SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DU CERCLE SUR UN DOMAINE SEMI-CIRCULAIRE SIMPLEMENT CONNEXE

TALÂT TUNCER

Dans le présent travail, on détermine approximativement la fonction $w=F(z)$ qui donne la représentation conforme d'un cercle quelconque B_z du plan z sur un domaine simplement connexe B_w presque circulaire du plan w, à l'aide de la fonction $P(\theta)$ de l'équation polaire $R=P(\theta)$ $(0 \leq \theta < \pi)$ du contour C_w du domaine B_w.

Introduction. En physique théorique, il s'agit parfois de déterminer la fonction qui représente deux domaines simplement connexes l'un sur l'autre. Le théorème de RIEMANN assure l'existence et sous certaines conditions l'unicité d'une telle fonction.

Soient B_z et B_w les domaines simplement connexes respectifs du plan z et du plan w. Dans le cas où B_w est un cercle, la fonction de représentation $w = f(z)$ possède quelques propriétés intéressantes qui fournissent des méthodes d'application pratique.

Par contre, si le domaine B_z est un cercle et B_w un domaine simplement connexe quelconque, ces propriétés extrémales disparaissent. On n'a pas encore proposé une méthode de calcul pour ce cas.

Dans le travail suivant, nous donnerons une méthode «pour la représentation conforme du cercle-unité sur un domaine semi-circulaire simplement connexe». On peut supposer le domaine *B semi-circulaire* sans restreindre la généralité du problème, car il est possible de représenter un domaine simplement connexe quelconque sur un domaine semi-circulaire à l'aide des fonctions élémentaires.

1. Désignons par B_w *le domaine semi-circulaire* dans le plan w. Soit la courbe C_w dont la tangente est continue par intervalles et soit

$$R = P(\theta), \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \tag{1.1}$$

son équation en coordonnées polaires, $P(\theta)$ étant une fonction donnée univalente et périodique.

Supposons que la fonction $P(\theta)$ soit bornée par les conditions

$$0 < B_1 \leq P(\theta) \leq R_2 < \infty \tag{1.2}$$

et $w = 0$ soit un point intérieur de B_w.

$|P'(\theta)/P(\theta)|$ étant la tangente de l'angle du rayon vecteur qui joint l'origine au point $w = R\,e^{i\theta}$ avec la normale extérieure en ce point, la condition de semi-circularité sera

$$\left|\frac{P'(\theta)}{P(\theta)}\right| \leqq Q < 1. \tag{1.3}$$

Ceci fournit un angle plus petit que $\pi/4$. Le nombre Q caractérise la semi-circularité de C_w.

Nous pouvons considérer le cercle B_z comme le cercle-unité $|z| < 1$; sinon nous pouvons le réaliser par une transformation de similitude.

La fonction $w = F(z)$ qui représente le cercle $|z| < 1$ sur le domaine B_w, sera entièrement définie sous les conditions $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$.

Nous donnerons une méthode qui déterminera approximativement la fonction $F(z)$ à l'aide de la fonction $P(\theta)$. Pour cela, si l'on détermine la correspondance entre le contour du cercle $|z| < 1$ et le contour C_w du domaine B_w, c'est-à-dire la fonction

$$\theta = \theta(\varphi) \qquad (z = e^{i\varphi}), \tag{1.4}$$

les valeurs prises par $\log\dfrac{f(z)}{z}$, dans le cercle $|z| < 1$ seront entièrement déterminées, car on connait la valeur de la fonction analytique $\log\dfrac{f(z)}{z}$ sur le contour.

2. Si la fonction $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, représente conformément le cercle-unité $|z| < 1$ sur un domaine convexe, la fonction

$$F(z) = z\,f'(z) \tag{2.1}$$

représente le même cercle sur un domaine étoilé par rapport au point $w=0$ (Théorème de STUDY).

En désignant par $\alpha(\vartheta)$, l'angle que fait la tangente de la courbe convexe, image du cercle $|z| = 1$, avec l'axe réelle, et en posant

$$\arg w = \theta, \qquad \arg z = \vartheta$$

nous obtenons de (2.1)

$$\theta(\vartheta) = \alpha(\vartheta) - \frac{\pi}{2} \tag{2.2}$$

d'où

$$d\theta(\vartheta) = d\alpha(\vartheta). \tag{2.3}$$

Soit P_n le polygone dé n côtés inscrit dans le domaine convexe. Si l'on désigne par

$$\mu_\nu \pi \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

les angles extérieures du polygone, on a

$$0 < \mu_\nu < 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu = 2\,. \tag{2.4}$$

La fonction $w = f_n(z)$ désignant la fonction qui représente le cercle-unité $|z| < 1$ sur le polygone P_n, la formule de SCHWARZ-CHRISTOFFEL donne

$$f_n(z) = C_n \int_0^z \prod_{\nu=1}^{n} (1 - e^{-i\vartheta_\nu} t)^{-\mu_\nu} \, dt. \tag{2.5}$$

Les points $z = e^{i\vartheta_\nu}$ correspondent aux sommets du polygone P_n.

(2.5) fournit

$$\log f_n'(z) = \log C_n - \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \pi \mu_\nu \log (1 - e^{-i\vartheta_\nu} z). \tag{2.6}$$

En considérant cette dernière intégrale comme une intégrale de STIELTJES, on obtient à la limite

$$\log f'(z) = \log C - \frac{1}{\pi} \oint_{|z|=1} \log (1 - e^{-i\vartheta} z) \, d\varkappa(\vartheta). \tag{2.7}$$

Exprimons ce résultat comme une lemme.

Lemme. *Si la fonction $F(z)$ où $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$, représente le cercle-unité $|z| < 1$ sur un domaine B_w étoilé par rapport au point $w = 0$, on a*

$$\log \frac{F(z)}{Cz} = -\frac{1}{\pi} \oint_{|z|=1} \log (1 - e^{-i\vartheta} z) \, d\,\theta(\vartheta), \tag{2.8}$$

où $C = F'(0)$ et $\theta(\vartheta)$ est la fonction qui établit la correspondance.

L'existence de la fonction $\theta(\vartheta)$ est assurée par le théorème de RIEMANN. En outre cette fonction vérifie les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (\theta(t) - t)\, dt = \int_0^{2\pi} \log \frac{P(\theta(t))}{C}\, dt = 0, \\ & \int_0^{2\pi} (\theta(t) - t)^2\, dt = \int_0^{2\pi} \left[\log \frac{P(\theta)}{C}\right]^2 dt, \\ & \frac{d\theta(t)}{dt} > 0, \end{aligned} \right. \tag{2.9}$$

3. Utilisons les abréviations ci-dessous:

$$p(\theta) = \log P(\theta) - \log C,$$

$$\log C_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\log P(\theta_n(t))dt,$$

$$p_n(t) = \log P(\theta_n(t)) - \log C_n,$$

$$q(\theta) = p'(\theta),$$

$$q_n(t) = q(\theta_n(t)),$$

$$K(x, y) = -\frac{1}{\pi} \log 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| .$$

En égalant les parties réelles pour $z = e^{i\varphi}$ on tire de (2.8)

$$\int_0^{2\pi} K(t, \varphi)\, \theta'(t)\, dt = p(\theta(\varphi)), \tag{3.1}$$

où la fonction possède la singularité logarithmique pour $t = \varphi$. On peut cependant démontrer facilement l'existence de l'intégrale (3.1). En la dérivant par rapport au paramètre φ, puis en l'intégrant par partie nous obtenons

$$\int_0^{2\pi} K(t, \varphi)\, \theta''(t)\, dt = -q(\theta(\varphi))\, \theta'(\varphi). \tag{3.2}$$

Pour déterminer la correspondance entre les contours, c'est-à-dire pour calculer la fonction $\theta(\varphi)$, nous proposons la formule d'itération ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{2\pi} K(t,\varphi)\theta_n(t)\, dt = p_{n-1}(\varphi), \quad n = 1, 2, \ldots \\ \theta_0(\varphi) \equiv \varphi. \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Si l'on connait la fonction $\theta_{n-1}(\varphi)$, la relation (3.3) sera alors une équation intégrale de première espèce pour la fonction $\theta'_n(\varphi)$.

Notons que le noyau de l'équation intégrale (3.3) est symétrique et que ses valeurs propres sont connues.

Nous pouvons résoudre l'équation intégrale (3.3) en partant de $\theta_0 = \varphi$ et nous obtenons ainsi la suite fonctionelle

$$\{\theta_n(\varphi)\}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3.4}$$

Si l'on démontre la convergence uniforme de cette suite fonctionelle, il sera établi que la fonction limite vérifie l'équation intégrale non-linéaire (3.1).—Dans la suite nous la désignerons par $\theta(\varphi)$ la solution de l'équation non linéaire (3.1).—De plus, il faut démontrer l'unicité de la solution.

4. Pour démontrer l'unicité, tirons de (3.2) et de (3.3) :

$$\int_0^{2\pi} K(t,\varphi)\, \theta_n''(t)\, dt = -\, q_{n-1}(\varphi)\, \theta_{n-1}'(\varphi). \tag{4.1}$$

Si nous employons pour norme

$$\| f \|^2 = \int_0^{2\pi} f^2(t)\, dt,$$

on a

$$\| \theta_n' \|^2 - 2\pi = \| q_{n-1}\, \theta_{n-1}' \|^2 .$$

Nous obtenons de (1.3) :

$$\| \theta_n' \|^2 < 2\pi + Q^2 \| \theta_{n-1}' \|^2 \tag{4.2}$$

puis :

$$\| \theta_n' \|^2 < 2\pi \sum_{k=0}^{n} Q^{2k} < \frac{2\pi}{1-Q^2} . \tag{4.3}$$

On a ainsi démontré la convergence uniforme de la suite $\{ \| \theta_n' \| \}$, ce qui est la condition suffisante pour l'existence de la solution.

5. Pour démontrer la convergence de la suite (3.4) il faut d'abord prouver la proposition suivante :

Ā un nombre positif ε, quelconque, on peut faire correspondre un nombre entier $n_0(\varepsilon)$, tel que pour tout $n > n_0(\varepsilon)$ on ait

$$\| \theta_{n+k} - \theta_n \| < \varepsilon , \quad k = 1, 2, \ldots \tag{5.1}$$

En faisant usage de (1.3) on trouve de (3.3) :

$$\| \theta_{n+1} - \theta_n \|^2 < \| p_n - p_{n-1} \|^2 < Q^2 \| \theta_n - \theta_{n-1} \|^2 .$$

L'obtention de (5.1) à partir de cette dernière égalité est immédiate. Démontrons maintenant la continuité uniforme de la suite (3.4). Pour cela on déduit de l'inégalité de SCHWARZ la relation

$$(\theta_n(\varphi) - \theta_n(\varphi_0))^2 = \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi} \theta_n'(t)\, dt \right)^2 < (\varphi - \varphi_0) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \theta_n'^2(t)\, dt < (\varphi - \varphi_0)\, \| \theta_n' \|^2 .$$

$\| \theta_n' \|$ étant uniformément bornée, nous en déduisons la convergence uniforme de la suite $\{\theta_n(\varphi)\}$.

Posons

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n(\varphi) = \theta(\varphi). \tag{5.3}$$

Pour démontrer que cette fonction limite vérifie l'équation intégrale non-linéaire (3.1), transformons la relation (3.3) en

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{t-\varphi}{2}\,\theta_n(t)\,dt = -2\log 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| + p_{n-1}(\theta(\varphi)),\quad 0<\varphi<2\pi. \tag{5.4}$$

La suite fonctionelle étant uniformément convergente, nous pouvons passer à la limite sous le signe d'intégrale; nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{cotg}\frac{t-\varphi}{2}\,\theta(t)\,dt = -2\log 2\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| + p(\theta(\varphi)),\quad (0<\varphi<2\pi), \tag{5.5}$$

qui est une forme différente de l'égalité (3.1)

Nous connaissons l'existence et l'unicité de cette solution d'après le théorème de RIEMANN.

Supposons maintenant qu'il existe une solution $\bar{\theta}(\varphi)$ différente de la fonction limite $\theta(\varphi)$ du (5.3).

Pour prouver l'unicité de la solution, nous devons démontrer que la fonction limite (5.3) est identique à $\bar{\theta}(\varphi)$. Dans ce but on déduit de (3.1).

$$\|\bar{\theta}-\theta\|^2 < Q^2\,\|\bar{\theta}-\theta\|^2$$

d'où l'on tire de

$$\|\bar{\theta}-\theta\| \neq 0 \text{ ou } \bar{\theta}\neq\theta,$$

$$1<Q^2.$$

Mais ce résultat est contraire à l'hypothèse, donc

$$\bar{\theta}(\varphi)\equiv\theta(\varphi).$$

6. Nous allons démontrer par une autre méthode, la convergence de la suite fonctionelle $\{\theta_n(\varphi)\}$, obtenue par la résolution successive de l'équation intégrale (3.3) en mettant en évidence l'erreur commise après le n ième pas.

Considérons la relation

$$\int_0^{2\pi} K(t,\varphi)\,\theta_n'(t)\,dt = p\big(\theta_{n-1}(\varphi)\big) \tag{6.1}$$

comme une transformation entre θ_{n-1} et θ_n.

Écrivons l'équation (6.1) pour n-1 et retranchons-la de (6.1) :

$$\int_0^{2\pi} K(t,\varphi)\,[\theta_n'(t)-\theta_{n-1}'(t)]\,dt = p\big(\theta_{n-1}(\varphi)\big)-p\big(\theta_{n-2}(\varphi)\big).$$

D'après le théorème des accroissements finis, nous pouvons écrire le second membre sous la forme suivante:

$$p(\theta_{n-1}(\varphi)) - p(\theta_{n-2}(\varphi)) = \bar{\tau}\,(\theta_{n-1}(\varphi) - \theta_{n-2}(\varphi)),$$

où

$$\bar{\tau} = p'(\bar{\theta}) = \frac{\bar{P}'(\theta)}{P(\bar{\theta})} \text{ et } \theta_{n-1} < \bar{\theta} < \theta_{n-2};$$

ce qui donne

$$\int_0^{2\pi} K(t, \varphi)\left(\theta_n'(t) - \theta_{n-1}'(t)\right) dt = \bar{\tau}\left(\theta_{n-1}(\varphi) - \theta_{n-2}(\varphi)\right). \tag{6.2}$$

En tenant compte de l'inégalité $(\bar{\tau})^2 < Q^2$, on tire de (6.2)

$$\| \theta_n - \theta_{n-1} \|^2 < Q^2 \| \theta_{n-1} - \theta_{n-2} \|^2$$

ou en utilisant l'abréviation

$$\varrho(\theta_n, \theta_{n-1}) = \| \theta_n - \theta_{n-1} \|,$$

on obtient la relation de contraction

$$\varrho(\theta_n, \theta_{n-1}) < Q\,\varrho(\theta_{n-1}, \theta_{n-2}). \tag{6.3}$$

Enfin, on déduit de la relation (6.3)

$$\varrho(\theta_n, \theta_{n-1}) < Q^{n-1}\,\varrho(\theta_1, \theta_0). \tag{6.4}$$

Maintenant démontrons que la suite $\{\theta_n\}$ est une suite fondamentale dans l'espace métrique ϱ, c'est-à-dire pour n, m tendant à l'infini

$$\varrho(\theta_m, \theta_n) \to 0.$$

De l'inégalité entre les côtés d'un triangle on trouve en supposant $m > n$

$$\varrho(\theta_m, \theta_n) \leqq \varrho(\theta_m, \theta_{m-1}) + \varrho(\theta_{m-1}, \theta_{m-2}) + \tag{6.5}$$

$$\varrho(\theta_{m-2}, \theta_{m-3}) + \ldots + \varrho(\theta_{n+1}, \theta_n).$$

En appliquant la relation (6.4) à chaque terme de l'inégalité (6.5), on obtient

$$\varrho(\theta_m, \theta_n) < (Q^{m-1} + Q^{m-2} + Q^{m-3} + \ldots + Q^n)\,\varrho(\theta_1, \theta_0)$$

$$= Q^n(1 + Q + Q^2 + \ldots + Q^{m-1-n})\,\varrho(\theta_1, \theta_0)$$

ou

$$\varrho(\theta_m, \theta_n) < Q^n \frac{1 - Q^{m-n}}{1 - Q}\,\varrho(\theta_1, \theta_0).$$

On en déduit que le second membre tend vers zéro pour $m,n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \varrho(\theta_m, \theta_n) = 0 .$$

Ainsi le critère de CAUCHY sera verifié.

Démontrons l'unicité de la suite $\{\theta_n\}$. Supposons qui'l existe deux limites différentes θ_I, θ_{II}. θ_I, θ_{II} sont des points invariants de la transformation A, c'est-à-dire

$$A\,\theta_I = \theta_I,$$

$$A\,\theta_{II} = \theta_{II}.$$

De (6.3) on trouve

$$\varrho(\theta_I, \theta_{II}) = \varrho(A\theta_I, A\theta_{II}) < Q\varrho(\theta_I, \theta_{II}).$$

θ_I, θ_{II} étant différents, on obtient

$$1 < Q,$$

ce qui est contraire à notre hypothèse $Q < 1$. Par suite $\varrho(\theta_I, \theta_{II}) = 0$, donc $\theta_I = \theta_{II}$.

Désignons donc $\lim\limits_{m\to\infty} \theta_m$ par θ et pour estimer l'erreur commise par la méthode d'itération, faisons tendre m vers l'infini dans l'expression

$$\varrho(\theta_m, \theta_n) < Q^n \frac{1-Q^{m-n}}{1-Q}\, \varrho(\theta_1, \theta_0);$$

nous obtenons :

$$\varrho(\theta, \theta_n) < \frac{Q^n}{1-Q}\, \varrho(\theta_1, \theta_0) . \tag{6.6}$$

Ainsi, on voit que l'erreur commise après n pas dans la formule d'itération (3.3), est moindre que $Q^n/(1-Q)\, \varrho(\theta_1, \theta_0)$. On observe qu'autant Q est petit, autant on a besoin d'un plus petit nombre de pas dans l'itération, c'est-à-dire que la suite converge rapidement.

7. Prenons, pour le domaine B_w, une ellipse, dont les longueurs des demi-axes sont a et b et dont le centre se trouve à l'origine. Soit

$$P = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + c^2 \sin^2 \theta}}$$

l'équation de cette ellipse en coordonnées polaires; si nous posons

$$a = 1,\ \frac{c^2}{b^2} = \frac{1-b^2}{b^2} = \lambda^2,$$

cette équation prend la forme

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \theta}} \tag{7.1}$$

En dérivant logarithmiquement (7.1) on trouve

$$\frac{P'}{P} = -\frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{\sin 2\theta}{(1 + \lambda^2 \sin^2 \theta)} . \tag{7.2}$$

Dérivons cette expression encore une fois pour chercher les valeurs extrémales :

$$\left(\frac{P'}{P}\right)' = 2\, \frac{1 - (2 + \lambda^2)\sin^2 \theta}{(1 + \lambda^2 \sin \theta)^2} .$$

Les racines de la dérivée sont

$$\sin \theta = \mp \frac{1}{\sqrt{2 + \lambda^2}} ;$$

d'où nous trouvons

$$\theta_1 = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2 + \lambda^2}} , \ \theta_2 = \pi - \theta_1, \theta_3 = \pi + \theta_1, \theta_4 = 2\pi - \theta_1 .$$

Ainsi de (7.2) fournit

$$\left\{\begin{aligned} Q &= \left| \operatorname{Max} \frac{P'}{P} \right| = \frac{\lambda^2}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{1 - b^2}{2b} , \\ \frac{Q^n}{1 - Q} &= \frac{\lambda^{2n}}{2^{n-1}\sqrt{(1 + \lambda^2)^{n-1}}\,(2\sqrt{1 + \lambda^2} - \lambda^2)} = \frac{(1 - b^2)^n}{2^{n-1} b^{n-1}(b^2 + 2b - 1)} . \end{aligned}\right. \tag{7.3}$$

La condition (1.3) prend la forme $\dfrac{\lambda^2}{2\sqrt{1 + \lambda^2}} < 1$, d'où

$$0 < \lambda^2 < 2(\sqrt{2} + 1) \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} - 1 < b < 1. \tag{7.4}$$

Ecrivons maintenent l'équation intégrale (5.4) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} & p_{n-1}(\theta(\varphi)) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log 2 \left| \sin \frac{\varphi - t}{2} \right| \theta_n'(t)\, dt, \quad n = 1,2,\ldots \\ & \theta_0(\varphi) \equiv \varphi . \end{aligned}\right. \tag{7.5}$$

Ainsi à l'aide de (7.1) les expressions que nous avons données pour les abréviations au § 3 prennent la forme

$$p(\varphi) = -\frac{1}{2} \log(1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi) - \log C_0,$$

ou en posant

$$f(\varphi) = \log(1 + \lambda^2 \sin^2 \varphi)$$

on a

$$p(\varphi) = -\frac{1}{2} f(\varphi) - \log C_0 . \tag{7.6}$$

Maintenant développons la fonction $f(\varphi)$ en série de FOURIER dans l'intervalle $(0,2\pi)$:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu\varphi + b_\nu \sin\nu\varphi \tag{7.7}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos\nu\varphi \, d\varphi, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin\nu\varphi \, d\varphi .$$

Pour calculer ces intégrales, formons l'expression

$$I_\nu = \pi(a_\nu + ib_\nu) = \int_0^{2\pi} f(\varphi)\, e^{i\nu\varphi}\, d\varphi.$$

En intégrant par parties

$$I_\nu = \left| f(\varphi) \frac{e^{i\nu\varphi}}{i\nu} \right|_0^{2\pi} - \frac{1}{i\nu} \int_0^{2\pi} \frac{df(\varphi)}{d\varphi} e^{i\nu\varphi} d\varphi$$

ou en tenant comte de

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = \frac{2\lambda^2 \sin\varphi \cos\varphi}{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi}$$

on trouve

$$I_\nu = -\frac{2\lambda^2}{i\nu} \int_0^{2\pi} e^{i\nu\varphi} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{1 + \lambda^2 \sin^2\varphi} d\varphi . \tag{7.8}$$

Calculons l'intégrale (7.8) par la méthode des résidus. Posons

$$e^{i\varphi} = z,$$

on a

$$d\varphi = \frac{dz}{iz}, \quad \sin\varphi = \frac{z^2 - 1}{2iz}, \quad \cos\varphi = \frac{z^2 + 1}{2z} .$$

L'intégrale (7.8) prend la forme

$$I_\nu = \frac{2i}{\nu} \int_{|z|=1} \frac{z^{\nu-1}(z^4 - 1)}{\left(z^2 - \frac{2z}{\lambda} - 1\right)\left(z^2 + \frac{2z}{\lambda} - 1\right)} dz.$$

Posons

$$\frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} = \alpha,$$

les pôles sont tous simples et ont les expressions suivantes :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \sqrt{\frac{1+b}{1-b}} = \alpha\ ,$$

$$z_2 = \frac{1-\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = -\sqrt{\frac{1-b}{1+b}} = -\frac{1}{\alpha}\,,$$

$$z_3 = \frac{-1+\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} = \frac{1}{\alpha}\,,$$

$$z_4 = \frac{-1-\sqrt{1+\lambda^2}}{\lambda} = -\sqrt{\frac{1+b}{1-b}} = -\alpha\,.$$

En raison de $\alpha > 1$, les pôles z_2 et z_3 seuls sont situés dans le cercle $|z| = 1$.

L'intégrale cherhée sera alors de la forme

$$I_\nu = \frac{2\,i}{\nu} \int\limits_{|z|=1} \frac{z^{\nu-1}(z^4-1)}{(z^2-\alpha^2)\left(z-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(z+\dfrac{1}{\alpha}\right)}\,dz.$$

Posons

$$g(z) = \frac{z^{\nu-1}(z^4-1)}{(z^2-\alpha^2)\left(z-\dfrac{1}{\alpha}\right)\left(z+\dfrac{1}{\alpha}\right)}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{z-\dfrac{1}{\alpha}} - \frac{1}{z+\dfrac{1}{\alpha}}\right)\cdot\frac{z^{\nu-1}(z^4-1)}{z^2-\alpha^2}$$

et

$$G(z) = \frac{\alpha}{2}\cdot\frac{z^{\nu-1}(z^4-1)}{z^2-\alpha^2}\ ,$$

$g(z)$ prend la forme

$$g(z) = G(z)\left(\frac{1}{z-\dfrac{1}{\alpha}} - \frac{1}{z+\dfrac{1}{\alpha}}\right).$$

La somme des résidus est

$$\sum \operatorname{res} = \operatorname*{res}_{z=\frac{1}{\alpha}} + \operatorname*{res}_{z=-\frac{1}{\alpha}} = G\left(\frac{1}{\alpha}\right) - G\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= G\left(\frac{1}{\alpha}\right) - (-1)^{\nu-1}\, G\left(\frac{1}{\alpha}\right) = G\left(\frac{1}{\alpha}\right)[1 + (-1)^{\nu}]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}[1 + (-1)^{\nu}]$$

et l'expression de I_ν devient

$$I_\nu = -\frac{2\pi}{\nu}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\nu}[1 + (-1)^{\nu}].$$

D'après ce résultat, nous trouvons

$$I_\nu = I_{2k+1} = 0 \quad \text{pour} \quad \nu = 2k+1,$$

$$I_\nu = I_{2k} = -\frac{2\pi}{2k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{2k} \cdot 2 = -\frac{2\pi}{k}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{k} \quad \text{pour } \nu = 2k.$$

Le dévelopment (7.7) prend ainsi la forme.

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} \cos 2k\varphi\,, \tag{7.9}$$

où

$$a_{2k} = \frac{1}{\pi}\, I_{2k} = -\frac{2}{k}\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^{k}$$

et en posant $\omega = \dfrac{1-b}{1+b}$

$$a_{2k} = -\frac{k}{2}\,\omega^k\,.$$

Des expression que nous avons utilisées pour abréger les notations dans § 3, on tire

$$\log C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log P(\varphi)\, d\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = -\frac{a_0}{4}\,.$$

Par conséquent, on obtient de (7.9)

$$p(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^k}{k}\cos 2k\,\varphi\,. \tag{7.10}$$

Considérons maintenant le second membre de l'équation (7.5); on a

$$\log 2 \left| \sin \frac{\varphi - t}{2} \right| = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(\varphi - t)}{m} .$$

Pour la fonction inconnue $\theta_n(t)$, posons :

$$\theta_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t). \tag{7.11}$$

En dérivant les deux membres de (7.11), on a

$$\theta_n'(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\nu \alpha_\nu \sin \nu t + \nu \beta_\nu \cos \nu t) .$$

Ainsi L'équation (7.5) prend alors la forme

$$p(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m(\varphi - t)}{m} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\nu \alpha_\nu \sin \nu t + \nu \beta_\nu \cos \nu t)\, dt$$

ou en tenant compte de la convergence uniforme, on trouve

$$p(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{m} \cos m\varphi \cos mt + \frac{1}{m} \sin m\varphi \sin mt \right) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (-\nu \alpha_\nu \sin \nu t + \nu \beta_\nu \cos \nu t) \right] dt. \tag{7.12}$$

D'autre part, en remplaçant les expressions suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos \nu t \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq \nu \\ \pi, & m = \nu \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \sin \nu t \, dt = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin \nu t \, dt = \begin{cases} 0, & m \neq \nu \\ \pi, & m = \nu \end{cases}$$

par leurs valeurs et en considérant l'expression $p(\varphi)$ de (7.10), l'équation (7.12) prend la forme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^t}{k} \cos 2k\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} (\beta_m \cos m\varphi - \alpha_m \sin m\varphi) .$$

D'où l'on trouve

$$\beta_m = \beta_{2k} = \frac{\omega^k}{k} , \alpha_m = \alpha_{2k} = 0 \qquad \text{si } m = 2k ,$$

$$\beta_m = \beta_{2k+1} = 0, \ \alpha_m = \alpha_{2k+1} = 0 \quad \text{si } m = 2k + 1 .$$

L'expression (7.11) prend donc la forme ci-dessous pour $n = 1$:

$$\theta_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^k}{k} \sin 2k\varphi . \tag{7.13}$$

8. Calculons maintenant, l'erreur commise. En posant $n = 1$ dans la formule (6.6), on voit que l'erreur commise est plus petite que

$$E_1 = \frac{Q}{1-Q} \varrho (\theta_1, \theta_0) .$$

On a

$$\varrho^2(\theta_1, \theta_0) = \int_0^{2\pi} (\theta_1 - \theta_0)^2 \, d\varphi$$

et en posant la valuer de θ_1 dans la formule (7.13) et prenant $\theta_0 = \varphi$, on trouve

$$\left(\frac{1-Q}{Q} E_1\right)^2 = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^k}{k} \sin 2k\varphi - \varphi\right)^2 d\varphi.$$

D'autre part, dans le développement

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t),$$

en raison de

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) \, dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu^2 + b_\nu^2)$$

où $\nu = 2k$, $a_\nu = 0$, $b_\nu = \dfrac{\omega^k}{k}$, on obtient

$$\left(\frac{1-Q}{Q}\,.\,E_1\right)^2=\int_0^{2\pi}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^k}{k}\sin 2k\varphi\right)^2-2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^k}{k}\sin 2k\varphi+\varphi^2\right]d\varphi$$

$$=\left[\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^{2k}}{k^2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^k}{k}\left|-\frac{1}{2k}\varphi\cos 2k\varphi+\frac{1}{4k^2}\sin 2k\varphi\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{3}\left|\varphi^3\right|_0^{2\pi}\right]$$

ou

$$\left(\frac{1-Q}{Q}\,.\,E_1\right)^2=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\omega^2)^k}{k^2}+2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^k}{k^2}+\frac{8}{3}\pi^3.$$

En raison de $\omega<1$ et par suite $\omega^2<1$, on trouve

$$\left(\frac{1-Q}{Q}\,.\,E_1\right)^2<\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{8}{3}\pi^3=3\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{8}{3}\pi^3$$

ou en posant $Q=\dfrac{1-b^2}{2b}$ et en utilisant

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

on voit que l'errer commise est plus petite que

$$E_1'=\frac{2-b^2}{b^2+2b-1}\,\pi\sqrt{\frac{19}{6}\,\pi}.$$

REFERENCES

[1] KANTOROWITSCH, L. W. AND KRYLOW, W. I : Näherungsmethoden der Höheren Analysis,, VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, (1956).

[2] WARSCHAWSKI, S. E. : *On Conformal mapping of nearly circular regions*, Proc. Amer. Math. Sec. 1, 562-574 (1950) (Saltzer) 12-170.

[3] MONTEL, P. : Leçons sur les Fonctions univalentes ou Multivalentes, GAUTHIER-VILLARS (1933).

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL, TÜRKİYE

(Manuscrit reçu le 4 Novembre 1969)

ÖZET

Bu çalışmada, z düzlemindeki herhangi bir B_z dairesinin, w düzlemindeki daireye yakın B_w basit bağımlı bölgesi üzerine, B_w nin C_w çevresinin $R=P(\theta)$ $(0\leq\theta<2\pi)$ kutupsal denklemi yardımıyla konform tasvirini veren $w=F(z)$ fonksiyonu yaklaşık olarak belirlenir.