ÜBER DIE GRÖẞENORDNUNG DER KOEFFIZIENTEN EINIGER IN DER THEORIE DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN VORKOMMENDER POLYNOME

O. Ş. İÇEN

Es werden die Absolutbeträge der Zahlenkoeffizienten der Polynome $P_m(\wp(u), g_2, g_3)$, welche im der Multiplikationsformel der Weierstrassschen elliptischen Funktionen auftreten, nach oben abgeschätzt. Dabei wird eine obere Schranke der Form $e^{O(m^2)}$ gewonnen. Daraus wird eine obere Schranke derselben Form für die Zahlenkoeffizienten der Polynome R_m, S_n hergeleitet, wobei

$$\wp(m\,u) = \frac{R_m(\wp(n), g_2, g_3)}{S_m(\wp(u), g_2, g_3)}$$

eine Darstellung von $\wp(m\,u)$ als Quotient von zwei Polynomen in $\wp(u), g_2, g_3$ mit ganzen rationalen, insgesamt teilerfremden Koeffizienten ist.

In dieser Note handelt es sich um die in der Multiplikationsformel der Weierstraßschen elliptischen Funktion $\wp(u\,; g_2, g_3) = \wp(u)$ auftretenden Polynome P_m.

Es ist nämlich für $m > 1$

$$\wp(mu) = \begin{cases} \wp(u) - \dfrac{P_{m+1}\,P_{m-1}}{\wp'(u)^2\,P_m^2}, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \wp(u) - \dfrac{\wp'(u)^2\,P_{m+1}\,P_{m-1}}{P_m^2}, & \text{falls } m \text{ ungerade, wobei} \end{cases} \tag{1}$$

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\,\wp(u) - g_3 \tag{2}$$

ist, und $P_m = P_m(\wp(u), g_2, g_3) = P_m(x, g_2, g_3)$ mit $x = \wp(u)$ $(m = 1, 2, \ldots)$ Polynome in drei Variablen $\wp(u) = x, g_2, g_3$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind. Diese Polynome gehorchen dem in (3) und (4) unten gegebenen Induktionsgesetz :

$$\begin{cases} P_1 = 1\,,\ P_2 = -1\,,\ P_3 = 3x^4 - \dfrac{3}{2}g_2x^2 - 3g_3x - \dfrac{g_2^2}{16}, \\ P_4 = -2x^6 + \dfrac{5}{2}g_2x^4 + 10g_3x^3 + \dfrac{5}{8}g_2^2x^2 + \dfrac{1}{2}g_2g_3x + g_3^2 - \dfrac{g_2^3}{32}, \end{cases} \tag{3}$$

wobei $\wp(u) = x$ gesetzt wurde,

und

$$\begin{cases} (4_1) \quad P_{2n+1} = \begin{cases} \wp'(u)^4\,P_{n+2}\,P_n^3 - P^3_{n+1}\,P_{n-1}\,, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ P_{n+2}\,P_n^3 - \wp'(u)^4\,P^3_{n+1}\,P_{n-1}\,, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \geq 2) \\ (4_2) \quad P_{2n} = -P_n\,(P_{n+2}\,P^2_{n-1} - P^2_{n+1}\,P_{n-2}) \qquad (n \geq 3), \end{cases} \tag{4}$$

wobei $\wp'(u)^4$ als-laut (2)-durch $(4x^3 - g_2x - g_3)^2$ ersetzt zu denken ist [1,58].

Wir wollen im folgenden die Absolutbeträge der rationalen Zahlenkoeffizienten von $P_m(x, g_2, g_3)$ nach oben abschätzen, wobei eine obere Schranke derselben von der Form e^{cm^2}, mit einer numerisch berechenbaren Konstanten $c > 0$ sich ergeben wird. Dann mit Hilfe einer bekannten Abschätzung des Hauptnenners dieser Koeffizienten ergibt sich auch eine obere Abschätzung für die Absolutbeträge der Zähler derselben, woraus wir auf eine obere Abschätzung von der Form $e^{O(m^2)}$ der Koeffizienten von $R_m(x, g_2, g_3)$ und $S_m(x, g_2, g_3)$ in

$$\wp(mu) = \frac{R_m(x, g_2, g_3)}{S_m(x, g_2, g_3)} \tag{5}$$

schließen können, wobei (5) eine Darstellung von $\wp(mu)$ als Quotient von zwei Polynomen $R_m(\wp(u), g_2, g_3) = R_m(x, g_2, g_3)$ und $S_m(\wp(u), g_2, g_3) = S_m(x, g_2, g_3)$ mit ganzen rationalen, insgesamt teilerfremden Zahlenkoeffizienten ist.

Es werden jetzt einige leichte Vorbereitungen eingeschaltet.

Definition und Eigenschaften des Symbols $\|\ \|$ [1]**.**

Es sei ein Polynom

$$A = A(x, y, z) = \sum c_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \tag{6}$$

in drei Variablen x, y, z und mit rationalen Koeffizienten $c_{\alpha\beta\gamma}$ gegeben. Wir definieren $\|A\|$ als das Maximum der Absolutbeträge aller Koeffizienten von A, d. h.

$$A = \max_{\alpha,\beta,\gamma} |c_{\alpha\beta\gamma}| \tag{7}$$

Das so definierte Symbol $\|\ \|$ hat folgende Eigenschaften :

I. $\|\lambda A\| = |\lambda| \,.\, \|A\|$, wobei λ eine rationale Zahl bedeutet.

II. $\|A_1 + A_2 + \dots + A_k\| \leqq \|A_1\| + \|A_2\| + \dots + \|A_k\|$, wobei

$$A_i = A_i(x, y, z) = \sum c^{(i)}_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \quad (i = 1,\dots,k) \tag{8}$$

k Polynome in drei Variablen x, y, z und mit rationalen Koeffizienten bedeuten. Allgemeiner :

III. $\|\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k\| \leqq |\lambda_1| \,.\, \|A_1\| + |\lambda_2| \,.\, \|A_2\| + \dots + |\lambda_k| \,.\, \|A_k\|$,
wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ k rationale Zahlen bedeuten.

IV. $\|A_1 A_2 \dots A_k\| \leqq [(G_1 + 1)(G_2 + 1)\dots(G_k + 1)]^3 \,.\, \|A_1\| \,.\, \|A_2\| \dots \|A_k\|$, wobei G_i den Gesamtgrad von A_i nach x, y, z bezeichnet $(i = 1,\dots,k)$.

Beweis. I, II, III sind klar . Zu IV :

Es sei

$$A_1 \,.\, A_2 \dots A_k = \sum {}^k d_{\alpha\beta\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma \tag{9}$$

gesetzt. Dabei muß wegen (8)

[1]) In einem leicht verschiedenen Zusammenhang, d.h. für ein Polynom einer Variablen und mit komplexen Koeffizienten kommt dieses Symbol z.B. in [2,124] vor.

$$(10)\qquad kd_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=\alpha \\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_k=\beta \\ \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_k=\gamma}} c^{(1)}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}\, c^{(2)}_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}\ldots c^{(k)}_{\alpha_k\beta_k\gamma_k}$$

sein. Die Anzahl der überhaupt möglichen 3k-tupeln $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k, \beta_1,\ldots, \beta_k, \gamma_1,\ldots, \gamma_k)$ mit $0 \leq \alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i \leq G_i\ (i = 1, \ldots, k)$ ist $[(G_1 + 1)(G_2 + 1)\ldots(G_k + 1)]^3$. Also kann die Anzahl der Glieder rechts von (10) diese letztgenannte Zahl nicht überschreiten. Dies, verbunden mit $|c^{(i)}_{\alpha_i\beta_i\gamma_i}| \leq \| A_i \|\ (i = 1, \ldots, k)$ (wegen (7), (8)) gibt uns

$$(11)\qquad |kd_{\alpha\beta\gamma}| \leq [(G_1 + 1)(G_2 + 1)\ldots(G_k + 1)]^3 \,.\, \|A_1\| \,.\, \|A_2\| \ldots \|A_k\|$$

für alle α, β, γ. Aus (11) und der Definition (7) folgt nun die Behauptung IV.

Wir geben jetzt zwei bekannte Eigenschaften des Polynoms P_m in einer im folgenden zu benutzenden Form ([3,172] und [4,78]).

Lemma 1. Der Gesamtgrad des Polynoms P_m nach x, g_2, g_3 genügt der Abschätzung:

$$(12)\qquad \text{Grad von } (P_m) \leq 3m\,(m-1) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

(Wenn im folgenden von dem Grad eines Polynoms in drei Variablen die Rede sein wird, wird darunter immer der Gesamtgrad verstanden).

Beweis. Für $m = 1, 2, 3, 4$ aus den Formeln (3) klar. Für $m > 4$ wollen wir die Rekursionsformeln (4) benutzen, um den Induktionsbeweis zu beenden: Es sei nun (12) für diejenigen Polynome schon bewiesen, deren Index einen kleineren Wert hat als m. Um jetzt die Behauptung für m zu beweisen, unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem m ungerade oder gerade ist.

Falls m ungerade, d.h. $m = 2n + 1\ (n \geq 2)$ ist, dann ist der Grad von $(P_{n+2}\, P_n^3) \leq 12n^2 + 6$, und derjenige von $P^3_{n-1}\, P_{n-1}$ ist ebenfalls $\leq 12n^2 + 6$. Da der Grad von $\wp'(u)^4$ (als ein Polynom in x, g_2, g_3) laut (2) gleich 6 ist, folgt aus (4_1), daß, der Grad von $(P_{2n+1}) \leq 12n^2 + 12$. Da aber $12n^2 + 12 = 3\,(4n^2 + 4) \leq 3(2n + 1)\,2n$ für $n \geq 2$ ist, folgt: Grad von $(P_m) \leq 3m(m-1)$ für $m = 2n + 1\ (n \geq 2)$.

Falls m gerade, d.h. $m = 2n\ (n \geq 3)$ ist, dann ist der Grad von $(P_n\, P_{n+1}\, P^2_{n-1}) \leq 12n^2 - 12n + 18$ und ebenfalls ist: Grad von $(P_n\, P^2_{n+1}\, P_{n-2}) \leq 12n^2 - 12n + 18$. Aus (4_2) folgt hiernach: Grad von $(P_{2n}) \leq 12n^2 - 12n + 18$. Da aber $12n^2 - 12n + 18 \leq 12n^2 - 6n = 3.2n\,(2n - 1) = 3m\,(m-1)$ für $n \geq 3$ ist, folgt die Gültigkeit von (12) auch für $m = 2n$ und damit allgemein.

Lemma 2. Für den Nenner des Polynoms P_m gilt

$$(13)\qquad \text{Nenner von } (P_m) \mid 2^{m(m-1)}$$

(Unter dem Nenner eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten verstehen wir den Hauptnenner dieser Koeffizienten).

Beweis. Für $m = 1, 2, 3, 4$ aus den Formeln (3) klar. Für $m > 4$ bedienen wir uns eines, dem obigen ähnlichen, Induktionsschlußes mit Hilfe der Formeln (4_1), (4_2).

Der Fall $m = 2n + 1$ $(n \geq 2)$: Fassen wir uns (4_1) ins Auge. Laut Induktionsvoraussetzung werden die Koeffizienten von $P_{n+2}\,P_n^3$ durch Multiplikation mit $2^{(n+2)\,(n+1)\,+3n\,(n-1)} = 2^{4n^2+2}$, diejenigen von $P^3_{n+1}\,P_{n-1}$ durch Multiplikation mit $2^{3(n+1)\,n+(n-1)\,(n-2)} = 2^{4n^2+2}$ ganz. Da $\wp'\,(u)^4$ laut (2) ganzzahlige Koeffizienten hat, wird die rechte Seite von (4_1) und damit auch P_{2n+1} durch Multiplikation mit 2^{4n^2+2} ganze Koeffizienten erhalten. Da $4n^2 + 2 \leq 2n(2n + 1)$ für $n \geq 2$ gilt, wird das Polynom $2^{2n(2n+1)}\,P_{2n+1} = 2^{m\,(m-1)}\,P_m$ erst recht ganze rationale Koeffizienten haben. Also ist (13) im Falle $m = 2n + 1$ $(n \geq 2)$ gültig, falls es für kleinere Werte des Indexes als m gültig ist.

Der Fall $m = 2n$ $(n \geq 3)$: Auf gleiche Weise wie oben wird gezeigt, daß das Polynom $2^{4n^2-4n+6}\,P_{2n}$ ganze rationale Koeffizienten haben wird, falls (13) für kleinere Werte des Indexes als m gilt. Da aber $4n^2 - 4n + 6 \leq 2n\,(2n - 1)$ für $n \geq 3$ ist, wird $2^{2n\,(2n-1)}\,P_{2n} = 2^{m(m-1)}\,P_m$ erst recht ganze rationale Koeffizienten haben. Damit ist der Induktionsbeweis beendet.

Nun kommen wir zum Hauptziel dieser Note :

Satz. *Es gilt mit einem passenden, von m unabhängigen reellen Zahl $T > 1$*

$$\|P_m\| \leq T^{(m-1)\,(m-2)} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Beweis. Wir bedienen uns wieder einer Induktion nach m unter Benutzung der Formeln (3) und (4).

Laut (3) ist $\|P_1\| = 1$, $\|P_2\| = 1$, $\|P_3\| = 3$, $\|P_4\| = 10$, und die ersten vier Werte von $(m - 1)\,(m - 2)$ sind der Reihe nach 0, 0, 2, 6. Falls wir nun T der Bedingung.

$$T \geq \operatorname{Max}\left(1, 3^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{1}{6}}\right) \tag{*}$$

unterwerfen, wird (14) für $m = 1, 2, 3, 4$ erfüllt. Damit ist der erste Induktionsschritt beendet.

Zum zweiten Induktionsschritt (Beweis für $m > 4$) unter Heranziehung von (4) brauchen wir einige Vorbereitungen :

Es gilt zunächst

$$(15)\quad \begin{cases} (15_1) & \text{Grad von } (\wp'\,(u)^4) = 6 \\ & \text{und} \\ (15_2) & \|\wp'(u)^4\| = \|4\wp(u)^3 - g_2\,\wp\,(u) - g_3)^2\| = 16 \end{cases}$$

Andererseits folgt mit Hilfe von Lemma 1 oben und Eigenschaft IV von $\|\;\|$, der Reihe nach

$$\|P_{n+2}P_n^3\| \leq [(3(n + 2)\,(n + 1) + 1)\,(3n\,(n - 1) + 1)^3]^3 \cdot \|P_{n+2}\| \cdot \|P_n\|^3,$$

erst recht

$$\|P_{n+2}\,P_n^3\| \leq c_1\,n^{24} \cdot \|P_{n+2}\| \cdot \|P_n\|^3 \qquad (n \geq 2) \tag{16}$$

(Es werden hier und im folgenden $c_1, c_2, \ldots, c_9, c$ numerisch berechenbare, konstante positive reelle Zahlen bedeuten. Es kann z. B. $c_1 = (270)^3$ genommen werden.),

$$\|P^3_{n+1}\,P_{n-1}\| \leq c_2\,n^{24} \cdot \|P_{n+1}\|^3\,P_{n-1}\| \qquad (n \geq 2), \tag{17}$$

$$\|P_n\,P_{n+2}\,P^2_{n-1}\| \leq c_3\,n^{24} \cdot \|P_n\| \cdot \|P_{n+2}\| \cdot \|P_{n-1}\|^2 \quad (n \geq 3), \tag{18}$$

$$\|P_n\,P^2_{n+1}\,P_{n-2}\| \leq c_4\,n^{24} \cdot \|P_n\| \cdot \|P_{n+1}\|^2\,\|P_{n-2}\| \quad (n \geq 3). \tag{19}$$

Nochmalige Anwendung von Eigenschaft IV von $\| \ \|$ mit $k = 2$ auf das Paar $A_1 = \wp'(u)^4$ und $A_2 = P_{n+2} P_n{}^2$ unter Benutzung von (15_1) und Lemma 1 gibt

$$\| \wp'(u)^4 \cdot P_{n+2} P_n{}^3 \| \leqq c_5 n^6 \cdot \| \wp'(u)^4 \| \cdot \| P_{n+2} P_n{}^3 \| \qquad (n \geqq 2), \tag{20}$$

woraus man in Verbindung von (15_2) und (16) folgendes erhält :

$$\| \wp'(u)^4 P_{n+2} P_n{}^3 \| \leqq c_6 n^{30} \cdot \| P_{n+2} \| \cdot \| P_n{}^3 \| \qquad (n \geqq 2). \tag{21}$$

Wenn man dasselbe Verfahren mit dem Paar $A_1 = p'(u)^4$, $A_2 = P^3{}_{n+1} P_{n-1}$ wiederholt und dabei (16) sinngemäß durch (17) ersetzt, erhält man

$$\| \wp'(u)^4 P^3{}_{n+1} P_{n-1} \| \leqq c_7 n^{30} \| P_{n+1} \|^3 \cdot \| P_{n-1} \| \qquad (n \geqq 2). \tag{22}$$

Nun folgt für $n \geqq 2$ unter Benutzung der Eigenschaften I mit $\lambda = -1$ und II mit $k = 2$ von $\| \ \|$ aus (4_1), (21) und (17), bzw. (4_1), (16) und (22) :

$$\| P_{2n+1} \| \leqq c_6 n^{30} \cdot \| P_{n+2} \| \cdot \| P_n \|^3 + c_2 n^{24} \cdot \| P_{n+1} \| P_{n-1} \text{ falls } n \text{ gerade, bzw.} \tag{23}$$

$$\| P_{2n+1} \| \leqq c_1 n^{24} \cdot \| P_{n+2} \| \cdot \| P_n \|^3 + c_7 n^{30} \cdot \| P_{n+1} \|^3 \cdot \| P_{n-1} \|, \text{ falls } n \text{ ungerade.} \tag{24}$$

Unter Benutzung derselben Eigenschaften von $\| \ \|$ folgt für $n \geqq 3$ aus (4_2), (18) und (19):

$$\| P_{2n} \| \leqq c_3 n^{24} \| P_n \| \cdot \| P_{n+2} \| \cdot \| P_{n-1} \|^2 + c_4 n^{24} \cdot \| P_n \| \cdot \| P_{n+1} \|^2 \cdot \| P_{n-2} \|. \tag{25}$$

Nun können (23) und (24) vereinigt werden zu

$$\| P_{2n+1} \| \leqq c_8 n^{30} (\| P_{n+2} \| \cdot \| P_n \|^3 + \| P_{n+1} \|^3 \cdot \| P_{n-1} \|) \qquad (n \geqq 2) \tag{26}$$

(Es genügt $c_8 = \text{Max}\,(c_1, c_2, c_6, c_7)$ zu setzen.), und aus (25) ergibt sich

$$\| P_{2n} \| \leqq c_9 n^{24} (\| P_n \| \cdot \| P_{n+2} \| \cdot \| P_{n-1} \|^2 + \| P_n \| \cdot \| P_{n+1} \| P_{n-2} \|) \qquad (n \geqq 3) \tag{27}$$

(Es genügt $c_9 = \text{Max}\,(c_3, c_4)$ zu setzen.).

Nun kehren wir zum zweiten Induktionsschritt zurück, und setzen wir voraus, die Behauptung (14) sei für kleinere Werte des Indexes als $m (m > 4)$ richtig. Wir wollen unter dieser Voraussetzung beweisen , daß sie auch für m richtig ist.

1. Fall : m ungerade, d.h. $m = 2n + 1$ $(n \geqq 2)$.

Da wir jetzt auf die Polynome P_{n+2}, P_{n+1}, P_n, P_{n-1} rechts von (26) die Induktionsvoraussetzung anwenden können, ergibt sich daraus

$$\| P_{2n+1} \| \leqq 2\, c_8 \cdot n^{30} \cdot T^{4n^2 - 8n + 6} \qquad (n \geqq 2). \tag{28}$$

Unterwerfen wir nun T der weiteren Einschränkung

$$T \geqq \sup_{n = 2,3, \ldots} (2\, c_8 n^{30})^{\frac{1}{6n - 6}} \tag{**}$$

(Das Supremum rechts von (**) existiert als eine endliche Zahl, denn die Folge rechts von Sup ist beschränkt, weil sie für $n \to \infty$ den Limes 1 hat), so wird (28) zu

$$\| P_{2n+1} \| \leqq T^{6n-6}\, T^{4n^2 - 8n + 6} = T^{4n^2 - 2n} \qquad (n \geqq 2), \tag{29}$$

d.h.

$$\| P_m \| \leqq T^{(m-1)(m-2)} \qquad \text{für } m = 2n + 1 \ (n \geqq 2). \tag{30}$$

2. Fall : m gerade, d.h. $m = 2n$ $(n \geq 3)$.

Da wir jetzt auf die Polynome $P_{n+2}, P_{n+1}, P_n, P_{n-1}, P_{n-2}$, rechts von (27) die Induktionsvoraussetzung anwenden können, ergibt sich daraus

$$\| P_{2n} \| \leq 2\, c_9\, n^{24}\, T^{4n^2 - 12n + 14} \qquad (n \geq 3). \tag{31}$$

Unterwerfen wir jetzt T der noch weiteren Einschränkung

$$T \geq \operatorname*{Sup}_{n=2,4,\ldots} (2c_9\, n^{24})^{\frac{1}{6n-12}} . \tag{***}$$

(Auch hier ist das Supremum rechts eine endliche Zahl, aus demselben Grund wie bei(**)), so wird (31) zu

$$\| P_{2n} \| \leq T^{\,6n-12}\, T^{4n^2 - 12 + 14} = T^{4n^2 - 6n + 2} \qquad (n \geq 3) \tag{32}$$

d.h.

$$\| P_m \| \leq T^{(m-1)(m-2)} \qquad \text{für } m = 2n\ (m \geq 3). \tag{33}$$

Es ist offenbar möglich, ein $T > 1$ so zu wählen, daß (*), (**) und (***) gleichzeitig erfüllt sind. Mit diesem Wert von T zeigen uns (30) und (33), daß (14) auch für den Index m $(m > 4)$ richtig ist, falls dessen Richtigkeit für kleinere Werte des Indexes als m vorausgesetzt wird. Damit ist auch der zweite Induktionsschritt bewiesen ; folglich ist der Beweis des Satzes beendet.

Folgerung. *Es gilt mit einem numerisch berechenbaren* $c > 0$

$$\| P_m \| \leq e^{cm^2} \qquad (m = 1,2,\ldots). \tag{34}$$

Für den Beweis genügt es $\log T = c$ zu setzen.

Aus dem Satz oben wollen wir nun eine Abschätzung der Absolutbeträge der Zahlenkoeffizienten von $R_m(x, g_2, g_3)$, $S_m(x, g_2, g_3)$ in der Darstellung (5) von $\wp(mu)$ herleiten.

Laut (1) gilt für $m > 1$:

$$\wp(mu) = \begin{cases} \dfrac{\wp(u)\, \wp'(u)^2 P_m^2 - P_{m+1} P_{m-1}}{\wp'(u)^2 P_m^2}, & \text{falls } m \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{\wp(u) P_m^2 - \wp'(u)^2 P_{m+1} P_{m-1}}{P_m^2}, & \text{falls } m \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{35}$$

Aus Lemma 1, dem Satz und der Eigenschaft IV von $\| \quad \|$ folgt zunächst

$$\| P_m^2 \| \leq (3m(m-1) + 1)^6 \,.\, \| P_m \|^2 \leq c_{10}\, m^{12} \,.\, T^{2(m-1)(m-2)} \tag{36}$$

(Hier und im folgenden bedeuten $c_{10}, c_{11}, \ldots$, wie oben, numerisch berechenbare positive Konstanten, z. B. für c_{10} kann man 3^6 nehmen.).

Ähnlicherweise folgt

$$\| P_{m+1} P_{m-1} \| \leq c_{11}\, m^{12} \,.\, T^{m(m-1)+(m-2)(m-3)} \tag{37}$$

Aus (2) und (36) unter Verwendung derselben Eigenschaft von $\| \quad \|$ erhält man

$$\| \wp'(u)^2 \,.\, P_m^2 \| \leq c_{12}\, m^{18} \,.\, T^{2(m-1)(m-2)} \tag{38}$$

und aus (2) und (37) ergibt sich ähnlicherweise

$$(39) \qquad \| \wp'(u)^2 P_{m+1} P_{m-1} \| \leq c_{18}\, m^{18} \, . \, T^{m(m-1)+(m-2)(m-3)} \, .$$

Andererseits gilt, wegen $\| \wp(u) \wp'(u)^2 P_m^2 \| = \| \wp'(u)^2 P_m^2 \|$, $\| \wp(u) P_m^2 \| = \| P_m^2 \|$ und der Eigenschaft *III* von $\| \;\; \|$, folgendes

$$(40) \qquad \| \wp(u) \wp'(u)^2 P_m^2 - P_{m+1} P_{m-1} \| \leq \| \wp'(u)^2 P_m^2 \| + \| P_{m+1} P_{m-1} \| ,$$

$$(41) \qquad \| \wp(u) P_m^2 - \wp'(u)^2 P_{m+1} P_{m-1} \| \leq \| P_m^2 \| + \| \wp'(u)^2 P_{m+1} P_{m-1} \| .$$

Falls wir jetzt, wie bei (35), log $T = c$ setzen, so werden (36) - (39) nach leichter Umformung zu

$$(42) \qquad \begin{cases} \| P_m^2 \| \leq e^{c_{14} m^2} , & \| P_{m+1} P_{m-1} \| \leq e^{c_{15} m^2} , \\ \| \wp'(u)^2 P_m^2 \| \leq e^{c_{16} m^2} , & \| \wp'(u)^2 P_{m+1} P_{m-1} \| \leq e^{c_{17} m^2} . \end{cases}$$

Aus (40), (41) und (42) ergibt sich nun

$$(43) \qquad \begin{cases} \| \wp(u) \wp'(u)^2 P_m^2 - P_{m+1} P_{m-1} \| \leq e^{c_{18} m^2} , \\ \| \wp(u) P_m^2 - \wp'(u)^2 P_{m+1} P_{m-1} \| \leq e^{c_{19} m^2} . \end{cases}$$

Falls man Max $(c_{14}, c_{16}, c_{18}, c_{19}) = c_{20}$ setzt, sieht man, daß die rationalzahligen Koeffizienten im Zähler und Nenner von $\wp(mu)$ in der Darstellung (35) in beiden Fällen dem Absolutbetrage nach $\leq e^{c_{20} m^2}$ sind. Andererseits haben die im Nenner stehenden Polynome den "numerischen" Nenner $\nu_1 \mid 2^{2m(m-1)}$ wegen Lemma 2 und der Ganzheit der Koeffizienten von $\wp'(u)^2 = 4 \wp(u)^3 - g_2 \wp(u) - g_3$, Aus demselben Grund haben die im Zähler stehenden Polynome den «numerischen» Nenner $\nu_2 \mid 2^{2m^2-2m+2}$. Hiernach werden sowohl im Nenner als auch im Zähler von (35) stehende Polynome in beiden Fällen durch Multiplikation mit 2^{2m^2-2m+2} ganzzahlige Koeffizienten erhalten. Die nach der Multiplikation erhaltenenen Zähler - und Nennerpolynome haben also die Eigenschaften von $R_m(\wp(u), g_2\, g_3)$, $S_m(\wp(u), g_2, g_3)$ bis auf einen Proportionalitätsfaktor, der eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl ist.

Nach diesen Ausführungen ist also

$$(44) \qquad \| R_m \| , \; \| S_m \| \leq 2^{2m^2-2m+2} \, . \, e^{c_{20} m^2} \qquad (m = 2,3,\ldots),$$

woraus

$$(45) \qquad \| R_m \| , \| S_m \| \leq e^{c_{21} m^2} \qquad (m = 2, 3,\ldots)$$

folgt. Da für $m = 1$ $R_m = \wp(u) = x$, $S_m = 1$ ist, gilt (45) trivialerweise auch in diesem Fall. Wir können danach unser letztes Ergebnis so formulieren :

«Es gibt eine numerisch berechenbare positive Konstante C, derart, daß

$$\| R_m \| , \| S_m \| \leq e^{C m^2} \qquad (m = 1, 2,\ldots)$$

gilt.»

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß wir die Abschätzungen in der vorangehenden Note nicht allzu sparsam gehalten haben, da es für uns vielmehr um den Nachweis der Existenz von oberen Schranken der Form $e^{O(m^2)}$ mit einer numerisch berechenbaren Konstanten in O handelte, als möglichst kleine Werte für diese Konstanten zu finden [1]).

[1]) Herr P. Bundschuh hat mir inzwischen mitgeteilt, daß er die Berechnung dieser Konstanten schärfer durchgeführt und das Ergebnis in einer demnächst im Journal für die reine und angew. Mathematik zu erscheinenden Arbeit verwendet hat.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] WEBER, H. : Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, 3, BRAUNSCHWEIG (1908).

[2] LE VEQUE. W.J. : Topics in Number Theory, II, READING, Mass., (1956).

[3] SCHNEIDER, TH. : *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen II*, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 99, (1955).

[4] RAMACHANDRA, K. : *Contributions to the theory of transcendental numbers (II)*. Acta Arithmeticae, XIV, (1968).

ISTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
ISTANBUL - TÜRKİYE

(Manuskript eingegangen am 5 Mai 1970)

ÖZET

Bu Notta $\wp(u\,;g_2\,,g_3)=\wp(u)$ WEIERSTRAASS eliptik fonksiyonlarının çarpım formüllerinde geçen P_m polinomlarının sayısal katsayılarının $e^{O(m^2)}$ şeklinde bir üst sınırı verilmekte, buradan da

$$\wp(m\,u)=\frac{R_m(\wp(u),g_2,g_3)}{S_m(\wp(u),g_2,g_3)}$$

gösterilişindeki tam rasyonel katsayılı R_m ve S_m polinomlarının katsayıları için aynı tipte bir üst sınır elde edilmektedir