die Anzahl von U $q^{n-g(B)}$. Dann ist es klar, daß in jeder Klasse mod B gleich viele normierte Polynome festes Grades $n \geq g(B)$ vorkommen.

Ist $\chi \neq \chi_0$, so gilt mit zwei natürlichen Zahlen n_1, n_2

$$\Big| \sum_{n_1 < n < n_2} \chi(n) \Big| \leq \frac{1}{2}\,\varphi(k)$$

Ordnen wir erst die normierten Polynome nach Grade und nach den primen Restklassen mod B. Ist $\chi \neq \chi_0$, so gilt mit zwei normierten Polynomen U_1 , U_2

$$\Big| \sum \chi(U) \Big| < \frac{1}{q-1}\,\varphi(B)$$

$g(U_1) < g(U) < g(U_2)$

Ist $g(U_1) \geq g(B)$, so gilt

$$\sum \chi(U) = 0 \tag{2.2}$$

$g(U_1) < g(U) < g(U_2)$

Für die Summe $\sum\limits_U \chi$, die über dem Abschnitt erstreckt wird, den man die oben erklärten Kette der geordneten normierten Polynome durch Abschneiden an beiden Seiten erhalten kann, gilt

$$\Big| \sum_U \chi \Big| < \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2} \right) \varphi(B). \tag{2.3}$$

3. Das Verfahren zu analysieren, welches K. YAMAMOTO in seinem oben erwähnten Artikel benutzt, ist zum Nutzen im Hinblick auf die hiesige Rolle der arithmetisch - linearen Transformationen und ihre eventuellen Anwendungen :

Arithmetisch - lineare Transformationen auf komplexe Funktionen anwenden und untersuchen, wie sie die Ordnungen der komplexen Funktionen nach einer Maßfunktion (z. B. nach "O") ändern. Wenn man die Arbeit des Verfassers aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, kann man bemerken, unter Anwendung der arithmetisch - linearen Transformationen auf komplexe Funktionen, daß die Ordnungsabschätzung sich auf folgende Fälle zurückführen läßt, indem man von sämtlichen algebraischen Eigenschaften der arithmetisch - linearen Transformationen Gebrauch macht :

(a) Die Ordnung der arithmetischen Funktion vergrößern und das Resultat vergleichen.

(b) Eine andere arithmetische Funktion benutzen und das Resultat vergleichen.

(c) Vom Dirichletschen Satz (3.2) Gebrauch machen, den wir später nachweisen.

(d) Die folgende halb algebraische Formel benutzen :

$$\alpha \in A \quad , \quad S_{\alpha L + \alpha_{\circ} i} \; E(z) = \log z \; S_{\alpha} \, E(z)$$

außerdem kann man genau die Elemente der Analyse bei den späteren Verallgemeinerungen bemerken. Für dieses Kapitel werden wir das oben erwähnte durch Beispiele erklären :

(a) 1. $|S_{\mu} \, i(z)| \leqq S_i \, i(z)$ läßt sich schreiben, indem man $|\mu| \leqq 1$ und $|\mu| \leqq i$ ins Auge faßt. Wie man später feststellen kann, gilt $S_i \, i(z) = O(E(z))$.

(a) 2. $|S_{\chi\mu} \, f(z)| < S_i \, f(z)$ läßt sich schreiben, indem man $|\chi\mu| \leqq i$, $f(z) \geqq 0$ und $f(z) = O(\log z)$ betrachtet. Wie man später feststellen kann, erhält man durch direkte Berechnung

$$S_i \log z = O(E(z)).$$

(a) 3. $|S_{\chi A} \, f(z)| < S_A \; f(z) = O(S_A \;\; i(z))$ läßt sich schreiben, indem man $|\chi A| \leqq A$, $f(z) \geqq 0$ und $f(z) = O(i(z))$ betrachtet. Wie man auch später festlegen kann, gilt

$$S_A \;\; i(z) = O(E(z)).$$

(b) Ist $(U, B) = 1$ mit einem normierten Polynom U, so gilt

$$\xi(U) \geqq 0 \quad \text{und} \quad \xi(U^2) \geqq 1.$$

Bew. : Es sei $U = \prod\limits_{i=1}^{s} P_i^{e_i}$ mit irreduziblen normierten Polynomen P_i und natürlichen Zahlen e_i. Daraus folgt

$$\xi(U) = (\chi_{\circ} i)(U) = \sum_{D/U} \chi(D) = \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{e_i} \chi(P_i)^j \right)$$

Da $\chi \neq \chi_0$ und reell ist, nimmt es den Wert $+1$ oder -1. Dann gilt

$$\text{falls } 2|e_i \quad \sum_{j=0}^{e_i} \chi(P_i)^j \geqq 1,$$

$$\text{falls } 2 \nmid e_i \sum_{j=0}^{e_i} \chi(P_i)^j \geqq 0.$$

Daraus folgt $\xi(U) \geq 0$ und $\xi(U^2) \geq 1$. Auf Grund der Definition von $\bar{\xi}$ gilt

$$S_{\bar{\xi}} \sqrt{E(z)} \geq S_{\xi} \sqrt{E(z)}.$$

Wie man auch später herausfinden kann

$$S_{\bar{\xi}} \sqrt{E(z)} = \frac{1}{2} \sqrt{E(z)} \log z.$$

(c) Hilfssatz :

Es sei $\{c_n\}$ eine abnehmende, positive, gegen Null strebende Folge und $\{b_n\}$ eine Folge, für deren jede Partialsumme B_m, $|B_m| < K$ gilt, wo $K > 0$ einen Konstanten darstellt. Wir erhalten daher

$$\sum_M^\infty b_n c_n = O(c_M),$$

wo M eine natürliche Zahl bedeutet.

Bew. : Auf Grund der Abelschen Summation folgt

$$\sum_{M \leq n \leq N} b_n c_n = \sum_{M \leq n \leq N} (B_n - B_{n-1}) c_n = \sum_{M \leq j \leq N-1} B_j (c_j - c_{j+1}) + B_N c_N - B_{M-1} c_M,$$

wo M, N natürliche Zahlen sind. Und für jede natürliche Zahl M gilt

$$\Big| \sum_{M \leq n \leq N} b_n c_n \Big| \leq K \Big| \sum_{M \leq j \leq N-1} (c_j - c_{j+1}) + c_N + c_M \Big| = 2 K c_M \text{ oder } \sum_M^\infty b_n c_n = O(c_M).$$

Resultat : Es sei ψ eine positive, für die Kette der geordneten normierten Polynome abnehmende, gegen Null strebende, komplexe arithmetische -, Φ über dem Körper der rationalen Funktionen vollständig multiplikative komplexe Funktion und χ der Nichthauptcharakter der primen Restklassengruppe mod B. Es folgt.

$$(3.1) \quad \sum_{\substack{U \\ g(U) > g(z)}} \chi(U) \psi(U) = O(\psi(z)) \quad \text{oder falls } \psi(U) \text{ nur von } g(U) \text{ abhängt und } g(z) \geq g(B),$$

so gilt $\sum_{\substack{U \\ g(U) > g(z)}} \chi(U) \psi(U) = 0$, wo U die normierten Polynome durchläuft.

Da man für die Annahmen des Hilfssatzes $K = \left(\frac{1}{q-1} + \frac{1}{2} \right) \varphi(B)$ und $\{\psi(U)\}$, $\{\chi(U)\}$ statt $\{c_n\}$, $\{b_n\}$ annehmen kann, folgt mit Rücksicht auf (2.2), (2.3) die Richtigkeit von (3.1). Außerdem ist die Reihe $\sum_U \chi(U) \psi(U)$ konvergent, weil nach (3.1) ihr Rest gegen Null strebt. Es sei $\beta(\chi, \psi) = \sum_U \chi(U) \psi(U)$. Dann gilt

$$\sum_{g(U) \leq g(z)} \chi(U) \psi(U) = \beta(\chi, \psi) + O(\psi(z))$$

und

$$\Phi(z) \sum_{g(U)\leq g(z)} \chi(U)\, \psi(U) = \sum_{g(U)\leq g(z)} \chi(U)\, \psi(U)\ \ \Phi(U)\, \Phi\left(\frac{z}{U}\right) = S_{\chi\psi\Phi}\ \Phi(z).$$

Daraus folgt

$$S_{\chi\psi\Phi}\ \Phi(z) = \Phi(z)\ \beta(\chi, \psi) + O(\Phi(z)\ \psi(z))$$

oder

$$S_{\chi\psi\Phi - \beta(\chi,\psi)\,s}\ \ \Phi(z) = O(\Phi(z)\ \psi(z)).$$

Wenn nun ψ und Φ nur von $g(U)$ abhängen, so gilt für $g(z) \geq g(B)$ nach (3.1)

(3.2) $$S_{\chi\psi\Phi - \beta(\chi,\psi)\,s}\ \ \Phi(z) = 0.$$

(d) Für $\alpha \in A$ gilt

(2.1) $$\log z\ S_\alpha\ E(z) = S_\alpha\ \log z\ E(z) + S_{L\alpha}\ E(z).$$

Mit Hilfe von $\log z\ E(z) = S_i\ E(z)$, die wir später nachweisen, folgt

(3.3) $$S_{\alpha L + \alpha o i}\ E(z) = \log z\ \ S_\alpha\ E(z).$$

4. (a) Nun werden wir beweisen, daß beide folgende Behauptungen (4.1) und (4.2) zueinander äquivalent sind :

(4.1) $$S_{A\, i_D - \frac{1}{\varphi(B)} A}\ \ E(z) = O(E(z))$$

(4.2) $$\sum_{\substack{g(P)\leq g(z) \\ P\equiv D \bmod (B)}} \frac{L(P)}{E(P)} = \frac{1}{\varphi(B)} \log z + O(1),$$

wobei D ein normiertes Polynom und P die irreduziblen normierten Polynome bezeichnen. Da (4.2) den Dirichletschen Satz enthält, können wir ihn in der gewünschten Form darstellen :

$$S_\alpha\, f_1(z) = O(f_2(z)),$$

indem wir beim Übergehen von $f_1(z)$ zu $f_2(z)$ oben erwähntes Verfahren anwenden. Hiermit werden wir die bemerkenswerten Eigenschaften dieser Funktionen erhalten, indem wir feststellen, wie die arithmetisch - linearen Transformationen die Ordnungen der komplexen Funktionen ändern. Als ein genaues Beispiel dafür kann man den Dirichletschen Satz erwähnen.

Wie wir später nachweisen werden, betrachten wir nun

(4.3) $$S_{A - \overline{A}}\ \ E(z) = O(E(z))$$

(4.4) $$S_{A - i}\ \ E(z) = O(E(z))$$

(4.5) $$S_i\ \ E(z) = E(z)\ \log z.$$

Unter der Betrachtung von i_D läßt sich die Linke Seite von (4.1)

$$S_{A i_D - \frac{1}{\varphi(B)} A} \; E(z) = E(z) \sum_{\substack{g(U) \leq g(z) \\ U \equiv D \bmod (B)}} \frac{A(U)}{E(U)} - \frac{1}{\varphi(B)} S_A \; E(z).$$

schreiben.

Da $0 \leqq S_{A-\bar{A}} \; E(z) = O(E(z))$ ist, so erhält man

$$S_{A-\bar{A}} \; E(z) = E(z) \sum_{g(U) \leq g(z)} \frac{A(U) - \bar{A}(U)}{E(U)} \geqq E(z) \sum_{\substack{g(U) \leq g(z) \\ U \equiv D \bmod (B)}} \frac{A(U) - \bar{A}(U)}{E(U)} \geqq 0$$

oder

$$E(z) \sum_{\substack{g(U) \leq g(z) \\ U \equiv D \bmod B}} \frac{A(U)}{E(U)} = E(z) \sum_{\substack{g(U) \leq g(z) \\ U \equiv D \bmod B}} \frac{\bar{A}(U)}{E(U)} + O(E(z)). \tag{4.6}$$

Hiermit folgt aus (4.1) mit Hilfe von (4.4) und (4.5)

$$S_{A i_D - \frac{1}{\varphi(B)} A} \; E(z) = E(z) \sum_{\substack{g(U) \leq g(z) \\ U \equiv D \bmod B}} \frac{\bar{A}(U)}{E(U)} + O(E(z)) - \frac{1}{\varphi(B)} E(z) \log z.$$

Unter der Berücksichtigung von $\bar{A}$ erhält man aus (4.1)

$$\sum_{\substack{g(P) \leq g(z) \\ P \equiv D \bmod B}} \frac{L(P)}{E(P)} = \frac{1}{\varphi(B)} \log z + O(1). \tag{4.2}$$

Und umgekehrt geht man von (4.2) über (4.5), (4.3) od. (4.6), (4.4) auf (4.1) über. Hiermit sind (4.1) und (4.2) zueinander äquivalent.

(b) Nun betrachten wir die folgenden Behauptungen, die wir später nachweisen:

(4.7) Ist $\chi \neq \chi_0$, $\beta\left(\chi, \frac{1}{E}\right) = \beta(\chi) \neq 0$, so gilt $S_{\chi A} \; E(z) = O(E(z))$.

(4.8) Ist $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi) = 0$, so gilt $S_{\chi A + i} \; E(z) = O(E(z))$.

(4.9) Ist $\chi \neq \chi_0$, χ reell, so gilt $S_{[\chi - \beta(\chi) \varepsilon] \circ i} \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)})$.

(4.10) $$S_\xi \sqrt{E(z)} \geqq S_{\bar{\xi}} \sqrt{E(z)} = \tfrac{1}{2} \sqrt{E(z)} \log z.$$

(4.11) $$S_{(\chi_0 - i) A} \; E(z) = O(E(z)).$$

Da $i_D = \frac{1}{\varphi(B)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(D) \chi$ ist, folgt

$$E(z) \sum_{\substack{g(U) \leq g(z) \\ U \equiv D \bmod B}} \frac{A(U)}{E(U)} = S_{A i_D} \; E(z) = \frac{1}{\varphi(B)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(D) S_{\chi A} \; E(z) + \frac{1}{\varphi(B)} S_{\chi_0 A} \; E(z)$$

oder mit Hilfe von (4.6), (4.7), (4.8) und $\bar{A}$ erhält man

$$E(z) \sum_{\substack{g(P)\leq g(z) \\ P\equiv D \bmod B}} \frac{L(P)}{E(P)} = E(z) \sum_{\substack{g(U)\leq g(z) \\ P\equiv D \bmod B}} \frac{\overline{\Lambda}(U)}{E(U)} + \frac{1}{\varphi(B)} \Big[S_{\chi_0 \Lambda} \; E(z) - \sum_{\beta(\chi)=0} \bar{\chi}(D) S_i E(z) \Big] + O(E(z))$$

Insbesondere für $D=1$ folgt auf Grund von (4.11) und (4.4).

$$0 \leqq E(z) \sum_{\substack{P\equiv 1 \bmod B \\ g(P)\leq g(z)}} \frac{L(P)}{E(P)} = \frac{1}{\varphi(B)} (1-t)\; E(z) \log z + O(E(z)),$$

wobei t die Anzahl von χ mit $\beta(\chi)=0$ bedeutet. Da $g(z)$ beliebig groß gewählt wird, folgt $0 \leqq t \leqq 1$. Aus $\beta(\chi)=0$ und $\overline{\beta(\chi)} = \beta(\bar{\chi})$ folgt $\beta(\bar{\chi})=0$, wo $\bar{\chi}$, $\overline{\beta(\chi)}$ zu χ, $\beta(\chi)$ konjugiert sind. Daraus folgt, daß χ mit $0 \leqq t \leqq 1$ reell sein soll. Auf der anderen Seite erhält man aus (4.9).

$$S_{\chi_0 \, i - \beta(\chi) i} \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)})$$

oder für χ mit $\beta(\chi)=0$, auf Grund von ξ

$$S_{\xi} \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)}).$$

Da $g(z)$ beliebig groß gewählt wird, steht das letzte Resultat zu (4.10) im Widerspruch. Hiermit $t=0$. Dann erhält man

$$\sum_{\substack{g(P)\leq g(z) \\ P\equiv D \bmod B}} \frac{L(P)}{E(P)} = \frac{1}{\varphi(B)} \log z + O(1)$$

Nun betrachten wir die später zu beweisenden Beziehungen. Sie sind : (4.3) ; (4.4) ; (4.5) ; (4.7) ; (4.8) ; (4.9) ; (4.10) und (4.11). (4.3) ; (4.4) ; (4.7) ; (4.8) ; (4.11) drücken aus, daß der Reihe nach die durch die komplexen arithmetischen Funktionen $\Lambda - \overline{\Lambda}$; $\Lambda - i$; $\chi \Lambda$, $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi) \neq 0$; $\chi \Lambda + i$, $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi)=0$; $(\chi_0 - i)\Lambda$ gebildeten arithmetisch - linearen Transformationen, die Ordnung von $E(z)$ nicht vergrößern. (4.9) zeigt auch, daß die durch $[\chi - \beta(\chi)\varepsilon]_{\circ} i$ mit reellem $\chi \neq \chi_0$ gebildete Transformation die Ordnung von $\sqrt{E(z)}$ nicht ändert.

5. Die folgenden Beziehungen kann man durch direkte Rechnung erhalten, mit deren Hilfe man die oben erwähnten zubeweisenden Beziehungen verwirklicht :

(5.1) $$S_i \sqrt{E(z)} = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} E(z) - \frac{1}{\sqrt{q}-1} \sqrt{E(z)}$$

(4.5) $$S_i\, E(z) = E(z) \log z$$

(5.2) $$S_{\frac{q-1}{q} i + \frac{1}{q} \varepsilon}\; i(z) = E(z)$$

(5.3) $$S_i\, i(z) = \frac{q}{q-1} E(z) - \frac{1}{q-1}$$

(5.4) $$S_L\; i(z) = \frac{q}{q-1} E(z) \log z - \frac{q}{(q-1)^2} E(z) + \frac{q}{(q-1)^2}$$

(5.5) $$S_i \log z = \frac{q}{(q-1)^2} E(z) - \frac{1}{q-1} \log z - \frac{q}{(q-1)^2}$$

Lemma 1. $S_\mu\, E(z) = O(E(z))$.

Bew.: Aus (5.2) und $\mu \circ i = \varepsilon$, $\mu \circ \varepsilon = \mu$ erhält man

$$S_\mu\, [S_{\frac{q-1}{q} i + \frac{1}{q} \varepsilon}\, i(z)] = \frac{q-1}{q} + \frac{1}{q}\, S_\mu\, i(z).$$

Aus $|\mu| \leqq i$ und (5.3) folgt

$$S_\mu\, i(z) = O(S_i\, i(z)) = O(E(z))$$

oder

$$S_\mu\, E(z) = O(E(z)).$$

Lemma 2. $$S_\Lambda\ i(z) = O(E(z)).$$

Bew.: Aus $\Lambda = L_c \mu$, (5.4) , (4.5) und $i \circ \mu = \varepsilon$ erhält man

$$S_\mu \left[\frac{q}{q-1}\, E(z)\ \log z - \frac{q}{(q-1)^2}\, E(z) + \frac{q}{(q-1)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{q-1}\, E(z) - \frac{q}{(q-1)^2}\, S_\mu\, E(z) + \frac{q}{(q-1)^2}\, S_\mu\ i(z).$$

Aus Lemma 1. folgt

$$S_\Lambda\ i(z) = O(E(z)).$$

Lemma 3. $$S_{\Lambda - \bar{\Lambda}}\ E(z) = O(E(z)).$$

Bew.: Aus den Definitionen von Λ und $\bar{\Lambda}$ ergibt sich

$$o \leqq S_{\Lambda - \bar{\Lambda}}\ E(z) = E(z) \sum_{\substack{eg(P) \leq g(z) \\ e > 1}} \frac{L(P)}{E(P^e)} < E(z) \sum_{\substack{e=2 \\ P}}^{\infty} \frac{L(P)}{E(P)^e} = E(z) \sum_P \frac{L(P)}{E(P)\,[E(P)-1]},$$

wo e die natürlichen Zahlen und P die normierten irreduziblen Polynome durchlaufen. Daher gilt

$$0 \leqq S_{\Lambda - \bar{\Lambda}}\ E(z) < E(z) \sum_U \frac{L(U)}{E(U)\,[E(U)-1]},$$

wo die Summe über die normienten Polynome U zu erstrecken ist. Da die Anzahl der normierten Polynome vom Grade $g(U)$ $q^{g(U)}$ ist, folgt

$$0 \leqq S_{\Lambda - \bar{\Lambda}}\ E(z) < E(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - 1},$$

wo n die natürlichen Zahlen durchläuft. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - 1}$ ist konvergent und damit ist der Beweis beendet.

Lemma 4. $$S_{\Lambda - i}\ E(z) = O(E(z)).$$

Bew.: Aus (5.2) und $L = \Lambda \circ i$ folgt

$$S_{\Lambda - i} \, [S_{\frac{q-1}{q} i + \frac{1}{q} \varepsilon} \, i(z)] = \frac{q-1}{q} S_L \, i(z) + \frac{1}{q} S_\Lambda \, i(z) - \frac{q-1}{q} S_{i \circ i} \, i(z) - \frac{1}{q} S_i \, i(z).$$

Aus (5.4), Lemma 2, (5.3) und (4.5) erhält man

$$S_{\Lambda - i} \, E(z) = O(E(z)).$$

Lemma 5. $$S_{(\chi_0 - i)\Lambda} \, E(z) = O(E(z))$$

Bew.: Aus Definition von χ_0 folgt

$$\chi_0(U) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (U, B) = 1, \\ 0 & \text{falls } (U, B) \neq 1, \end{cases}$$

wo U die normierten Polynome durchläuft. Aus Definition von Λ folgt

$$[(\chi_0 - i)\Lambda](U) = \begin{cases} -\log P & \text{falls } (U, B) \neq 1 \text{ und } U = P^e, \\ 0 & \text{falls } (U, B) = 1 \text{ oder } U \neq P^e, \end{cases}$$

wo e die natürliche Zahl und P die normierten irreduziblen Polynome sind. Dann gilt aus $[(\chi_0 - i)\Lambda](U) \neq 0$, entweder $U = P^e$ oder P/B. Daraus folgt

$$0 \geq S_{(\chi_0 - i)\Lambda} \, E(z) = E(z) \sum_{g(U) \leq g(Z)} \frac{[(\chi_0 - i)\Lambda](U)}{E(U)} \geq -E(z) \sum_{\substack{e=1 \\ P/B}}^{\infty} \frac{L(P)}{E(P)^e}$$

oder da

$$\sum_{e=1}^{\infty} \frac{L(P)}{E(P)^e} = \sum_{P/B} \frac{L(P)}{E(P) - 1}$$

konvergent ist, die Richtigkeit der Behauptung.

Lemma 6. Ist $\chi \neq \chi_0$ und $\beta(\chi) \neq 0$, so ist

$$S_{\chi\Lambda} \, E(z) = \frac{\beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)}{\beta(\chi)} \, E(z).$$

Bew.: Setzt man in der Formel (3.2) $\psi = \frac{1}{E}$, $\Phi = E$ und $\beta\left(\chi, \frac{1}{E}\right) = \beta(\chi)$ für $g(z) \geq g(B)$, so gilt

(6.1) $$S_{\chi - \varepsilon \beta(\chi)} \, E(z) = 0.$$

Andererseits ist

(6.2) $$(\chi \Lambda) \circ [\chi - \beta(\chi) \varepsilon] = \chi (\Lambda \circ i) - \beta(\chi) \chi \Lambda.$$

Setzt man diesmal in der Formel (3.2) $\psi = \frac{L}{E}$, $\Phi = E$, so erhält man

$$S_{\chi L - \varepsilon \beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)} \, E(z) = 0$$

oder

$$S_{\chi L}\ E(z) = \beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right) E(z). \tag{6.3}$$

Aus (6.1), (6.2) und (6.3) gilt

$$S_{\chi \Lambda}\ \ S_{\chi-\beta(\chi)\varepsilon}\ E(z) = S_{\chi L-\beta(\chi)\chi\Lambda}\ E(z) = 0$$

oder

$$S_{\chi\Lambda}\ E(z) = \frac{\beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)}{\beta(\chi)}\ E(z). \text{ w. z. b. w.}$$

Lemma 7. Ist $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi) = 0$, so ist $S_{\chi\Lambda+i}\ E(z) = 0$

Bew.: Setzt man $\alpha = \chi$ in der Formel (3.3) $S_{\alpha L+\alpha_0 i}\ E(z) = \log z\ \ S_\alpha\ E(z)$, so erhält man

$$S_{\chi L+\chi_0 i}\ E(z) = \log z\ S_\chi\ E(z)$$

und aus $\beta(\chi) = 0$ und (6.1)

$$S_{\chi L+\chi_0 i}\ E(z) = 0.$$

Da $(\chi\mu)_0\ [\chi L + \chi_0 i] = \chi\Lambda + i$ ist, folgt

$$S_{\chi\mu}\ S_{\chi L+\chi_0 i}\ E(z) = S_{\chi\Lambda+i}\ E(z) = 0.$$

Lemma 8. (*a*) $S_{\xi}\ \sqrt{E(z)} \geq S_{\bar{\xi}}\ \sqrt{E(z)} = \frac{1}{2}\sqrt{E(z)}\ \log z$

Bew.: Aus Definition von $\bar{\xi}$ folgt

$$S_{\bar{\xi}}\ \sqrt{E(z)} = \sqrt{E(z)} \sum_{g(U) \leq \frac{1}{2} g(z)} 1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{E(z)}\ \log z,$$

wo U ein normiertes Polynom und z eine rationale Funktion bedeuten.

(b) $S_{[\chi-\beta(\chi)\varepsilon]_0 i}\ \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)})$ und falls $\beta(\chi) = 0$, gilt $S_{\chi_0 i}\ \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)})$.

Bew: Setzt man in (3.2) $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{E}}$, $\Phi = \sqrt{E}$ für $g(z) \geq g(B)$, so erhält man

$$S_{\chi-\beta\left(\chi, \frac{1}{\sqrt{E}}\right)\varepsilon}\ \sqrt{E(z)} = 0. \tag{8.1}$$

Unter der Berücksichtigung von (6.1), (5.1) und (8.1) folgt

$$\begin{aligned} S_{[\chi-\beta(\chi)\varepsilon]_0 i}\ \sqrt{E(z)} &= S_{\chi-\beta(\chi)\varepsilon}\left[\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}\ E(z) - \frac{1}{\sqrt{q}-1}\ \sqrt{E(z)}\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}-1}\ S_{\left[\beta(\chi)-\beta\left(\chi, \frac{1}{\sqrt{E}}\right)\right]\varepsilon}\ \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)}). \end{aligned}$$

Ist insbesondere $\beta(\chi) = 0$, so ist $S_{\xi}\ \sqrt{E(z)} = O(\sqrt{E(z)})$.

ZWEITES KAPITEL

Eine Verallgemeinerung des Dirichletschen Satzes auf den algebraischen Funktionenkörper.

1. Es sei K ein algebraischer Funktionenkörper und Ω sein endlicher Konstantenkörper der Ordnung q. Wir bezeichnen mit g das Geschlecht von K. A, A_0 und H bedeuten der Reihe nach seine Divisorengruppe, Gruppe der Divisoren 0. Grades und Hauptdivisorengruppe. Mit h bezeichnen wir die Klassenzahl $-[A_0 : H] = h-$. Nun können wir ein vollständiges Repräsentantensystem von der Gruppe A_0/H durch die Divisoren 0. Grades angeben, die wir durch die passenden Primdivisoren $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ eindeutig bestimmen. Wir nehmen allgemein die Elemente $\vartheta_i\,(i=1,\ldots,h)$ aus jeder Klasse von A_0/H heraus. Unter der Bedingung, daß man den Riemann-Rochschen Satz [2] ins Auge faßt und ν möglichst groß wählen kann, kann man in jeder Klasse $\mathfrak{p}_0^{\nu}\,\vartheta_i\,H$ die ganzen Divisoren $\mathfrak{q}_i\,(i=1,\ldots,h)$ auffinden, wobei $\mathfrak{p}_0$ [*] ein algemeiner Primdivisor kleinsten Grades und ν eine natürliche Zahl bedeuten. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{p}_i\,(i=1,\ldots,r)$ die in $\mathfrak{q}_j\,(j=1,\ldots,h)$ als Faktor enthaltenden sämtlichen Primdivisoren, so daß für die passenden natürlichen Zahlen $n_i\,(i=1,\ldots,r)$

$$\bar{\mathfrak{p}}_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{p}_0^{n_i}} \in A_0 \quad , \quad \bar{\mathfrak{p}}_i \notin H \;(i=1,\ldots,r)$$

gelten soll. Es seien P_0, P_1, die Gruppe der durch die $\bar{\mathfrak{p}}_i\;(i=0,\ldots,r)$ erzeugten Divisoren 0. Grades und der Durchschnitt von P_0 und H. Einerseits gilt $[P_0 : P_1] \leqq h$, weil aus $\alpha_1, \alpha_2 \in P_0$ mit $\alpha_1 P_1 \neq \alpha_2 P_1$, $\alpha_1 H \neq \alpha_2 \cdot H$ folgt. Andererseits gilt $[P_0 : P_1] \geq h$, weil die Menge $\left\{ \frac{\mathfrak{q}_i}{\mathfrak{p}_0^{\nu_i}}\;(i=1,\ldots,h) \right\} \subset P_0$ ein vollständiges Repräsentantensystem von der Gruppe A_0/H enthält. Daraus folgt $[P_0 : P_1] = h$. Also können wir jede Klasse von A_0/H durch die Divisoren 0. Grades repräsentieren, die aus den Primdivisoren $\mathfrak{p}_i\;(i=o,\ldots,r)$ zusammengesetzt sind. Man kann es einsehen, daß P_1 eine Basis hat und die Anzahl der Basiselemente r ist, indem man betrachtet, daß die Elemente $\bar{\mathfrak{p}}_1,\ldots,\bar{\mathfrak{p}}_r$ eine Basis von P_0 bilden, andererseits $[P_0 : P_1]$ endlich ist und kein Element aus P_0 eine endliche Ordnung hat. Nun können wir dieses vollständiges Repräsentantensystem folgenderart eindeutig bestimmen. Nehmen wir nun die kleinste Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}_1$ als Faktor enthaltenden Elemente von P_1 an die erste Stelle, u.s.w und zuletzt die kleinste Potenz von $\bar{\mathfrak{p}}_r$ als Faktor enthaltenden an die letzte Stelle. Betrachten wir jetzt die kleinste von diesen kleinsten Exponenten. Es sei $\bar{\mathfrak{p}}_1$ einer der Primdivisoren, die diesen Exponenten haben und sei ω_1 das Element, das $\bar{\mathfrak{p}}_1$ mit diesem Exponenten enthält. d. h.

$$\omega_1 = \bar{\mathfrak{p}}_1^{m_{11}}\,\bar{\mathfrak{p}}_2^{m_{12}}\ldots\bar{\mathfrak{p}}_r^{m_{1r}}\,,$$

wo $m_{1i}\;(i=1,\ldots,r)$ ganze Zahlen bedeuten. Die $\bar{\mathfrak{p}}_1$ enthaltenden Elemente von P_1 werden die $\bar{\mathfrak{p}}_1$ nicht enthaltenden, indem man sie mit passender Potenz von ω_1 multipliziert. Wendet man nun dasselbe Verfahren auf solche Elemente an, so erhält man z. B. den Primdivisor $\bar{\mathfrak{p}}_2$ und das Element ω_2 mit

$$\omega_2 = \bar{\mathfrak{p}}_2^{m_{22}}\,\bar{\mathfrak{p}}_3^{m_{23}}\ldots\bar{\mathfrak{p}}_r^{m_{2r}}\,,$$

[2] Zahlentheorie, H. HASSE, AKAD. VERLAG. Berlin, (1949).

[*] Von diesem Kapitel an wird der Grad von $\mathfrak{p}_0$ 1 angenommen. Es ist offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit.

wo m_{2i} $(i = 2, \dots, r)$ ganze Zahlen bedeuten. Unter der Anwendung dieser Methode auf die $\overline{\mathfrak{p}}_1$ und $\overline{\mathfrak{p}}_2$ nicht enthaltenden Elemente, so ergibt sich

$$\omega_3 = \overline{\mathfrak{p}}_3^{m_{33}} \overline{\mathfrak{p}}_4^{m_{34}} \dots \overline{\mathfrak{p}}_r^{m_{3r}}$$

und schließlich

$$\omega_t = \overline{\mathfrak{p}}_t^{m_{tt}} \dots \overline{\mathfrak{p}}_r^{m_{tr}}$$

mit $1 \leqq t \leqq r$.

Da sich jedes Element von P_1 durch ein Produkt von den ω ausdrücken läßt, und jedes beliebige Produkt von den ω ein Element von P_1 ist, kommt man zu dem Schluß, daß ω_i $(i = 1, \dots, r)$ eine Basis von P_1 bilden. Multipliziert man die vorangehenden Basiselemente mit den passenden Potenzen der nachfolgenden, so erfüllen die Exponente die Ungleichungen

$$0 \leqq m_{ij} \leqq m_{jj} \; ; \quad i < j \quad (i, j = 1, \dots, r).$$

Es gilt $m_{rr} > 1$, da keiner der P_0 erzeugenden $\overline{\mathfrak{p}}_i$ zu H gehört. Die Elemente $\pi_j = \overline{\mathfrak{p}}_1^{\beta_1} \overline{\mathfrak{p}}_2^{\beta_2} \dots \overline{\mathfrak{p}}_r^{\beta_r}$ $(j = 1, \dots, h)$ bilden das vollständige Repräsentantensystem von P_0/P_1 und auch von A_0/H, wo $0 \leqq \beta_i < m_{ii}$ mit ganzen Zahlen β_i $(i = 1, \dots, r)$ und $\prod_{i=1}^{r} m_{ii} = h$ ist.

2. Bezeichnen wir mit $g(\mathfrak{a})$ den Grad eines Divisors $\mathfrak{a}$. Verallgemeinern wir die Möbiussche Funktion μ auf folgende Weise:

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } \mathfrak{a} \text{ ein Primdivisorquadrat enthält} \\ (-1)^r & \text{, falls } \mathfrak{a} \text{ aus } r \text{ verschiedenen Primdivisoren zusammengesetzt ist} \\ 1 & \text{, falls } \mathfrak{a} = 1, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{a}$ ein ganzer Divisor ist. Es sei $\mathfrak{P} = \prod_{i=0}^{s} \mathfrak{p}_i$ und $\mathfrak{m}$ ein ganzer Divisor mit $(\mathfrak{m}, \mathfrak{P}) = 1$. Wir bezeichnen die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren 0. Grades, die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren und die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Hauptdivisoren der Reihe nach mit $A_{0\mathfrak{m}}$, $A_{\mathfrak{m}}$ und $H_{\mathfrak{m}}$. Γ sei die Menge der mit $\gamma \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$ zu $H_{\mathfrak{m}}$ gehörigen Divisoren γ. Die Ordnumg der primen Restklassengruppe $\mod \mathfrak{m}$ d. h. $[H_{\mathfrak{m}} : \Gamma]$ ist

$$\varphi(\mathfrak{m}) = q^{g(\mathfrak{m})} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right)$$

— Verallgemeinerte Eulersche Funktion φ—. Andererseits ist $A_{0\mathfrak{m}}/H_{\mathfrak{m}} = \{\pi_i H_{\mathfrak{m}}, (i=1,\dots,h)\}$ und daher $[A_{0\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}] = h$. Da $\pi_1, \dots, \pi_h$ ein vollständiges Repräsentantensystem von A_0/H bilden, so gilt für $\pi_i \neq \pi_j$ $\pi_i H \neq \pi_j H$ und folglich mit $(\mathfrak{m}, \mathfrak{P}) = 1$ $\pi_i H_{\mathfrak{m}} \neq \pi_j H_{\mathfrak{m}}$ und umgekehrt. Daher ist $[A_{0\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}] \geqq h$. Auch gilt $[A_{0\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}] \leqq h$, weil jedes Element von $A_{0\mathfrak{m}}$ durch Division eines einziges π_k in $H_{\mathfrak{m}}$ aufgenommen wird. Mithin ist $[A_{0\mathfrak{m}} : H_{\mathfrak{m}}] = h$. Bezeichnen wir ein vollständiges Repräsentantensystem von $H_{\mathfrak{m}}/\Gamma$ mit α_j $(j = 1, \dots, \varphi(\mathfrak{m}))$, so bilden

$$\mathfrak{p}_0^n \pi_i \alpha_j \,; \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots; \quad i = 1, \dots, h; \quad j = 1, \dots, \varphi(\mathfrak{m})$$

mittelst $\mathfrak{p}_0$, π_i, α_j ein vollständiges Repräsentantensystem von $A_{\mathfrak{m}}/\Gamma$.

Unter $T(n, \mathfrak{q})$ verstehen wir die Anzahl der zu dem ganzen Divisor $\mathfrak{q} \neq 1$ teilerfremden, den Grad $n > 2g - 2 + g(\mathfrak{q})$ besitzenden ganzen Divisoren und unter $T_{\pi_i \alpha_j}(n, \mathfrak{m}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{q})$ die Anzahl der in der Klasse $\mathfrak{p}_0^n \alpha_j \pi_j \Gamma$ vorkommenden, zu $\mathfrak{m}\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{q}$ teilerfremden, den Grad $n > 2g - 2 + g(\mathfrak{q})$ besitzenden ganzen Divisoren.

Hilfssatz 1.

$$T(n, \mathfrak{q}) = \frac{h}{(q-1)\, q^{g-1}} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) \cdot q^n$$

Bew: Nach dem Riemann-Rochschen Satz kann man für jedes $n > 2g - 2 + g(\mathfrak{q})$, aus jeder Klasse von A_0/H, einen ganzen Divisor $\mathfrak{a}$ n. Grades herausfinden. Die Anzahl der Elemente des Moduls $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right)$ ist $q^{\dim \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}} = q^{n - g(\mathfrak{u}) - (g-1)}$, wo $\mathfrak{u}/\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{u}$ ganzer Divisor ist. $T\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right)$ sei auf folgende Weise definiert - Die Anzahl der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}'$ mit $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}' \in \left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right)$ — d. h. $T\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) = \frac{q^{\dim \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}} - 1}{q-1}$. Für die Anzahl der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}'$ mit $\frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} \in \left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right)$; $(\mathfrak{a}', \mathfrak{q}) = 1$ gilt also

$$\sum_{\mathfrak{u}/\mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{u}) \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}} \left(q^{g\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}\right)} - 1 \right)$$

oder unter Berücksichtigung von

$$\sum_{\mathfrak{u}/\mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{u}) = 0 \quad , \quad \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) q^n .$$

Da für die in allen anderen Klassen vorkommenden ganzen Divisoren n. Grades dasselbe gilt, erhält man

$$T(n, \mathfrak{q}) = \frac{h}{(q-1)\, q^{g-1}} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) q^n .$$

Hilfssatz 2.

$$T_{\pi_i \alpha_j}(n, \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}) = \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1} q^{g(\mathfrak{m})}} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}\,\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) q^n ; \quad n > 2g - 2 + g(\mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}).$$

Bew: Nach Hilfssatz 1 gilt für $n > 2g - 2 + g(\mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q})$

$$T(n, \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}) = \frac{h}{(q-1)\, q^{g-1}} \prod_{\mathfrak{p}/\mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) q^n$$

also ist $T(n, \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}) \neq 0$ und wächst exponential mit n. Daraus läßt sich folgern, daß es mindestens in einer geeigneten Klasse $\mathfrak{p}_0^n \pi_i \alpha_j \Gamma$ von $A_{\mathfrak{m}}/\Gamma$ einen zu $\mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}$ teilerfremden ganzen Divisor $\mathfrak{a}$ gibt. Ist also $\mathfrak{a}'$ ganz und $(\mathfrak{a}', \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}) = 1$, so besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von $\mathfrak{p}_0^n \pi_i \alpha_j \Gamma$ auf Γ : $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in \mathfrak{p}_0^n \pi_i \alpha_j \Gamma \longleftrightarrow \frac{\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}} \in \Gamma$. Man kann die Anzahl der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}'$ mit $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{p}_0^n \pi_i \alpha_j \Gamma$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{P}\,\mathfrak{q}) = 1$ dadurch gewinnen, daß man aus $\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right) \cap \Gamma$ die zu $\mathfrak{P}\mathfrak{q}$ nicht teilerfremden Divisoren herausnimmt und auch den Rest von den hier als Faktor vorkommenden Elementen des Konstantenkörpers befreit. Bezeichnen wir die Anzahl der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}'$ mit $T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \Gamma\right]$, ür die $\mathfrak{u} | \mathfrak{P}\mathfrak{q}$ und $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}' \in \left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \Gamma$ gelten, so erhalten wir

$$T\, \pi_i\, \alpha_j\, (n, \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{u}|\mathfrak{P}\,\mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{u})\; T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \Gamma\right].$$

Nun berechnen wir $T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap H_{\mathfrak{m}}\right]$ d. h. die Anzahl der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}'$ mit $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}' \in \left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap H_{\mathfrak{m}}$. Es gilt

$$T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap H_{\mathfrak{m}}\right] = \sum_{\mathfrak{w}|\mathfrak{m}} \mu(\mathfrak{w})\; T\left(\frac{\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{w}}{\mathfrak{a}}\right) = \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}}\, q^{g\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}\right)} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) \neq 0$$

Für ein passendes α_j gilt

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}' \in (\alpha_j\, \Gamma) \cap \left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right).$$

Wir bezeichnen mit $T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \alpha_j\, \Gamma\right]$ die Anzahl der ganzen Divisoren $\mathfrak{a}'$ mit $\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a}' \in \left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \alpha_j\, \Gamma$. Nun sei $\widetilde{\Gamma}$ die Menge der sämtlichen Elemente $\gamma\, (\equiv 1 \bmod \mathfrak{m})$. Wählen wir die Basiselemente von $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right)$ über Ω als $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\dim\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}\right)-1}$ aus, wo $\psi_0 \cong \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}}$ ist. Da sich jedes Element von $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right)$ als

$$\sum_{i=1}^{\dim\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}\right)-1} \beta_i\, \psi_i + \beta_0\, \psi_0 \qquad \text{mit} \qquad \beta_i \in \Omega$$

ausdrücken läßt, erhält man für die Elemente von $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \alpha_j\, \widetilde{\Gamma}$

$$\sum_{i=1}^{\dim\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}\right)-1} \beta_i\, \psi_i + \beta_0\, \psi_0 \equiv \psi_0 \equiv \alpha_j \bmod \mathfrak{m}$$

oder

$$\sum_{i=1}^{\dim\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{u}}\right)-1} \beta_i\, \psi_i + (\beta_0 - 1)\, \psi_0 \equiv 0 \bmod \mathfrak{m}.$$

Daraus läßt sich folgern, daß die Anzahl der Elemente von $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \alpha_j \Gamma$ gleich der Anzahl der Elemente von $\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap (\mathfrak{m})$ mit $(\mathfrak{u}, \mathfrak{m}) = 1$ ist. Sie ist also gleich der Anzahl der Elemente von $\left(\frac{\mathfrak{u} \cdot \mathfrak{m}}{\mathfrak{a}}\right)$, nämlich $\frac{1}{q^{g-1}} q^{n-g(\mathfrak{u})-g(\mathfrak{m})}$. Somit gilt

$$T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \alpha_j \Gamma\right] = \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}} \cdot q^{n-g(\mathfrak{u})-g(\mathfrak{m})} - \frac{1}{q-1} .$$

Da für jede Klasse $\alpha_j \Gamma$ dasselbe gilt, so erhält man speziell für die Klasse Γ

$$T\left[\left(\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{a}}\right) \cap \Gamma\right] = \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}} \cdot q^{n-g(\mathfrak{u})-g(\mathfrak{m})} - \frac{1}{q-1}$$

und daher

$$T_{\pi_i \alpha_j}(n, \mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q}) = \sum_{\mathfrak{u} \mid \mathfrak{P}\mathfrak{q}} \mu(\mathfrak{u}) \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}} \cdot q^{n-g(\mathfrak{u})-g(\mathfrak{m})}$$

oder

$$T_{\pi_i \alpha_j}(n, \mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q}) = \frac{1}{(q-1)\, q^{g-1}\, q^{g(\mathfrak{m})}} \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{P}\mathfrak{q}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) q^n .$$

Unter Berücksichtigung von $\varphi(\mathfrak{m})$ gilt

$$T_{\pi_i \alpha_j}(n, \mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q}) = \frac{1}{h\, \varphi(\mathfrak{m})} T(n, \mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q}) .$$

Daraus folgt, daß in jeder Klasse $\mathfrak{p}_0^n \pi_i \alpha_j \Gamma$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q}$ teilerfremde, gleich viele Elemente vom Grade $n > 2g - 2 + g(\mathfrak{P}\mathfrak{m}\mathfrak{q})$ vorkommen.

3. Die Menge B_{ij} von a sei folgendermaßen definiert :

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})}} P_2 \subset \pi_i \alpha_j \Gamma \iff \mathfrak{a} \in B_{ij} , \quad \text{wo} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1 \quad , \quad P_2 = P_0 \cap \Gamma \text{ ist.}$$

Dadurch wird eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von jeder Klasse $\pi_i \alpha_j \Gamma$ von $A_{0\mathfrak{m}}/\Gamma$ auf die Divisorenmenge B_{ij} hergestellt. Die Menge $\{B_{ij} \;, \; i = 1, \dots, h \;; \; j = 1, \dots, \varphi(\mathfrak{m})\}$ bildet also zu $A_{0\mathfrak{m}}/\Gamma$ isomorphe Gruppe. Andererseits besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung von der Menge $\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})}} P_2 \;, \; (\mathfrak{a}, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1\right\}$ auf $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$, wo $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$ die Gruppe der zu $\mathfrak{P}\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren ist. Die erste bildet zu $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$ isomorphe Gruppe. Wir möchten daher den Dirichletschen Satz auf die Gruppe $\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})}} P_2 \;, \; (\mathfrak{a}, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1\right\}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, auf $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$ erweitern. Da zwischen B_{ij} und der Menge

$$\left\{\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})}{}_{\pi_i}} P_2\right\} \quad \text{durch} \quad \mathfrak{a} \in B_{ij} \iff \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})}{}_{\pi_i}} P_2 \subset \alpha_j \Gamma$$

eine gewonnene Zuordnung besteht, kann man den Dirichletschen Satz auf die Elemente $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})}{}_{\pi_i}} \in H$ anwenden, wo $\mathfrak{a}$ ganze Divisoren durchläuft und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1$ ist.

Also lautet der Satz:

In jeder Klasse α_j mod $\mathfrak{m}$ gibt es unendlich viele Elemente $\dfrac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0{}^{g(\mathfrak{p})}\,\pi_i} \in H$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \not| \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}$ die Primdivisoren durchläuft. Darüber hinaus gilt für ein festes π_i und ein festes α_j

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p}) \leq g(z) \\ \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0{}^{g(\mathfrak{p})}} P_2 \subset \pi_i \alpha_j \Gamma}} \frac{g(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} g(z) + O(1)$$

und auch für eine feste Klasse $\alpha_j \Gamma$

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p}) \leq g(z) \\ \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0{}^{g(\mathfrak{p})}\pi_i} \in \alpha_j \Gamma}} \frac{g(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{\varphi(\mathfrak{m})} g(z) + O(1).$$

4. Arithmetisch - linearen Transformationen:

$\mathfrak{G}$ sei die Menge der nach dem Grade n und der Klasse $\pi_i \alpha_j \Gamma$ geordneten zu $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$ gehörenden ganzen Divisoren. Genau wie im ersten Kapitel läßt sich die arithmetisch - lineare Transformation, durch eine komplexe Funktion - deren Argumente die zu $\mathfrak{P}\,\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren sind und die für die Argumente negativen Grades verschwindet - und eine komplexe arithmetische Funktion - die nur für die zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Divisoren definiert ist - auf folgende Weise erklären:

$$S_\alpha f(z) = \sum_{\mathfrak{a}} \alpha(\mathfrak{a}) f\left(\frac{z}{\mathfrak{a}}\right),$$

wobei f eine komplexe -, α eine komplexe arithmetische Funktion, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ und z; $(z, \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}) = 1$ ein Divisor ist.

$\bar{A}$: Die Menge der komplexen arithmetischen Funktionen.

$\bar{F}$: Die Menge der komplexen Funktionen.

$\bar{T}$: Die Menge der arithmetisch - linearen Transformationen.

$\bar{T}$ und $\bar{A}$ bilden zwei verschiedene Algebren über dem Körper der komplexen Zahlen. Die durch $\alpha \to S_\alpha$ definierte, umkehrbar eindeutige Abbildung von der Algebra $\bar{A}$ auf die $\bar{T}$ ist ein Isomorphismus, während die Multiplikation nicht erhalten bleibt, sondern die gewöhnliche Multiplikation zur konvolutischen übergeht und umgekehrt d. h.

$$S_{\alpha \circ \beta} = S_\alpha S_\beta \quad , \quad S_{\alpha\beta} = S_\alpha \circ S_\beta \; .$$

Bezüglich beider Multiplikationen gelten das assoziative - und kommutative Gesetz. Es sei ϑ eine komplexe Zahl, $\alpha, \beta, \gamma \in \bar{A}$ und $f \in \bar{F}$. Dann gilt

$$S_{\vartheta\alpha} = S_\alpha \vartheta f = \vartheta S_\alpha f$$

$$S_\alpha f + S_\beta f = S_{\alpha+\beta} f$$

$$\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha \qquad \text{(Kommutatives Gesetz)}$$
$$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma) \qquad \text{(Assoziatives Gesetz)}$$
$$\alpha \circ (\beta + \gamma) = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma \qquad \text{(Distributives Gesetz)}$$

indem man $\alpha \circ \beta$ durch die Beziehung

$$S_{\alpha \circ \beta} f = S_\alpha S_\beta f$$

definiert.

In $\bar{A}$ kann man bezüglich der beiden Multiplikationen zwei verschiedene Einselemente definieren :

(a) i ; $i(\mathfrak{a}) = 1$, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$: Das Einsclement bezüglich gewöhnlicher Multiplikation

(b) ε ; $\varepsilon(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{a} = 1 \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} \neq 1 \end{cases}$, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$: Das Einselement bezüglich konvolutischer Multiplikation.

Es gilt $\varepsilon = i \circ \mu$, wo μ eine verallgemeinerte Möbiussche Funktion ist :

$$\mu(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathfrak{a} \text{ ein Primdivisorquadrat enthält.} \\ (-1)^r & \text{falls } \mathfrak{a} \text{ aus } r \text{ verschiedenen Primdivisoren zusammengesetzt ist} \\ 1 & \text{falls } \mathfrak{a} = 1 \text{ ist.} \end{cases}$$

Definieren wir einige zu $\bar{A}$ oder zu $\bar{F}$ gehörenden Funktionen, die wir später benutzen, auf folgende Weise :

E : $E(z) = q^{g(z)}$: Reelle Größe, wobei z zu $\mathfrak{P}\mathfrak{m}$ teilerfremder Divisor nicht negativen Grades ist.

L : $L(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$. Somit ist $L \in \bar{A}$. Für $\alpha, \beta \in \bar{A}$ gilt $L(\alpha \circ \beta) = (L\alpha) \circ \beta + \alpha \circ (L\beta)$.

log : $\log z = g(z)$ für die Divisoren z nicht negativen Grades mit $(z, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1$. Somit ist $\log \in \bar{F}$. Für $f \in \bar{F}$, $\alpha \in \bar{A}$ gilt $\log z \; S_\alpha f(z) = S_{L\alpha} f(z) + S_\alpha \log z \, f(z)$, wo z mit $g(z) > 0$, $(z, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1$ ein Divisor ist.

Λ : $\Lambda(\mathfrak{a}) = \begin{cases} L(\mathfrak{p}) & \text{falis } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^e \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{p}^e \end{cases}$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{P}\mathfrak{m}$ ein Primdivisor und e eine natürliche Zahl ist. Somit gilt $\Lambda \in \bar{A}$ und $\Lambda = L \circ \mu$.

$\bar{\Lambda}$: $\bar{\Lambda}(\mathfrak{a}) = \begin{cases} L(\mathfrak{p}) & \text{falls } \mathfrak{a} = \mathfrak{p} \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{p} \end{cases}$, wo $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{P}\mathfrak{m}$ ein Primdivisor ist. Somit gilt $\bar{\Lambda} \in \bar{A}$. Ist α vollständig multiplikativ über $\mathfrak{G}$, so gilt für $\beta, \gamma \in \bar{A}$

$$\alpha(\beta \circ \gamma) = (\alpha\beta) \circ (\alpha\gamma).$$

i : $i(z) = 1$ für z, $(z, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1$ und $g(z) \geq 0$.

$i_\mathfrak{u}$: $i_\mathfrak{u}(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{a} \in B_{ij} \quad i = 1, \dots, h \; ; \; j = 1, \dots, \varphi(\mathfrak{m}) \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} \notin B_{ij} \end{cases}$, wo $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{u} \in B_{ij}$ ist,

Es sei χ der Charakter und χ_0 der Hauptcharakter von der Gruppe $\{B_{ij}\}$. Nun gilt

$$i_{\mathfrak{u}} = \frac{1}{h\,\varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\chi} \bar{\chi}(\mathfrak{u})\,\chi$$

ξ : $\xi = \chi_0 i$, wo χ ein reeller Nichthauptcharakter ist.

$$\bar{\xi} \ : \ \bar{\xi}(\mathfrak{a}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{a} = \mathfrak{b}^2 \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}^2 \end{cases} \quad \text{für } \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{G}.$$

O : Ist für z; $(z, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1$; $g(z) > 0$ und $g(z) > g(z_0)$

$$|f_1(z)| < K\,|f_2(z)| \quad ,$$

so heißt $f_1(z) = O(f_2(z))$, wobei $f_1, f_2 \in \bar{F}$, K eine feste positive Zahl und z_0; $(z_0, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1$, $g(z_0) \geq 0$ ein Divisor ist.

Nach Hilfssatz 1 ist die Anzahl der Divisoren aus $\mathfrak{G}$ vom Grade $n > 2g-2+g(\mathfrak{P}\mathfrak{m}) = d_0$

$$a_t\, q^n \quad \text{mit} \quad a_t = \frac{h}{(q-1)\, q^{g-1}} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{P}\mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right).$$

Da nach Hilfssatz 2 in jeder primen Restklasse mod $\mathfrak{m}$ oder in der zugeordneten Menge B_{ij} gleich viele zu $\mathfrak{P}\mathfrak{m}$ teilerfremde ganze Divisoren $\mathfrak{a}$ von festem Grade $n > d_0$ vorkommen, gilt offenbar für $\chi \neq \chi_0$, $\mathfrak{a}_t \in \mathfrak{G}$

$$\sum_{d_0 < g(\mathfrak{a}) < g(\mathfrak{a}_t)} \chi(\mathfrak{a}) = 0\,.$$

Für die Summe $\sum_{\mathfrak{a}} \chi$, die über den Abschnitt zu erstrecken ist, den man $\mathfrak{G}$ durch Abschneiden an beiden Seiten erhalten kann, gilt für eine passende feste Zahl $K > 0$

$$\left| \sum_{\mathfrak{a}} \chi \right| < K.$$

Der Gedanke über diese neue Erweiterung des Dirichletschen Satzes stimmt fast mit dem im Kapitel I überein. Hauptsächlich wenden wir hier die arithmetisch-linearen Transformationen auf die komplexen Funktionen an und untersuchen, wie sie die Ordnungen der komplexen Funktionen nach einer Maßfunktion (z. B. nach „O") ändern. Es läßt sich auf folgende Fälle zurückführen :

(a) Die Ordnung der arithmetischen Funktion vergrößern und das Resultat vergleichen.

(b) Eine andere arithmetische Funktion benutzen und das Resultat vergleichen.

(c) Von dem Dirichletschen Satz (5.1) Gebrauch machen,

(5.1) $$S_{\chi\psi\Phi} - \beta(\chi, \psi)_{\mathfrak{G}}\ \Phi(z) = 0$$

$$\text{mit} \quad \beta(\chi, \psi) = \sum_{\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a})\,\psi(\mathfrak{a}) \,, \qquad \mathfrak{a} \in \mathfrak{G} \ ; \ (z, \mathfrak{P}\mathfrak{m}) = 1 \ g(z) > d_0 \,,$$

wobei ψ eine über $\mathfrak{G}$ abnehmende, gegen Null strebende, nur vom Grade des Arguments abhängige, positive arithmetische Funktion, Φ eine über der Menge der zu $\mathfrak{P}\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren nicht negativen Grades vollständig multiplikative, nur vom Grade des Arguments abhängige komplexe Funktion und χ ein Nichthauptcharakter der Gruppe $\{B_{ij}\}$ ist.

(d) Die folgende halbalgebraische Formel benutzen :

$$(5.2)\qquad \alpha \in \bar{A}\ ,\quad S_{\alpha L + \alpha\,\circ}\left[\frac{1}{a_1}\, i - \frac{C(i\,,E)}{a_1}\,\varepsilon\right] E(z) = \log z\ S_\alpha\ E(z)\,,$$

wo $z\,;(z, \mathfrak{P}\,\mathfrak{m}) = 1,\ ,\ g(z) > 0$ und

$$C(i\,,E) = \sum_{0 \leq g(\mathfrak{a}) \leq d_0} \frac{1}{E(\mathfrak{a})} - a_1 \sum_{0 \leq n \leq d_0} 1 \quad \text{gelten.}$$

Wir werden nun das oben erwähnte durch Beispiele erklären :

(a) 1. Unter Berücksichtigung von $|\mu| \leq 1\ ;\ |\mu| \leq i$ gilt $|S_\mu\, i(z)| < S_i\, i(z)$. Wie man später feststellen kann, ist $S_i\, i(z) = O(E(z))$.

(a) 2. Auf Grund von $|\chi\, \Lambda| \leq \Lambda$ und für $f(z) \geq 0,\ f(z) = O(i(z))$ gilt

$$|S_{\chi\Lambda}\ f(z)| < S_\Lambda\ f(z) = O(S_\Lambda\ i(z))$$

(b) Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ ist $\xi(\mathfrak{a}) \geq 0$ und $\xi(\mathfrak{a}^2) \geq 1$.

Bew. : Es sei $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i^{e_i}$ seine kanonische Primdivisorzerlegung. Für $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{G}$ gilt

$$\xi(\mathfrak{a}) = (\chi_\circ i)(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}'|\mathfrak{a}} \chi(\mathfrak{a}') = \prod_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=0}^{e_i} \chi(\mathfrak{p}_i)^j\right).$$

Da hier $\chi \neq \chi_0$ ein reeller Charakter ist, folgt $\chi(\mathfrak{p}_i) = +1$ oder -1, $(i=1, \ldots, s)$. Dann gilt

$$\sum_{j=0}^{e_i} \chi(\mathfrak{p}_i)^j \geq 1 \qquad \text{falls} \qquad 2\,|\,e_i\,,$$

$$\sum_{j=0}^{e_i} \chi(\mathfrak{p}_i)^j \geq 0 \qquad \text{falls} \qquad 2 \nmid e_i\,.$$

Mann kann daraus schließen, daß $\xi(\mathfrak{a}) \geq 0$ und $\xi(\mathfrak{a}^2) \geq 1$ ist.

Aus der Definition von $\bar{\xi}$ folgt $S_\xi \sqrt{E(z)} \geq S_{\bar{\xi}} \sqrt{E(z)}$. Wie man auch später nachweisen kann,

$$S_{\bar{\xi}} \sqrt{E(z)} = \tfrac{1}{2}\, a_1 \sqrt{E(z)}\ \log z + C(i, E) \sqrt{E(z)}\,.$$

(c) Für $\chi \neq \chi_0\ ,\ \psi = \dfrac{1}{E}\ ,\ \Phi = E\ \ ;\ \ \beta\left(\chi\ ,\ \dfrac{1}{E}\right) = \beta(\chi)$ und $g(z) > d_0$ folgt aus (5.1)

$$S_{\chi - \beta(\chi)\,\varepsilon}\ E(z) = 0\,.$$

(d) Für $\alpha \in \bar{A}$ gilt

$$\log z\ S_\alpha\ E(z) = S_\alpha\ \log z\ E(z) + S_{L\alpha}\ E(z)\,.$$

Mit Hilfe der Beziehung $S_i E(z) = a_1 E(z) \log z + C(i, E) E(z)$, die wir später nachweisen, folgt

$$S_{\mathfrak{a}L + \mathfrak{a}\circ}\left[\frac{1}{a_1}\, i - \frac{C(i,E)}{a_1}\,\varepsilon\right] E(z) = \log z\, S_{\mathfrak{a}}\, E(z) \tag{5.2}$$

6. Nun werden wir beweisen, daß folgende Ausdrücke (6.1) und (6.2) zueinander äquivalent sind:

$$S_{Ai_{\mathfrak{u}}} - \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})}\, \Lambda\, E(z) = O\,(E(z)) \tag{6.1}$$

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p}) \leq g(z) \\ \mathfrak{p}, \mathfrak{u} \in B_{ij}}} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})} = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O\,(1) \tag{6.2}$$

wir betrachten folgende Behauptungen, die wir im Kapitel II. 7 nachweisen:

$$S_{A - \bar{A}}\, E(z) = O(E(z)) \tag{6.3}$$

$$S_{A - \frac{1}{a_1} i}\, E(z) = O\,(E(z)) \tag{6.4}$$

$$S_i\, E(z) = a_1 E(z) \log z + C(i, E)\, E(z) \tag{6.5}$$

Nach Definiton von $i_{\mathfrak{u}}$ ist für die linke Seite von (6.1)

$$S_{Ai_{\mathfrak{u}}} - \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})}\, \Lambda\, E(z) = E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a}) \leq g(z) \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{u} \in B_{ij}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} - \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} S_A\, E(z)$$

aus (6.3) folgt

$$S_{A - \bar{A}}\, E(z) = E(z) \sum_{g(\mathfrak{a}) \leq g(z)} \frac{\Lambda(\mathfrak{a}) - \bar{\Lambda}(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} \geq E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a}) \leq g(z) \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{u} \in B_{ij}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a}) - \bar{\Lambda}(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} \geq 0$$

oder

$$E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a}) \leq g(z) \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{u} \in B_{ij}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} = E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a}) \leq g(z) \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{u} \in B_{ij}}} \frac{\bar{\Lambda}(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} + O\,(E(z)). \tag{6.6}$$

auf Grund von (6.4) und (6.5) ist also

$$S_{Ai_{\mathfrak{u}}} - \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})}\, \Lambda\, E(z) = E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a}) \leq g(z) \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{u} \in B_{ij}}} \frac{\bar{\Lambda}(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} - \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} E(z) \log z + O\,(E(z). \tag{6.1}$$

Nach Definition von $\bar{\Lambda}$ folgt aus (6.1)

$$(6.2)\qquad \sum_{\substack{g(\mathfrak{p})\leqq g(z)\\ \mathfrak{p},\mathfrak{u}\in B_{ij}}} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})} = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})}\log z + O(1)$$

Dagegen kann man mit Hilfe (6.3), (6.6), (6.4) und (6.5) von (6.2) zu (6.1) übergehen. Also ist es bewiesen, daß (6.1) und (6.2) zueinander äquivalent sind.

Nun beweisen wir die Behauptung (6.2) mit folgenden Beziehungen: (6.3), (6.4), (6.5) auf die wir im Kapitel II. 7 eingehen werden,

$$(6.7)\quad \text{Ist } \chi \neq \chi_0,\ \beta\left(\chi, \frac{1}{E}\right) = \beta(\chi) \neq 0, \text{ so ist } S_{\chi\Lambda}\, E(z) = \frac{\beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)}{\beta(\chi)} E(z)$$

$$(6.8)\quad \text{Ist } \chi \neq \chi_0,\ \beta(\chi) = 0, \qquad \text{so ist } S_{\chi\Lambda + \frac{1}{a_1} i}\, E(z) = \frac{C(i, E)}{a_1} E(z)$$

$$(6.9)\quad \text{Ist } \chi \neq \chi_0 \text{ und reell}, \qquad \text{so ist } S_{[\chi - \beta(\chi)\varepsilon]_0 i} \sqrt{E(z)} = O\left(\sqrt{E(z)}\right).$$

$$(6.10)\qquad S_\xi \sqrt{E(z)} \geq S_{\bar\xi} \sqrt{E(z)} = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{E(z)} \log z + C(i, E)\sqrt{E(z)}$$

$$(6.11)\qquad \chi_0 = i$$

Mit $i_{\mathfrak{u}} = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\chi} \chi(\mathfrak{u})\chi$ gilt

$$E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a})\leqq g(z)\\ \mathfrak{a},\mathfrak{u}\in B_{ij}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} = S_{\Lambda i_{\mathfrak{u}}} E(z) = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar\chi(\mathfrak{u})\, S_{\chi\Lambda}\, E(z) + \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} S_{\chi_0\Lambda}\, E(z)$$

oder aus (6.6), (6.7), (6.8) und (6.11) folgt

$$O(E(z)) + E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{p})\leqq g(z)\\ \mathfrak{a},\mathfrak{u}\in B_{ij}}} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})} = E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{a})\leqq g(z)\\ \mathfrak{a},\mathfrak{u}\in B_{ij}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})} =$$

$$= \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} \left[S_\Lambda E(z) - \sum_{\beta(\chi)=0} \bar\chi(\mathfrak{u})\, S_{\frac{1}{a_1} i}\, E(z)\right] + O(E(z))$$

Insbesondere gilt für $\mathfrak{u} = 1$ und unter Berücksichtigung von (6.3) und (6.4)

$$0 \leqq E(z) \sum_{\substack{g(\mathfrak{p})\leqq g(z)\\ \mathfrak{a},\mathfrak{u}\in B_{ij}}} \frac{L(p)}{E(p)} = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})} (1 - t)\, E(z) \log z + O(E(z))$$

wo t die Anzahl von χ mit $\beta(\chi) = 0$ ist.

Da für ein möglichst großes $g(z)$ $0 \leqq t \leqq 1$ gilt und wegen $\beta(\bar\chi) = \overline{\beta(\chi)}$ aus $\beta(\chi) = 0$, $\beta(\bar\chi) = 0$ folgt muß χ mit $\beta(\chi) = 0$ reel sein, wobei $\bar\chi$, $\overline{\beta(\chi)}$ zu χ, $\beta(\chi)$ konjugiert sind.

Andererseits folgt aus (6.9)

$$S_{\chi_0 i - \beta(\chi) i}\sqrt{E(z)} = O\left(\sqrt{E(z)}\right)$$

und daher unter Berücksichtigung von $\beta(\chi)=0$ und der Definition von ξ

$$S_\xi \sqrt{E(z)} = O\left(\sqrt{E(z)}\right)$$

Für ein möglichst großes $g(z)$ steht diese letzte Beziehung im Falle $t=1$ mit (6.10) im Widerspruch. Also ist $t=0$. Somit erhält man

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p})\leq g(z)\\ \mathfrak{p},\mathfrak{u}\in B_{ij}}} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})} = \frac{1}{h\varphi(\mathfrak{m})}\log z + O(1) \tag{6.2}$$

Nun betrachten wir die später zubeweisenden Beziehungen. Sie sind : (6.3); (6.4), (6.5), (6.7), (6.9) und (6.10). (6.3), (6.4), (6.7) und (6.8) drücken aus, daß der Reihe nach, die durch die arithmetischen Funktionen $\Lambda - \overline{\Lambda}$; $\Lambda - i$; $\chi\Lambda$, $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi)\neq 0$ und $\chi\Lambda + \frac{1}{a_1} i$, $\chi\neq\chi_0$, $\beta(\chi)=0$ gebildeten arithmetisch-linearen Transformationen die Ordnung von $E(z)$ nicht vergrößern. (6.9) zeigt auch, daß die durch $[\chi - \beta(\chi)\varepsilon]_0 i$ (mit reellem $\chi\neq\chi_0$) gebildete Transformation die Ordnung von $\sqrt{E(z)}$ nicht ändert.

7. Die folgenden Beziehungen kann man durch direkte Rechnung erhalten, mit deren Hilfe man die oben erwähnten Beziehungen verwirklicht:

$$S_i\sqrt{E(z)} = a_1\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1}E(z) + C(i,\sqrt{E})\sqrt{E(z)}, \tag{7.1}$$

$$C(i,\sqrt{E}) = \sum_{0\leq g(\mathfrak{a})\leq d_0}\frac{1}{\sqrt{E(\mathfrak{a})}} - a_1\sum_{0\leq n\leq d_0}(\sqrt{q})^n - \frac{a_1}{\sqrt{q}-1}$$

$$S_i E(z) = a_1 E(z)\log z + C(i,E)E(z),\quad C(i,E) = \sum_{0\leq g(\mathfrak{a})\leq d_0}\frac{1}{E(\mathfrak{a})} - a_1\sum_{0\leq n\leq d_0}1 \tag{6.5}$$

$$S_{\frac{q-1}{q a_1} i - \frac{q-1}{q a_1}C(i,i)\varepsilon}\, i(z) = E(z),\quad C(i,i) = \sum_{0\leq g(\mathfrak{a})\leq d_0}1 - a_1\sum_{0\leq n\leq d_0}q^n - \frac{a_1}{q-1} \tag{7.2}$$

$$S_i\, i(z) = a_1\frac{q}{q-1}E(z) + C(i,i)\, i(z) \tag{7.3}$$

$$S_L\, i(z) = a_1\frac{q}{q-1}E(z)\log z - a_1\frac{q}{(q-1)^2}E(z) + C(L,i), \tag{7.4}$$

$$C(L,i) = \sum_{0\leq g(\mathfrak{a})\leq d_0}\log\mathfrak{a} - a_1\sum_{0\leq n\leq d_0}n q^n + q_1\frac{q}{(q-1)^2}$$

$$S_i \log z = a_1 \frac{q}{(q-1)^2} E(z) + C(i,i) \log z + a_1 \frac{q}{(q-1)^2} - 2\, C(L,i). \tag{7.5}$$

Lemma 1. $S_\mu E(z) = O(E(z))$

Bew.: Aus (7.2) und $\mu_\circ i = \varepsilon$; $\mu_0 \varepsilon = \mu$ erhält man

$$S_\mu [S_{\frac{q-1}{q a_1} i - \frac{q-1}{q a_1} C(i,i)\varepsilon}\; i(z)] = \frac{q-1}{q a_1} - \frac{q-1}{q a_1} C(i,i)\, S_\mu\, i(z)$$

aus $|\mu| \leq i$ und (7.3) folgt

$$S_\mu E(z) = O(E(z))$$

Lemma 2. $S_\Lambda i(z) = O(E(z))$

Bew.: Aus $\Lambda = L_0\, \mu$, (7.4) und (6.5) erhält man

$$S_\Lambda i(z) = S_\mu [a_1 \frac{q}{q-1} E(z) \log z - a_1 \frac{q}{(q-1)^2} E(z) + C(L,i)] =$$

$$= \frac{q}{q-1} - a_1 \frac{q}{(q-1)^2} S_\mu E(z) + C(L,i)\, S_\mu\, i.$$

Aus Lemma 1. folgt

$$S_\Lambda i(z) = O(E(z)).$$

Lemma. 3. $S_{\Lambda - \bar{\Lambda}} E(z) = O(E(z))$

Bew.: Aus den Definitionen von Λ und $\bar{\Lambda}$ ergibt sich

$$0 \leq S_{\Lambda-\bar{\Lambda}} E(z) = E(z) \sum_{\substack{e g(\mathfrak{p}) \leq g(z) \\ e > 1}} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})} < E(z) \sum_{\substack{e=2 \\ \mathfrak{p}}}^{\infty} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})^e} = E(z) \sum_{\mathfrak{p}} \frac{L(\mathfrak{p})}{E(\mathfrak{p})\,[E(\mathfrak{p}) - 1]},$$

wo e die natürlichen Zahlen und $\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{P}\mathfrak{m}$ die Primdivisoren durchlaufen. Daher gilt

$$0 \leq S_{\Lambda-\bar{\Lambda}} E(z) < E(z) \sum_{\mathfrak{a}} \frac{L(\mathfrak{a})}{E(\mathfrak{a})\,[E(\mathfrak{a}) - 1]}$$

Da die Anzahl der zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Divisoren vom Grade $g(\mathfrak{a})$, $a_1\, q^{g(\mathfrak{a})}$ ist, folgt

$$0 \leq S_{\Lambda-\bar{\Lambda}} E(z) < E(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - 1},$$

wo n die natürlichen Zahlen durchläuft. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^n - 1}$ ist konvergent, und damit ist der Beweis beendet.

Lemma : 4. $S_{\Lambda - \frac{1}{a_1} i} E(z) = O(E(z))$

Bew.: Aus (7.2) und $L = \Lambda_0\, i$ folgt

$$S_A - \frac{1}{a_1} i \left[S_{\frac{q-1}{qa_1} i - \frac{q-1}{qa_1} C(i,i)\varepsilon} i(z) \right] = \frac{q-1}{qa_1} S_L \, i(z) - \frac{q-1}{qa_1} C(i,i) S_\Lambda \, i(z) - \frac{q-1}{qa_1^2} S_{i_0 i} i(z) +$$

$$\frac{q-1}{qa_1^2} C(i,i) S_i(z).$$

Aus (7.4), Lemma 2, (7.3) und (6.5) erhält man

$$S_{A - i \frac{1}{a_1}} E(z) = O(E(z)).$$

Lemma 5. Ist $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi) \neq 0$, so ist $S_{\chi\Lambda} E(z) = \dfrac{\beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)}{\beta(\chi)} E(z)$

Bew.: Setzt man in der Formel (5.1) für $g(z) > d_0$, $\psi = \dfrac{1}{E}$, $\Phi = E$, $\beta\left(\chi, \dfrac{1}{E}\right) = \beta(\chi)$, so gilt

(8.1) $$S_{\chi - \varepsilon\beta(\chi)} E(z) = 0.$$

Andererseits ist

(8.2) $$(\chi\Lambda)_0 \, [\chi - \beta(\chi)\varepsilon] = \chi L - \beta(\chi)\chi\Lambda.$$

Setzt man diesmal in der Formel (5.1) $\psi = \dfrac{L}{E}$, $\Phi = E$, so erhält man

$$S_{\chi L - \varepsilon\beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)} E(z) = 0 \qquad \text{oder}$$

(8.3) $$S_{\chi L} E(z) = \beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right) E(z).$$

Aus (8.1), (8.2) und (8.3) folgt

$$S_{\chi\Lambda} S_{\chi - \beta(\chi)\varepsilon} E(z) = S_{\chi L - \beta(\chi)\chi\Lambda} E(z) = 0 \qquad \text{oder}$$

$$S_{\chi\Lambda} E(z) = \frac{\beta\left(\chi, \frac{L}{E}\right)}{\beta(\chi)} E(z)$$

Lemma 6. Ist $\chi \neq \chi_0$, $\beta(\chi) = 0$, so ist $S_{\chi A + \frac{1}{a_1} i} E(z) = \dfrac{C(i,E)}{a_1} E(z)$.

Bew.: Setzt man $\alpha = \chi$ in der Formel (5.2) $S_{\alpha L + \alpha_0 \left[\frac{1}{a_1} i - \frac{C(i,E)}{a_1} \varepsilon \right]} E(z) = \log z \, S_\alpha E(z)$,

so erhält man $S_{\chi L + \chi_0 \left[\frac{1}{a_1} i - \frac{C(i,E)}{a_1} \varepsilon \right]} E(z) = \log z \, S_\chi E(z)$ und aus $\beta(\chi) = 0$, (8.1)

$$S_{\chi L + \chi_0 \left[\frac{1}{a_1} i - \frac{C(i,E)}{a_1} \varepsilon \right]} E(z) = 0.$$

Da $(\chi\mu)_0 \left[\chi L + \chi_0 \left(\dfrac{1}{a_1} i - \dfrac{C(i,E)}{a_1} \varepsilon \right) \right] = \chi A + \dfrac{1}{a_1} i - \dfrac{C(i,E)}{a_1} \varepsilon$ ist, folgt

$$S_{A\chi+\frac{1}{a_1}l}\, E(z) = \frac{C(l,E)}{a_l} E(z)$$

Lemma 7. (*a*) $S_\xi \sqrt{E(z)} \geq S_{\bar\xi} \sqrt{E(z)} = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{E(z)} \log z + C(l,E)\sqrt{E(z)}$

Bew.:

Aus Definition $\bar\xi$ und $C(l,E) = \sum\limits_{0 \leq g(\mathfrak{a}) \leq d_0} \frac{1}{E(\mathfrak{a})} - a_l \sum\limits_{0 \leq n \leq d_0} 1$ folgt

$$S_{\bar\xi} \sqrt{E(z)} = \sqrt{E(z)} \Big[\sum_{0 \leq g(\mathfrak{a}) \leq \frac{1}{2} g(z)} a_1 + \sum_{0 \leq g(\mathfrak{a}) \leq d_0} \frac{1}{E(\mathfrak{a})} - \sum_{0 \leq n \leq d_0} a_1 \Big]$$

(b) $S_{[\chi - \beta(\chi)\varepsilon]_0 l} \sqrt{E(z)} = O\left(\sqrt{E(z)}\right)$ und falls $\beta(\chi) = 0$, gilt $S_{\chi_0 l} \sqrt{E(z)} = O\left(\sqrt{E(z)}\right)$.

Bew.: Setzt man in (5.1) $\psi = \frac{1}{\sqrt{E}}$, $\Phi = \sqrt{E}$, so erhält man $S_{\chi - \beta\left(\chi, \frac{1}{\sqrt{E}}\right)\varepsilon} \sqrt{E(z)} = 0.$

Unter der Berücksichtigung von (7.1) und (8.1) folgt

$$S_{[\chi - \beta(\chi)\varepsilon]_0 l} \sqrt{E(z)} = S_{\chi - \beta(\chi)\varepsilon} \left[a_1 \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-1} E(z) + C(l, \sqrt{E}) \sqrt{E(z)} \right] =$$

$$= S_{\left[\beta\left(\chi, \frac{1}{\sqrt{E}}\right) - \beta(\chi)\right]\varepsilon} \sqrt{E(z)} = O\left(\sqrt{E(z)}\right)$$

Bemerkung: Es sei $\bar{\mathfrak{G}}$ die Menge der Elemente $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})} \pi_i} \in H$ mit $\mathfrak{a} \in A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$. Zwischen $\bar{\mathfrak{G}}$ und $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$ kann man mit Hilfe $\mathfrak{a} \rightarrow \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0^{g(\mathfrak{a})} \pi_i}$ eine umkehrbar eindeutige Zuordnung herstellen. Aus der Herstellung von $\pi_1 ..., \pi_n$ folgt, daß die Menge $\{\pi_1, ..., \pi_n\}$ bezüglich der Multiplikation nicht geschlossen ist. Wir können die arithmetisch — linearen Transformationen für $\bar{\mathfrak{G}}$ wie im Kapitel II. 4 verallgemeinern, während wir den Charakter χ nicht definieren können, weil das Produkt der in $\alpha_j F$ vorkommenden zu $\bar{\mathfrak{G}}$ gehörenden Elemente, über $\bar{\mathfrak{G}}$ hinaus gehen. Deswegen ist die Theorie in Kapitel II für $A_{\mathfrak{P}\mathfrak{m}}$ oder für $\{B_{ij}\}$ ausgebaut.

8. Vergleichung des Kapitels I mit dem Kapitel II:

(a) Die arithmetisch — linearen Transformationen sind über einer bezüglich der Multiplikation geschlossenen Menge definiert (Im kapitel I über der Menge der normierten Polynome, deren Koeffizienten zu einem endlichen Körper gehören; im Kapitel II über $\mathfrak{G}$ d.h. über der Menge der zu $\mathfrak{P}.\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren.) Hiermit gewinnen wir die Eigenschaften der arithmetisch — linearen Transformationen sowohl im kapitel I als auch im kapitel II.

(b) Man nimmt q^n als eine Funktion der Größe, die nur vom Grade des Arguments abhängt. Auf der anderen Seite ist q^n im Kapitel I die Anzahl der normierten Polynome n. Grades. Im Kapitel II ist die Anzahl der zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Divisoren vom Grade $n > d_0$ $a_1 q^n$, wo

q im Kapitel I die Ordnung des Koeffizientenkörpers, und im Kapitel II die Ordnung des Konstantenkörpers, n eine natürliche Zahl, und a_1, d_0 zwei Konstanten im Kapitel II bezeichnen.

(c) Da es im Kapitel I in jeder primen Restklasse mod B gleich viele normierte Polynome n. Grades, und im Kapitel II in jeder Klasse B_{ij} gleichviele ganze Divisoren n. Grades vorkommen, wird die Summe $\Sigma\chi$ beschränkt, die über einen Abschnitt zu erstrecken ist. (Im Kapitel 1 über einen Abschnitt der Kette der normierten Polynome, im Kapitel II über den von $\mathfrak{G}$). Somit erhält man den Dirichletscheu Satz (5.2) im Kapitel I, (5.1) im Kapitel II.

(d) Im Kapitel I wird die halbalgebraische Formel (3.3) und im Kapitel II (5.2) gebraucht. Nach diesem Vergleich lassen sich die Rechnungen in den Kapiteln I und II auf den Gebrauch der folgenden zurückführen :

1) von den zu (a) gehörenden algebraischen Beziehungen und (b)

2) von den zu (a) gehörenden algebraischen Beziehungen und (c).

Kapitel I unterscheidet sich nicht in (a) vom Kapitel II, sondern in (b), denn die Funktion der Größe im Kapitel II ist q^n, und die Anzahl der zu $\mathfrak{G}$ gehörenden Divisoren vom Grade $n > d_0$ ist $a_1 q^n$, aber für $n \leqq d_0$ besteht keine explizite Beziehung zwischen q^n und der Anzahl der Divisoren n. Grades. Dies läßt sich besonders beim Vergleich vom Kapitel I. 5 mit dem Kapitel II. 7 bemerken, da I (4.5) und II (6.5) sich unterscheiden. Dadurch ergeben sich folgende Unterschiede zwischen beiden Kapiteln :

Kapitel I		Kapitel II	
Lemma 5.	$S_{\Lambda} - i\,E(z) = O\,(E(z))$	Lemma 4.	$S_{\Lambda} - \frac{1}{a_1}\,i\,E(z) = O(E(z))$.
Lemma 7.	$S_{\chi,\Lambda} + i\,E(z) = 0,\ g(z) \geqq g(B)$	Lemma 6.	$S\chi_{\Lambda} + \frac{1}{a_1}\,i\,E(z) = \frac{C(i,E)}{a_1}\,E(z)\,;\, g(z) > d_0$
Lemma 8.	$S_{\bar{\xi}}\ \sqrt{E(z)} = \frac{1}{2}\sqrt{E(z)}\log z$	Lemma 7.	$S_{\bar{\xi}}\ \sqrt{E(z)} = \frac{1}{2}\,a_1\sqrt{E(z)}\log z + C(i,E)\sqrt{E(z)}$

DRITTES KAPITEL

1. Es sei K der Funktionenkörper mit dem endlichen Konstantenkörper Ω, $\mathfrak{p}_0$ Primdivisor 1. Grades, und $I_{\mathfrak{p}_0}$ der Integritätsbereich der für alle Primdivisoren von K außer $\mathfrak{p}_0$ ganze Elemente. Der Quotientenkörper dieser $I_{\mathfrak{p}_0}$ ist offenbar K selber. Wir bezeichnen mit $A_{\mathfrak{p}_0\mathfrak{m}}$, $A_{\mathfrak{m}}$, $A_{0\,\mathfrak{m}}$, $H_{\mathfrak{m}}$ und Γ der Reihe nach, die Gruppe der zu $\mathfrak{p}_0\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren, die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Divisoren, die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teiler fremden Divisoren 0. Grades, die Gruppe der zu $\mathfrak{m}$ teilerfremden Hauptdivisoren, die Gruppe der zu 1 mod $\mathfrak{m}$ kongruenten Divisoren, wo $\mathfrak{m}$; $(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}_0) = 1$ ein ganzer divisor ist. Wie im Kapitel II gelten $[A_{0\,\mathfrak{m}}\,; H_{\mathfrak{m}}] = h$, $[H_{\mathfrak{m}}\,; \Gamma] = \varphi(\mathfrak{m})$, wo h die Klassenzahl von A_0 / H bedeutet. Wir definieren L durch $L(\mathfrak{a}) = g(\mathfrak{a})$ für den ganzen Divisor $\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_0\mathfrak{m}) = 1$. Dann gilt der Satz 1 :

In jeder primen Restklasse mod $\mathfrak{m}$ von $I_{\mathfrak{p}_0}$ gibt es unendlich viele Elemente $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0 g(\mathfrak{p})} \in I_{\mathfrak{p}_0}$ und besteht die folgende asymptotische Formel

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0 g(\mathfrak{p})} \in \text{(Eine der primen Restklassen mod } \mathfrak{m}\text{)},\\ g(\mathfrak{p}) \leq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{h\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

wo $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor z, $(z, \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = 1$ ein Divisor und $\log z = g(z)$ ist.

Beweis : Genauso wie im II kann man ein vollständiges Repräsententensystem von der Gruppe $A_{0\,\mathfrak{m}} / H_{\mathfrak{m}}$ eindeutigerweise aufbauen. Seien $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_h$ das so gebildete vollständige Repräsentantensystem von $A_{0\,\mathfrak{m}} / H_{\mathfrak{m}}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\varphi(\mathfrak{m})}$ das von $H_{\mathfrak{m}} / \Gamma$. Jeder Klasse $\pi_i \alpha_j \Gamma$ von $A_{0\,\mathfrak{m}} / \Gamma$ läßt sich eine B_{ij} durch

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{a})} \in \alpha_i \pi_i \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{a} \in B_{ij} \ ; \ (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_0 \mathfrak{m}) = 1$$

zuordnen. Die Menge $\{B_{ij}\}$ bildet bezüglich der Multiplikation zu $A_{0\,\mathfrak{m}} / \Gamma$ isomorphe Gruppe von der Ordnung $h\,\varphi(\mathfrak{m})$. Andererseits ist offenbar die Gruppe $A_{\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}}$ zu der Gruppe $\left\{ \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{a})} \right\}$ mit $\mathfrak{n} \in A_{\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}}$ isomorph. Nach Hilfssatz 2 von II gibt es in jeder Klasse B_{ij} gleich viele ganze Divisoren vom Grade $n > 2g - 2 + g(\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = d_1$. Also ist die Anzahl der zu $\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}$ teilerfremden ganzen Divisoren vom Grade $n > d_1$ gleich $a_2 q^n$, wo

$$a_2 = \frac{h}{q^{g-1}(q-1)} \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{p}_0 \mathfrak{m}} \left(1 - \frac{1}{q^{g(\mathfrak{p})}}\right) \quad \text{ist.}$$

$\mathfrak{S}$ sei die Menge der zu $\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}$ teilerfremden, nach Grade und Klassen von $A_{0\,\mathfrak{m}} / \Gamma$ geordneten ganzen Divisoren. Nun betrachten wir das, was im Kapitel II. 8 angedeutet ist.

(a) Da $\bar{\mathfrak{S}}$ bezüglich der Multiplikation geschlossen ist, kann man über $\bar{\mathfrak{S}}$ die Theorie der aritmetisch-linearen Transformationen ausbauen und daraus ihre gleiche Eigenschaften ableiten.

(b) Wie im II kann man im III. 1 $q^{g(z)}$ als Größenfunktion annehmen, während die Anzahl der zu $\bar{\mathfrak{S}}$ gehörenden Divisoren vom Grade $n > d_1$, $a_2 q^n$ ist, wo $z ; (z, \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = 1$ einen Divisor und $g(z)$ den Grad von z bedeutet.

(c) **Bezeichnet** man den Charakter der Gruppe $\{B_{ij}\}$ durch χ und den Hauptcharakter durch χ_0, ist die Summe $\Sigma \chi$ für $\chi \neq \chi_0$ beschränkt, die über $\bar{\mathfrak{S}}$ zu erstrecken ist. Daher gilt der Dirichletsche Satz über Reihen genau so wie im früheren Kapitel. Wenn man die Konstanten a_1, d_0 durch a_2, d_1 ersetzt, so sind die Schlußweisen und Berechnungen in beiden Kapiteln ganz gleich. Dann gilt

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0 g(\mathfrak{p})} \in \alpha_j \Gamma\\ g(\mathfrak{p}) \leq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{h\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

Bemerkung : Beide Kapiteln II und III unterscheiden sich im folgenden wesentlich voneinander :

Da im III $(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}_0) = 1$ und im II $(\mathfrak{m}, \mathfrak{P}) = 1$ gilt, ist $\mathfrak{m}$ im III freier gewählt. Daher ist III. 1 allgemeiner als II. 1. Andererseits erhält man im II für $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{p})_{\pi_i}}$ für ein festes i z.B. $\pi_1 = 1$ gleiche asymptotische Formel. Ist im III. 1 $(\mathfrak{m}, \mathfrak{P}) = 1$, so enthält II, III.

Satz 2. Ist k eine natürliche Zahl und a Repräsentant einer Restklasse mod k, so gibt es in jeder primen Restklassen mod $\mathfrak{m}$ von K unendlich viele Elemente $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{p})} \in I_{\mathfrak{p}_0}$ mit $g(\mathfrak{p}) \equiv a$ mod k und es besteht folgende asymptotische Formel

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{p})} \in \pi_i \alpha_j \Gamma \\ g(\mathfrak{p}) \equiv a \bmod (k) \\ g(\mathfrak{p}) \leq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{Kh\, \varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

Beweis: Wir definieren nun die Klasse $B_{i\,ja}$ durch die Zuordnung:

$$\begin{array}{l} \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{a})} \in \pi_i \varkappa_j \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{a} \in B_{i\,ja}, \\ g(\mathfrak{a}) \equiv a \bmod k \end{array}$$

wo $\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = 1$ ein Divisor ist. Bezüglich der Multiplikation bildet die Menge $\{B_{i\,j}a;\ i = 1, \ldots, h;\ j = 1, \ldots, \varphi(\mathfrak{m});\ , a = 1, \ldots, k\}$ eine abelsche Gruppe, Ihre Ordnung ist offenbar $kh\,\varphi(\mathfrak{m})$. Wir bezeichnen Charakter der Gruppe mit χ^{**}. Diesen können wir auf folgende Weise bestimmen:

$$\chi^{**} = \chi^{*}\chi,$$

wo χ^{*}, χ Charaktere von der additiven Gruppe mod k und von der Gruppe $A_0\, \mathfrak{m}/\Gamma$ bedeuten, für die die folgenden gelten:

$$\begin{array}{l} \chi(\mathfrak{a}) = \chi(\pi_i \alpha_j \Gamma) \\ \chi^{*}(\mathfrak{a}) = \chi^{*}(g(\mathfrak{a})) \end{array} \text{ für } (\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = 1, \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0\, g(\mathfrak{a})} \in \pi_i \alpha_j \Gamma.$$

Die Anzahl der dadurch gewonnenen Charaktere $\chi^{*}\chi$ ist $h\,\varphi(\mathfrak{m})$ und keine zwei sind unter ihnen gleich. Wir nehmen $\overline{\mathfrak{G}}$ im Sinne von III. 1. d.h. die Menge der zu $\mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}$ teilerfremden nach Grade und nach Restklassen $\pi_i \varkappa_j \Gamma$ geordneten ganzen Divisoren. Unter der Betrachtung von II.8 kann man folgendes behaupten:

(a) Die Theorie der arithmetisch-linearen Transformationen kann man über $\overline{\mathfrak{G}}$ wie im III. 1 aufbauen und alle ihre Eigenschaften gewinnen. Wir definieren aber $i_{\mathfrak{u}}$ auf folgende Weise:

$$i_{\mathfrak{u}}(\mathfrak{a}) = \frac{1}{k\, h\, \varphi(\mathfrak{m})} \sum_{\chi^{**}} \overline{\chi}^{**}(\mathfrak{u})\, \chi^{**}(\mathfrak{a})$$

(b) Die Größenfunktion ist $q^{g(z)}$ wie im III. 1 und die Anzahl der zu $\overline{\mathfrak{G}}$ gehörenden ganzen Divisoren vom Grade $n > d_1$ ist $a_2 q^n$.

(c) Für $\chi^{**} \neq \chi_0^{**}$ ist die Summe $\Sigma \chi^{**}$ beschränkt, die sich über den Abschnitt von $\overline{\mathfrak{G}}$ erstrecken läßt. Somit erhält man den Dirichletschen satz über Reihen wie in II. Wenn man $\chi, h\varphi(\mathfrak{m}), a_1, d_0$ durch χ^{**}, $kh\varphi(\mathfrak{m}), a_2, d_1$ ersetzt, sind beide Kapitel II und III 2 gleich. Dann folgt

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0^{\,g(\mathfrak{p})}} \in \pi_i \alpha_j \Gamma \\ g(\mathfrak{p}) \equiv a \bmod (k) \\ g(\mathfrak{p}) \leqq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{k h \varphi(\mathfrak{m})} g(z) + O(1)$$

oder für $\pi_1 = 1$

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0^{\,g(\mathfrak{p})}} \in \alpha_j \Gamma \\ g(\mathfrak{p}) \equiv a \bmod (k) \\ g(\mathfrak{p}) \leqq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{k h \varphi(\mathfrak{m})} g(z) + O(1)$$

oder für $\pi_1 = 1$, $a = 0$

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}_0^{\,g(\mathfrak{p})}} \in \alpha_j \Gamma \\ g(\mathfrak{p}) \equiv 0 \bmod (k) \\ g(\mathfrak{p}) \leqq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{k h \varphi(\mathfrak{m})} g(z) + O(1).$$

3. Es sei $\mathfrak{c}$; $(\mathfrak{c}, \mathfrak{m}) = 1$; $g(\mathfrak{c}) = n > 0$ ein Divisor und $\mathfrak{d}$, $(\mathfrak{d}, \mathfrak{m}) = 1$ ein allgemeiner Divisor.

Satz 3. In jeder primen Restklasse mod $\mathfrak{m}$ gibt es unendlich viele Elemente $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}^\nu \mathfrak{d}} \in H$ und es besteht asymptotische Beziehungen

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}^\nu \vartheta} \in \alpha_j \Gamma \\ g(\mathfrak{p}) \leqq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{n h \varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

oder insbesondere für $\mathfrak{d} = 1$

$$\sum_{\substack{\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}^{\nu}} \in \alpha_j \Gamma \\ g(\mathfrak{p}) \leq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{nh\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

wo $\mathfrak{p}$ Primdivisoren und ν natürliche Zahlen durchlaufen.

Beweis. Es sei u ; $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = 1$, $g(\mathfrak{c}) = n$, $g(\mathfrak{d}) = \nu, \bar{\mathfrak{c}} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{p}_0{}^n}$ und $\bar{\mathfrak{d}} = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{p}_0{}^{\nu}}$.

Für ein kleinstes s für $\bar{\mathfrak{c}}^s \in \Gamma$ sei $C(\bar{\mathfrak{c}}) = \Gamma \cup \bar{\mathfrak{c}}\,\Gamma \cup \bar{\mathfrak{c}}^2\,\Gamma \cup \ldots \cup \bar{\mathfrak{c}}^{s-1}\,\Gamma$. Wir bezeichnen das vollständige Repräsentantensystem von $A_0\,{}_{\mathfrak{m}}/C(\bar{\mathfrak{c}})$ durch $\beta_i \left(i = 1, \ldots, \frac{h\,\varphi(\mathfrak{m})}{s}\right)$, und definieren die Klasse $\widetilde{B}_{ij}$ durch die Zuordnung

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0{}^{mns+nt+\nu}} \in \beta_i \bar{\mathfrak{c}}^j\, \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{a} \in \widetilde{B}_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, \frac{h\,\varphi(\mathfrak{m})}{s} \\ j = 0, \ldots, s-1 \end{array}$$

wo m eine natürliche Zahl t ; $0 \leq t < s$ eine ganze Zahl, $\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p}_0\, \mathfrak{m}) = 1$ ein Divisor ist. Nach Definition von $\bar{\mathfrak{c}}$, s, $\bar{\mathfrak{d}}$ gilt.

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}^{mns+nt+\nu}} \in \beta_i \bar{\mathfrak{c}}^j\, \Gamma \Leftrightarrow \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{c}^{ms+t}\,\mathfrak{d}} \in (\bar{\mathfrak{d}})^{-1}\, \beta_i \bar{\mathfrak{c}}^{j-t}\, \Gamma.$$

Nun definieren wir $\bar{B}_{ij}$ durch

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{p}_0{}^{ms}\,\mathfrak{d}} \in (\bar{\mathfrak{d}})^{-1} \beta_i \bar{\mathfrak{c}}^j\, \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{a} \in \bar{B}_{i,j}.$$

Nach Definitonen von $\widetilde{B}_{ij}$ und $\bar{B}_{ij}$ kommen die zu einer Klasse $\bar{B}_{i,j-t}$ gehörenden Divisoren $\mathfrak{a}$ mit $g(\mathfrak{a}) \equiv nt+\nu \mod (ns)$ in verschiedenen Klassen $\widetilde{B}_{ij}$ und umgekehrt.

Somit

Für $\mathfrak{a} \in \widetilde{B}_{i,j}$, $g(\mathfrak{a}) = nt + \nu \mod (ns)$ gilt $\mathfrak{a} \in \bar{B}_{i,j-t}$

Für $\mathfrak{a} \in \widetilde{B}_{i,j+1}$, $g(\mathfrak{a}) = n(t+1) + \nu \mod (ns)$ gilt $\mathfrak{a} \in \bar{B}_{i,j-t}$

....

Für $\mathfrak{a} \in \widetilde{B}_{i,j+s-1}$, $g(\mathfrak{a}) = n(t+s-1) + \nu \mod (ns)$ gilt $\mathfrak{a} \in \bar{B}_{i,j-t}$.

Die über die in der Klasse $\bar{B}_{i,j-t}$ vorkommenden Primdivisoren vom Grade $\leq g(z)$ erstreckte Summe $\sum_{\mathfrak{p}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}}$ läßt sich in s Teile zerlegen. Jeder Teil ist die Summe $\sum \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}}$, die über die zu einer Klasse $\widetilde{B}_{ij}$ gehörenden und nach Grade inderselben Klasse mod (ns) liegenden Primdivisoren erstreckt wird. Nach III. 2 gilt für die zu $\widetilde{B}_{ij}$ gehörenden Primdivisoren vom Grade $g(\mathfrak{p}) = nt + \nu \mod (ns)$

$$\sum_{g(\mathfrak{a}) \leqq g(z)} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{nsh\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$, daher auch für die in einer Klasse

$\bar{B}_{i,\, j-t}$ vorkommenden Primdivisoren

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p}) \leqq g(z) \\ \mathfrak{p} \in \bar{B}_{i,\, j-t}}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = s \sum_{\substack{\mathfrak{p} \in \tilde{B}_{ij} \\ g(\mathfrak{p}) \equiv nt+\nu \bmod (ns) \\ g(\mathfrak{p}) \leqq g(z)}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} + O(1) = \frac{1}{nh\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

Da $\varphi(\mathfrak{m})$ Klassen von $A_{0\mathfrak{m}}/\Gamma$ aus Hauptdivisoren bestehen, gilt insbesondere

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p}) \leqq g(z) \\ \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}^{\nu}\,.\,\mathfrak{d}} \in \alpha_j \Gamma}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{nh\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

Und anch für $\mathfrak{d} = 1$

$$\sum_{\substack{g(\mathfrak{p}) \leqq g(z) \\ \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{c}^{\nu}} \in \alpha_j \Gamma}} \frac{L(\mathfrak{p})}{q^{g(\mathfrak{p})}} = \frac{1}{nh\,\varphi(\mathfrak{m})} \log z + O(1)$$

(Diese Arbeit des Verfassers ist seine Dissertation und an das Dekanat der naturwissenchaftlichen Fakultät am 1. März 1961 eingereicht worden. Das Manuskript eingegangen am 1. November 1968.)

ÖZET

Yazarın bu doktora çalışmasında önce aritmetik - lineer transformasyonlar yardımıyle DIRICHLET teoreminin katsayılar cismi sonlu olan rasyonel fonksiyonlar cisminin normlanmış polinomlarma, sonra sabitler cismi sonlu olan cebirsel fonksiyonlar cisminde aritmetik- lineer transformasyonlar ithal edilip, bunun bir tatbikatı olarak, aynı teoremin cebirsel fonksiyonlar cisminin tam divizörlerine teşmili yapılmaktadır.