SUR QUELQUES APPLICATIONS DU PRINCIPE DE CORRESPONDANCE ET LA DÉTERMINATION DES COURBES DE DIRECTION

SUAT AKIN

Dans ce travail ou étudie quelques applications constructives des courbes planes qui se ramènent aux constructions des surfaces réglées. On démontre aussi la possibilité de la détermination des courbes de direction d'une correspondance, dont on donne un nombre d'éléments suffisants.

1. Soient données une parabole p, une de ses tangentes d au point T et une droite l passant par T parallèlement à l'axe de la parabole (*Fig.* 1). Considérons un faisceau de droites parallèles à une direction donnée, par exemple à la direction perpendiculaire à l'axe de la parabole. Chaque droite $\bar{m}$ du faisceau coupe p en un couple de points $\bar{M},\bar{M}_1$ et l en M', qui est le point homologue du couple. Projettons sur d les couples obtenus sur p, du point à l'infini de la parabole. Désignons les par $\bar{M}',\bar{M}_1'$. Entre ces couples et leur homologues sur l, il y a une correspondance (2, 1). Si l'on projette ces couples et leurs homologues à partir de deux points D et L du plan de p, on obtient deux faisceaux de droites (D) et (L) liés entre eux par une correspondance (2,1). p est la courbe de direction de cette correspondance. La résultante de cette correspondance est une courbe plane k du troisième ordre qui a un point double en D et qui passe par L et T.

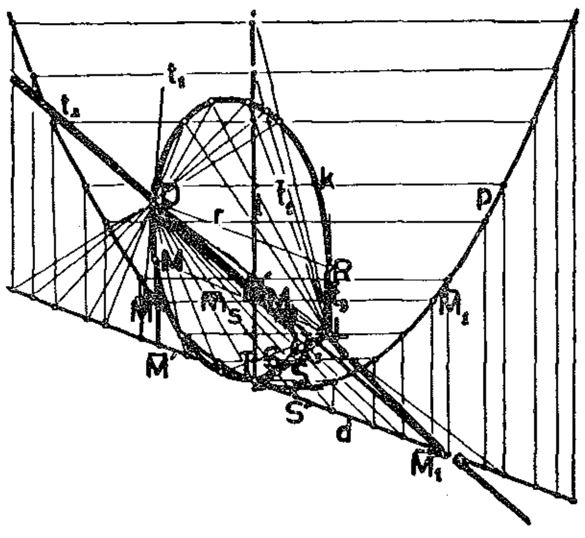

Fig. 1

Les deux tangentes t_1 et t_2 de la courbe k en D correspondent au rayon LD du faisceau (L). La tangente $\bar{t}_1$ eu L correspond à la droite DL. La deuxième tangente $\bar{t}_2$ de k passant par

L est la droite qui correspond au rayon s du faisceau (D) determiné par la projection S' du sommet $\bar{S}$ de la parabole sur d. La troisième tangente t_3 menée par L est parallèle à l et elle correspond au rayon r du faisceau (D), parallèle à d.

La correspondance (2, 1) entre les faisceaux (D) et (L) fournit en (D) une involution quadratique dont r et s sont les rayons doubles.

Plus généralement, soient données une hyperbole p et une droite d. Soit l une de ses directions asymptotiques, (*Fig.* 2). Chaque rayon $\bar{m}$ du faisceau, parallèle à d rencontre p aux points $\bar{M}$, $\bar{M}_1$ et l au point M'. Projettons $\bar{M}$, $\bar{M}_1$ parallèlement à l sur d et faisons correspondre les points de projection au point M'. Nous obtenons ainsi une correspondance (2, 1) entre les points de d et ceux de l. Si l'on projette les points homologues de d et de l à partir des points D et L situés sur le plan de p, la correspondance (2,1) obtenue entre les faisceaux (D) et (L) donne une courbe plane du troisième ordre k dont D est le point double. Les deux tangentes de k au point D sont les rayons qui correspondent à LD. La tangente au point L correspond à DL. Les deux autres tangentes passant par le point L correspondent aux rayons doubles de l'involution fournie par la correspondance (2, 1) en (D).

Les droites d et l peuvent passer par le même point de p.

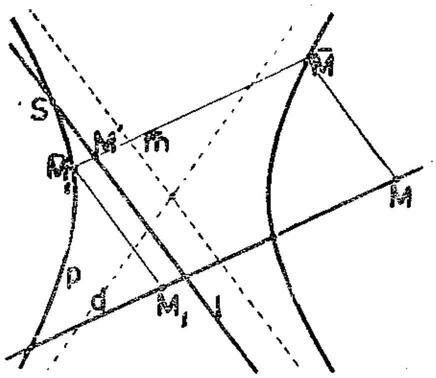

Fig. 2

Soient donnés les points D, 1, 2, 3, 4, 5, 6 quelconques situés sur un plan. Appelons $6 = L$ et traçons les droites d et l passant par 2, respectivement parallèles aux droites $D1$, $L1$, (*Fig.* 3). Traçons une droite parallèles à l par le point $\bar{3}$ qui est le point de rencontre de $D3$ et d et une droite parallèle à d par le point $\bar{3}_l$ où $L3$ coupe l. Nous obtenons le point $3'$. Appliquons la même construction aux points 4 et 5; les points obtenus $3'$, $4'$, $5'$ et le point à l'infini l'_∞ de l, avec $2 = 2'$ déterminent une hyperbole p qui est la courbe de direction de la correspondance (2,1) définie entre les faisceaux (D) et (L) par cinq points données 1, 2, 3, 4, 5. Cette correspondance donne une cubique rationnelle plane qui a un point double en D et qui passe par les 6 points donnés 1, 2, 3, 4, 5, $L = 6$. Cette courbe est unique et elle ne dépend pas du choix de d et de l.

Envisageons dans l'espace deux droites gauches $\bar{d}$, $\bar{l}$ et cinq points quelconques I, II, III, IV, V. Soient D, L les traces de d et de l sur un plan α et 1, 2, 3, 4, 5 celles des droites qui passent par les points I, II, III, IV, V et qui rencontrent $\bar{d}$ et $\bar{l}$. On considère la cubique plane ayant un point double en D et passant par les points 1, 2, 3,4, 5, L comme la section plane d'une surface réglée gauche du troisième ordre dont $\bar{d}$ et $\bar{l}$ sont respectivement les directrices double et simple. Les droites qui s'appuient sur la cubique et sur les deux droites $\bar{d}$ et $\bar{l}$ sont les génératrices de la surface.

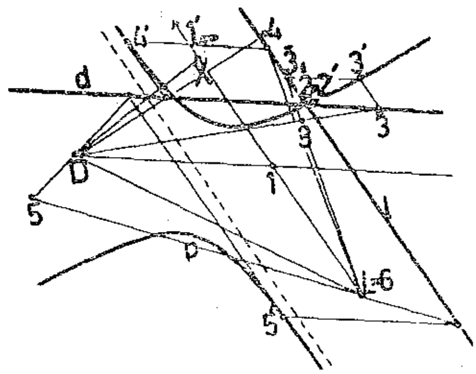

Fig. 3

2. Soient deux points T, X et une droite d qui sont tous situés sur le plan de la cubique plane p ayant un point double D (*Fig.* 4). Chaque droite, par exemple $\bar{m}$, du faisceau (X) rencontre p en trois points $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Soient A_1, B_1, C_1 les projections sur d de ces points, faites du point D. Faisons correspondre $\bar{m}$ aux droites TA_1, TA_2, TA_3. Chaque droite du faisceau (X) nous fournit ainsi une correspondance (3, 1) entre les faisceaux de droites (T) et (X) dont la résultante est une courbe plane rationnelle du quatrième ordre k qui a un point triple en T. Les tangentes de k en T sont les droites $t_1 = TT_1$, $t_2 = TT_2$, $t_3 = TT_3$ qui correspondent au rayon XT du faisceau (X). La tangente XX_1 en X est celle qui correspond à TX en (X). Les autres tangentes de k passant par X sont aussi tangentes à p. Les quatre points de k sur d sont les trois points communs à p et à d, et le point d'intersection de XD avec d. Un point commun aux courbes k et p se trouve sur TD.

Soient donnés les points coplanaires T, X, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 d'une façon quelconques (*Fig.* 5). Nous voulons construire la courbe de direction de la correspondance (3, 1) entre les faisceaux (T) et (X) déterminée par les sept points donnés. Appelons d la droite 12 et D le point d'intersection de $T3$ et XI. Soit $4'$ le point d'intersection de la droite $X4$ et de celle qui joint le point commun de $T4$ et de d, au point D. En faisant la même construction pour les autres points 5, 6, 7, nous obtenons les points $5'$, $6'$, $7'$. La cubique plane p déterminée par les points D (point double) et $2 = 2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$, $7'$ est la courbe de direction.

A l'aide de p et de d, on peut construire la courbe plane k du 4e ordre qui a un point triple T et qui passe par X, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Cette courbe est unique et elle ne dépend pas du choix des éléments de direction.

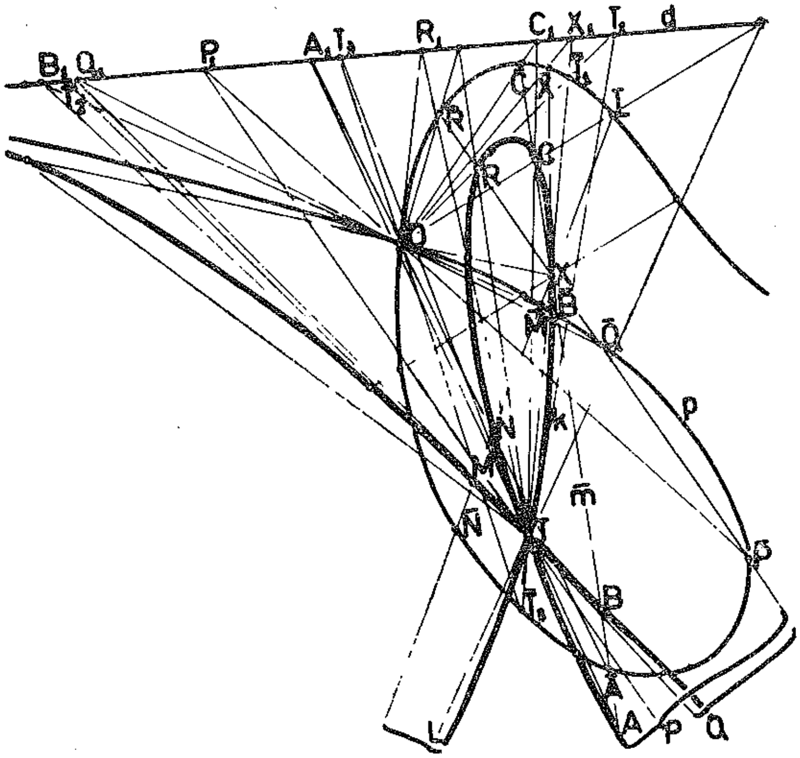

Fig. 4

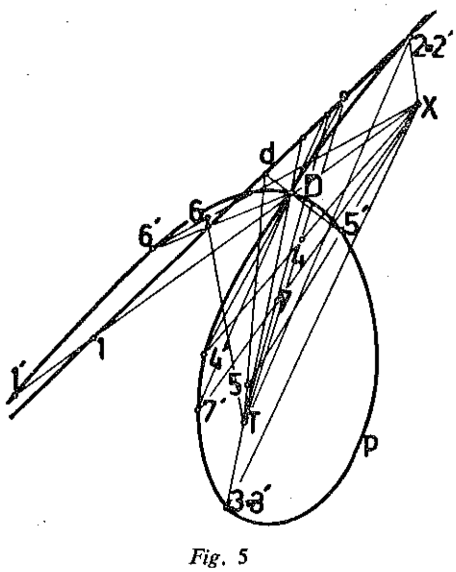

Fig. 5

Considérons dans l'espace, deux droites gauches t et x et sept points tout à fait quelconques. Soient T, X les traces respectives de t et de x sur un plan α et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 celles des droites qui passent par les points donnés et qui rencontrent t et x. On peut considérer la courbe du 4^e ordre k tracée sur α qui a un point triple T et qui passe par X, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 comme intersection plane d'une surface réglée gauche du 4^e ordre qui a une directrice triple t et une directrice simple x. Les génératrices de la surface sont les droites qui passent par les points de k et qui rencontrent t et x.

Il est évident que dans le cas où t et x sont concourantes, la surface est un cône dont la génératrice triple est t.

3. Soient donnés une courbe plane p du 4^e ordre ayant un point triple T, deux points K, Y et une droite d qui sont tous situés sur le plan de p, (*Fig.* 6). Projetons à partir de T les quatre points d'intersection de chaque rayon du faisceau (Y) avec p sur d et joignons ces projections à K. Nous obtenons ainsi une correspondance (4, 1) entre les faisceaux (K) et (Y). La résultante est une courbe plane du 5^e ordre k qui a un point quadruple en K et qui passe par Y.

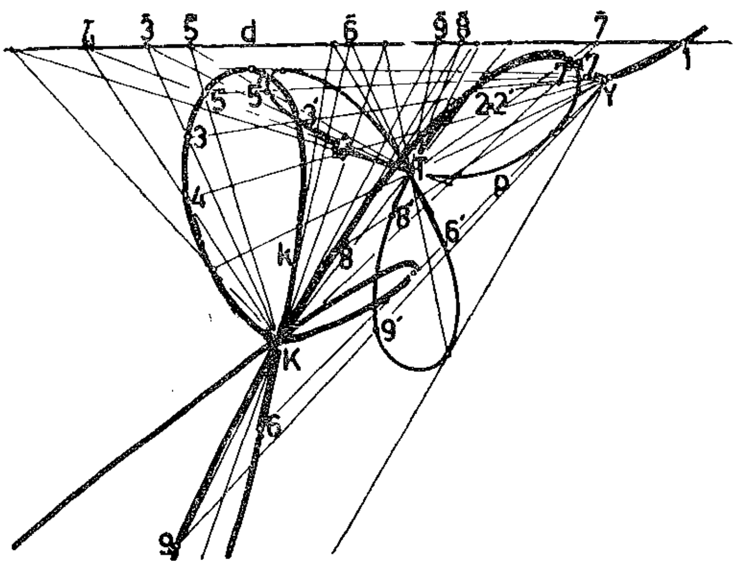

Fig. 6

Les quatre tangentes de k en K sont les droites qui correspondent à YK. La tangente au point Y, correspond à KY. Quatre autres tangentes de k passant par Y sont les tangentes de p menées par Y. k passe par les points communs de p et de d. Le cinquième point de k sur d est le point commun de KY et de d. Un point commun de k et de p se trouve sur la droite KT.

Soient donnés maintenant sur un plan α les points K, Y et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. On peut obtenir la courbe de direction de la correspondance comme au No. 2. Elle est du 4^e ordre dont le point triple T est, par exemple, le point de rencontre de $K2$ et de $Y1$ et passe par les points 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

La courbe k est unique, elle ne dépend pas du choix des éléments de direction.

Considérons dans l'espace deux droites gauches k, y et neuf points I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX. Soient K, Y et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, les traces sur un plan α de k, y et celles des droites qui passent par les neuf points données et qui rencontrent k, y. Les sécantes communes issues des points de la courbe du 5[e] ordre définie par le point quadruple K et les points Y, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont les génératrices d'une surface réglée gauche du 5[e] ordre dont les droites k et y sont respectivement les directrices quadruple et simple.

4. Prenons sur un plan α une conique p, une droite d et trois points D_1, D_2, 0, (*Fig.* 7). Projetons sur d, à partir de 0, les points d'intersection d'une droite du faisceau (D_1) avec p et les joignons à D_2. Répétons cette construction pour chaque droite du faisceau (D_1). Nous obtenons ainsi une correspondance (2, 2) entre les faisceaux (D_1) et (D_2). Appelons D_3 le point où D_10 rencontre d. D_1D_3 et D_2D_3 se correspondent deux fois. La résultante de cette correspondance est une courbe plane du 4[e] ordre k passant par les points communs de p et de d, ayant trois points doubles en D_1, D_2, D_3. Les tangentes de k en D_1 et en D_2 sont les rayons homologues de D_2D_1 dans (D_1) et de D_1D_2 dans (D_2). Deux tangentes de k menées par D_1 sont aussi tangentes à p. Les deux tangentes de k menées par D_2 sont déterminées par les tangentes de p issues de 0.

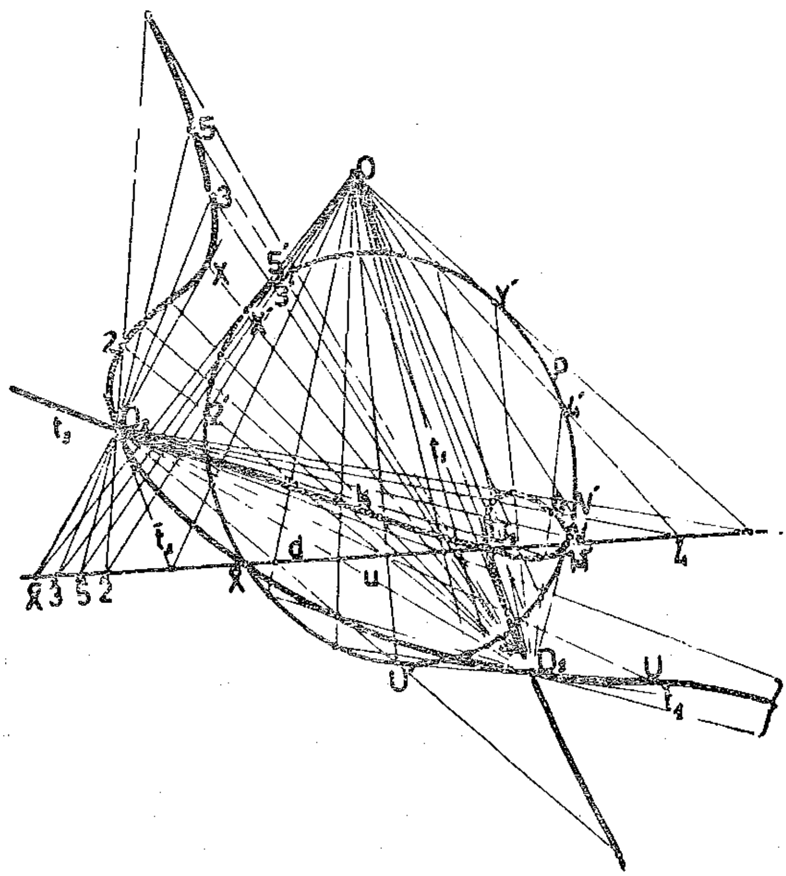

Fig. 7

Soient de même donnés les points coplanaires tout à fait quelconques D_1, D_2, D_3, 1, 2, 3, 4, 5. Fixons un point 0 sur la droite D_1D_3. Soit par exemple $D_3 1 = d$. Appelons 2′ le point d'intersection de la droite $D_1 2$ avec la droite qui joint le point commun 2 de $D_2 2$ avec d au point 0. Si l'on opère de la même manière avec les points 3, 4, 5., la conique ainsi déterminés par $1 = 1'$, 2′, 4′, 5′ sera la courbe de direction de la correspondance.

La courbe k ne dépend pas du choix de p et de d. 0 peut être le point à l'infini de D_1D_2. Les coniques obtenues sont tangentes aux droites D_1U', D_1V' et passent par les points l' et X sur d.

Considérons finalement dans l'espace trois droites deux à deux gauches a, b, u et trois points I, II, III. Soient D_1, D_2, D_3 les points d'intersection d'un plan α passant par u avec la cubique gauche q définie par les quadriques déterminées à l'aide de u, a, I, II, III et u, b, I, II, III. Soient 4, 5, 1, 2, 3, les traces respectives de a, b et les bi-sécantes de q menées par I, II, III, sur le plan α. On peut considérer la courbe k du 4e ordre ayant trois points doubles D_1, D_2, D_3 et passant par 1, 2, 3, 4, 5 comme la section plane d'une surface réglée gauche du 4e ordre dont la courbe double est q. Les cinq génératrices de la surface sont les bi-sécantes de q issues de I, II, III et les droites a, b [1]). Les autres génératrices sont les bi-sécantes de q passant par les points de k. La droite u n'est pas une génératrice, mais une bi-sécante de q.

[1]) Une surface réglée du 4e ordre ayant une cubique gauche comme courbe double est déterminée par 5 génératrices et une bisécante de sa courbe double. (E. MÜLLER-L. KRAMERS, Vorlesungen über Darst. Geo. III).

ÖZET

Bu çalışmada bâzı regle yüzeylerin elde edilmesine yarayan düzlemsel eğrilerin korrespondaus prensibi ile çizimini inceliyor ve yeter elemanı ile verilmiş bir korrespondansın doğrultu eğrilerinin belirlenmesini gösteriyoruz.

ISTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
ISTANBUL-TÜRKİYE

(*Manuscrit reçu 30 Juin 1970*)