ÜBER DIE FUNKTIONSWERTE DER p-ADISCH ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN II

ORHAN Ş. İÇEN

In der vorliegenden Arbeit, die eine Fortsetzung des gleichnamigen I. Teiles bildet, werden, unter eventueller Verallgemeinerung der im I. Teil gegebenen Hilfsmittel, einige weitere Transzendenzresultate über p-adisch elliptische und verwandte Funktionen bewiesen, die schwache p-adische Analoga zu den (in der Einleitung des I. Teiles erwähnten) Schneiderschen Transzendenzergebnissen über komplexe elliptische Funktionen bilden. Dabei werden wir uns, statt des in İÇEN [1] gegebenen Kriteriums für die Algebraizität im arithmetischen Sinne von einer Funktion, eines Spezialfalles von einem in derselben Arbeit gegebenen Satz für die algebraische Abhängigkeit im arithmetischen Sinne von mehreren Funktionen bedienen. Im § 1 unten wird die p-adische ζ-Funktion definiert und einige Eigenschaften derselben und anderer verwandten Funktionen gegeben.

Im § 2 werden einige Lemmata vom § 2 des I. Teiles verallgemeinert.

Im § 3 werden zunächst die entsprechenden Lemmata vom § 3 des I. Teiles verallgemeinert, und dann einen Satz (Satz II) über die Funktionswerte der p-adischen Funktion

$$q(z) = \lambda z + \mu \zeta(z) \qquad (\lambda, \mu \text{ Konstante}, \mu \neq 0)$$

hergeleitet.

Endlich wird im § 4 zunächst einen zusammenfassenden Satz (Satz IV) bewiesen, und daraus eine Anzahl von Ergebnissen hergeleitet, die schwache p-adische Analoga zu den oben erwähnten Schneiderschen Sätzen bilden.

Für weitere Einzelheiten sei auf den Wortlaut dieser Sätze im Text verwiesen. Siehe auch die Einleitung zum I. Teil dieser Arbeit.

§ 1. Analytische Vorbereitung

Da wir die p-adisch elliptische Funktion $\wp(u\,; g_2, g_3) = \wp(u)$ im § 1 vom ersten Teil dieser Arbeit schon definiert hatten, wollen wir hier das p-adische Analogon der komplexen ζ-Funktion, die wir hier mit demselben Symbol bezeichnen, definieren, und zwar als die analytische Lösung von

$$\frac{d\zeta}{du} = -\wp(u), \tag{1}$$

wobei die Integrationskonstante gleich 0 gesetzt wird. Es ist hiernach

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n}{2n+1} u^{2n+1}, \tag{2}$$

wobei δ_n dieselbe Bedeutung hat wie in (33) von § 1. Teil I. Auch $\zeta(u)$ konvergiert also mindestens für $0 < |u|_p < r_2$, und erst recht für $0 < |u|_p < r_3$. (r_2, r_3 hier haben dieselbe Bedeutung wie bei (32) und (62) vom § 1, Teil I).

Bilden wir nun die Funktion

$$q(u) = \lambda u + \mu \zeta(u) \tag{3}$$

wobei λ, μ zwei Konstante aus dem p-adischen Gebiet bedeuten, mit $\mu \neq 0$. (Dieses μ hat mit μ aus (3) vom § 1, Teil I nichts zu tun. Das dortige μ wird im folgenden nicht verwendet.) $q(u)$ ist danach von vier Parametern g_2, g_3, λ, μ abhängig, so dass wir präziser $q(u) = q(u; g_2, g_3, \lambda, \mu)$ schreiben können, und ist mindestens für $0 < |u|_p < r_2$, also erst recht für $0 < |u|_p < r_3$ konvergent. Es ist speziell

$$q(u; g_2, g_3, 0, 1) = \zeta(u).$$

Wir wollen unten einige Eigenschaften der Funktionen $\wp(u)$, $q(u)$ zusammenstellen, die wir im folgenden gebrauchen werden.

Eigenschaft 1. *Für ein genügend klein gewähltes* $r_4 = r_4(g_2, g_3, \lambda, \mu)$ *mit* $0 < r_4 \leqq r_3$ *ist*

$$q(u) \neq 0 \text{ für alle } u \text{ mit } 0 < |u|_p < r_4. \tag{4}$$

Beweis. Es ist für $0 < |u|_p < r_2$

$$q(u) = \frac{\mu}{u}\Big(1 + \varphi(u)\Big) \tag{5}$$

mit

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{\mu} u^2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_n}{2n+1} u^{2n+2}.$$

Da $\varphi(0) = 0$ ist, folgt aus der Stetigkeit von $\varphi(u)$ an der Stelle $u = 0$, dass mit einem passenden r_4, wobei $0 < r_4 \leqq r_3$, folgendes gilt

$$|\varphi(u)|_p < 1 \quad \text{für} \quad |u|_p < r_4. \tag{6}$$

Daraus folgt $|q(u)|_p = \left|\frac{\mu}{u}\right|_p$ für $0 < |u|_p < r_4$, da für diese u-Werte $|1 + \varphi(u)|_p = 1$ wegen (6), sein wird. Weil $\mu \neq 0$, ist also $|q(u)|_p \neq 0$ für $0 < |u|_p < r_4$, woraus (4) folgt.

Eigenschaft 2. *Est lässt sich das Additionstheorem von $q(u)$ im komplexen Fall auf das p-adische Gebiet übertragen, das wir in folgender Fröm schreiben:*

$$[\wp(u) - \wp(v)]\,[q(u+v) - q(u) - q(v)] - \frac{\mu}{2}\,[\wp'(u) - \wp'(v)] = 0 \tag{7}$$

$$\textit{für } u \neq 0, \qquad v \neq 0, \qquad u + v \neq 0.$$

(Für das Additionstheorem von $q(u)$ im Komplexen vgl. z. B. SIEGEL. Transcendental Numbers, Princeton 1949, S. 88).

Beweis. Das Additionstheorem (7) im p-adischen wird durch eine ähnliche Überlegung wie beim Beweise des Additionstheorems der p-adischen $\wp$-Funktion (Eigenschaft 4 vom §1, Teil I) aus dem Additionstheorem im komplexen hergeleitet, wobei zu beachten ist, dass jetzt die Koeffizienten von Potenzprodukten $u^i v^k$ Polynome mit rationalen Zahlenkoeffizienten in g_2, g_3, λ, μ statt nur in g_2, g_3 sind (Das hiesige μ hat mit dem dortigen Index μ natürlich nichts zu tun).

Eigenschaft 3. *Es gelten für* $0 < |u|_p < r_3$ *folgende Beziehungen unter den Funktionswerten von* q *für die Vielfachen eines Argumentes:*

$$q(mu) = 2q(nu) + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{6\wp^2(nu) - g_2/2}{\wp'(nu)}, \tag{8}$$

falls $m = 2n$,

$$q(mu) = 2q(nu) + q(u) + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{6\wp^2(nu) - g_2/2}{\wp'(nu)} + \frac{\mu}{2} \cdot \frac{\wp'(2nu) - \wp'(u)}{\wp(2nu) - \wp(u)}, \tag{9}$$

falls $m = 2n + 1$,

wobei m, n *natürliche Zahlen bedeuten,* $m > 1$, *sonst beliebig.*

Beweis. Im komplexen Fall sind (8) und (9) unmittelbare Folgerungen des Additionstheorems von $q(u)$. Durch eine ähnliche Überlegung wie beim Beweise der Eigenschaft 5 vom § 1, Teil I schliesst man auf die Gültigkeit von (8) und (9), wobei beachtet wird, dass für $0 < |u|_p < r_3$ $\wp'(nu) \neq 0$, $\wp(2nu) - \wp(a) \neq 0$ (wegen Eigenschaften 3 und 1 vom §1, Teil I) sind.

Eigenschaft 4. *Für* $0 < |u|_p < r_5$, *wobei* $r_5 = r_5(g_2, g_3, \lambda, \mu)$ *eine passende reelle Zahl mit* $0 < r_5 \leq r_4$ *bedeutet, ist*

$$\frac{1}{q(u)} = A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + A_n u^n + \cdots, \tag{10}$$

wobei A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *passende Elemente des p-adischen Gebiets bedeuten und die rechte Seite mindestens für* $|u|_p < r_5$ *konvergent ist.*

Beweis. Aus (5) folgt für $0 < |u|_p < r_4$:

$$\frac{1}{q(u)} = \frac{u}{\mu(1 + \varphi(u))}.$$

Durch eine ähnliche Überlegung wie bei (6) oben können wir ein $r_5 = r_5(g_2, g_3, \lambda, \mu)$ mit $0 < r_5 \leq r_4$ so bestimmen, dass für $|u|_p < r_5$ $|\varphi(u)|_p < \frac{1}{2}$ gilt. Hiernach konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{1 + \varphi(u)} = 1 - \varphi(u) + (\varphi(u))^2 - \cdots + (-1)^n (\varphi(u))^n + \cdots$$

gleichmässig in u für $|u|_p < r_5$. Also können wir (nach dem WEIERSTRASS'schen Doppelreihensatz im p-adischen) die obige Reihe für dieselben u-Werte nach den Potenzen von u anordnen, woraus für $|u|_p < r_5$

$$\frac{1}{1 + \varphi(u)} = \widetilde{A}_0 + \widetilde{A}_1 u + \cdots + \widetilde{A}_{n-1} u^{n-1} + \cdots$$

folgt, wobei die Koeffizienten rechts mit $\widetilde{A}_0$, $\widetilde{A}_1$, ..., $\widetilde{A}_{n-1}$, ... bezeichnet wurden.

Daraus ergibt sich unter Verwendung der am Anfang des Beweises gegebenen Formel

$$\frac{1}{q(u)} = A_1 u + A_2 u^2 + \cdots + A_n u^n + \cdots,$$

wobei $A_n = \frac{1}{\mu} \widetilde{A}_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gesetzt wurde.

Eigenschaft 5. *Zwischen* $f_1(u) = \dfrac{1}{\wp(u\,;\,g_2\,,g_3)}$ *und* $f_2(u) = \dfrac{1}{q(u\,;g_2\,,g_3\,,\lambda,\mu)}$, *wobei* $g_2\,,g_3$ *dieselben Werte in* $f_1(u)$ *und* $f_2(u)$ *haben, besteht auch im p-adischen keine algebraische Abhängigkeit im arithmetischen Sinne, falls* $g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu$ *alle algebraisch sind.*

Beweis. Wären die p-adischen Funktionen $f_1(u)$, $f_2(u)$ algebraisch abhängig i.a.S., so gäbe es nicht sämtlich verschwindende rationale Zahlen

$$c_{ik}\begin{pmatrix} i = 0\,,\ldots,\,l \\ k = 0\,,\ldots,\,m \end{pmatrix},$$

derart, dass

$$\sum_{i,k=0,0}^{l,m} c_{ik}\,(f_1(u))^i\,(f_2(u))^k = 0$$

identisch in u gilt, woraus die weitere Relation

$$\sum_{i,k=0,0}^{l,m} c_{ik}\,(\wp(u))^{l-i}\,(q(u))^{m-k} = 0 \tag{11}$$

identisch in u (mit $u \neq 0$) folgen würde. Die linke Seite von (11) wird aber durch Multiplikation mit einer genügend hohen u-Potenz zu einer Taylorreihe, deren Koeffizienten Polynome in $g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind. Wegen der Voraussetzung über $g_2\,,g_3\,,\lambda,\mu$ sind also die Koeffizienten der Taylorreihe algebraische Zahlen. Die identische Gültigkeit der Relation (11) würde das Verschwinden aller dieser Koeffizienten nach sich ziehen. Wenn wir nun zum komplexen Gebiet übergehen, also für u komplexe Werte statt p-adischer einsetzen, werden diese Koeffizienten wegen ihrer Algebraizität beibehalten. Also verschwinden alle Koeffizienten auch im komplexen Falle, was das identiche Verschwinden der linken Seite von (11) im komplexen Falle nach sich zieht. Also wären die komplexen Funktionen $\wp(u\,;\,g_2,\,g_3)$ und $q(u\,;g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu)$ im Falle der Algebraizität von $g_2\,,g_3\,,\lambda,\,\mu$ algebraisch abhängig i.a.S.

Es sind aber $\wp(u\,;\,g_2\,,g_3)\,,\ q(u\,;g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu)\ (\mu \neq 0)$ im komplexen Gebiet sogar algebraisch unabhängig schlechthin. (Vgl. TH. SCHNEIDER. **Einführung in die Transzendenten Zahlen.** BERLIN-GÖTTINGEN-HEIDELLERG (1957), S. 59 unten).

Dieser Widerspruch löst sich nur, wenn wir die Annahme der algebraischen Abhängigkeit i.a.S. von $f_1(u)$, $f_2(u)$ fallen lassen.

Eigenschaft 6. *Es seien* $g_2\,,g_3\,,g_2^*\,,\ g_3^*$ *alle algebraisch mit* $g_2^3 - 27\,g_3^2 \neq 0$, $g_2^{*3} - 27g_3^{*2} \neq 0$. *Falls* $\wp(u) = \wp(u\,;g_2\,,g_3)\,,\ \wp^*(u) = (u\,;g_2^*,\,g_3^*)$ *im komplexen Gebiet algebraisch unabhängig* i.a.S. *sind, sind dieselben auch im p-adischen Gebiet algebraisch unabhängig* i.a.S.

Beweis. Genau wie beim Beweise der vorigen Eigenschaft schliesst man aus dem Bestehen im p-adischen einer Relation

$$\sum_{i,k=0,0}^{l,m} c_{ik}\,(\wp(u))^i\,(\wp^*(u))^k = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden c_{ik} auf das Bestehen einer Relation mit denselben c_{ik} im komplexen Gebiet. Wenn es also diese letzte Relation nicht geben kann, kann es auch die erste nicht.

Folgerung. *Es sei* β *eine algebraische Zahl von mindestens* 3. *Grad,* $g_2\,,g_3$ *algebraisch. Dann sind die p-adischen Funktionen* $\wp(u\,;g_2\,,g_3)$ *und* $\wp(\beta\,u\,;g_2\,,g_3)$ *algebraisch unabhängig* i.a.S.

Beweis. Es ist $\wp(\beta u) = \beta^{-2} \wp(u; \beta^4 g_2, \beta^6 g_3)$ (Vgl. (3) — (5) vom §1 Teil I). Wenn wir

$$\wp^*(u; g_2^*, g_3^*) = \wp(u; \beta^4 g_2, \beta^6 g_3), \; g_2^* = \beta^4 g_2, \; g_3^* = \beta^6 g_3,$$

nehmen, werden $\wp(u) = \wp(u; g_2, g_3)$ und $\wp^*(u) = \wp^*(u; g_2^*, g_3^*)$ im komplexen Gebiet voneinander algebraisch unabhängig schlechthin, da es hier keine komplexe Multiplikation vorliegen kann. Also nach der vorigen Eigenschaft sind $\wp(u)$, $\wp^*(u)$ im p-adischen Gebiet algebraisch unabhängig. Gesetzt nun, $\wp(u)$ und $\wp(\beta u)$ wären algebraisch abhängig i.a.S. Es würde also eine Relation

$$\sum_{i,k=0,0}^{l,m} c_{ik} (\wp(u))^i (\wp(\beta u))^k = 0$$

mit rationalen nicht sämtlich versechwindenden c_{ik} bestehen. Falls wir hier $\wp(\beta u)$ durch $\beta^{-2} \wp^*(u)$ ersetzen, erhalten wir eine Relation

$$\sum_{i,k=0,0}^{l,m} \frac{c_{ik}}{\beta^{2k}} (\wp(u))^i (\wp^*(u))^k = 0$$

Die hiesigen Koeffizienten sind nicht sämtlich verschwindende algebraische Zahlen. Aus dem Bestehen einer solchen Relation folgt aber das Bestehen einer ähnlichen Relation mit ganzen rationalen Koeffizienten zwischen $\wp(u)$ und $\wp^*(u)$. Dies aber kann, wegen des vorher gesagten, nicht sein.

Eigenschaft 7. *Es seien* g_2, g_3, α *algebraisch mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$, $\alpha \neq 0$. *Dann sind* $\wp(u; g_2, g_3)$ *und* $e^{\alpha u}$ $(= \mathrm{Exp}(\alpha u))$ *auch im p-adischen Gebiet algebraisch unabhängig* i.a.S.

Beweis. Da die Koeffizienten in den Entwicklungen um $u = 0$ von $\wp(u; g_2, g_3)$ und $e^{\alpha u}$ laut Voraussetzung alle algebraisch sind, würde aus der Annahme der algebraischen Abhängigkeit i.a.S. von diesen Funktionen im p-adischen Gebiet dieselbe Eigenschaft im komplexen folgen, was, wegen der Tatsache, dass im komplexen Gebiet $\wp(u)$ doppelt, aber $e^{\alpha u}$ nur einfach periodisch ist, nicht haltbar ist.

§ 2. Arithmetische Vorbereitung

Es bedeute $(\lambda_n^{(1)}, \cdots, \lambda_n^{(k)})$ $(k \geq 1)$ das n. Glied der nach folgender Vorschrift in eine einfache Folge angeordneten k-tupeln von nicht-negativen ganzen rationalen Zahlen :

Ein k-tupel $(\lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(k)})$ soll vor einer zweiten solchen k-tupel $(\tilde{\lambda}^{(1)}, \ldots, \tilde{\lambda}^{(k)})$ kommen,

wenn entweder $\sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i)} < \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}^{(i)}$, oder

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}^{(i)} \text{ aber } \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{(i)} < \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\lambda}^{(i)}, \text{ oder}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}^{(i)} \text{ und } \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{(i)} = \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\lambda}^{(i)} \text{ aber } \sum_{i=1}^{k-2} \lambda^{(i)} < \sum_{i=1}^{k-2} \tilde{\lambda}^{(i)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \text{ oder}$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda^{(i)} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\lambda}^{(i)}, \sum_{i=1}^{k-1} \lambda^{(i)} = \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{\lambda}^{(i)}, \ldots, \sum_{i=1}^{2} \lambda^{(i)} = \sum_{i=1}^{2} \tilde{\lambda}^{(i)} \text{ aber } \lambda^{(k)} < \tilde{\lambda}^{(k)}$$

ist.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Vorschrift eine wirklich lineare Anordnung von k-tupeln $(\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(k)})$ zustande bringt.

Lemma 1. *Es gilt für die Komponenten* $\lambda_n^{(1)},\ldots,\lambda_n^{(k)}$ *den* n. *Gliedes der oben erklärten Folge* $\{(\lambda_n^{(1)},\ldots,\lambda_n^{(k)})\}$ *die obere Abchätzung*

$$\lambda_n^{(1)},\ldots,\lambda_n^{(k)} < \sqrt[k]{k\,!\,n} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Beweis wie bei Lemma 2 vom §2, Teil I, wo die dortige Folge der Spezialfall von der hiesigen für $k=3$ ist.

Lemma 2. *Es bedeute* $(u_n^{(1)},u_n^{(2)},\ldots,u_n^{(k)})$ *daş* u. *Glied der Teilfolge, die aus der obigen Folge* $\{(\lambda_n^{(1)},\ldots,\lambda_n^{(k)})\}$ *durch Weglassung aller Glieder von mit p teilbaren ersten Komponenten zustande gekommen ist (also* $p \nmid u_n^{(1)}$ $(n=1,2,\ldots)$).

Dann ist für $n\to\infty$

$$u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(k)} = O(n^{\frac{1}{k}}). \tag{12}$$

Beweis. Es sei

$$u_n^{(1)}+u_n^{(2)}+\cdots+u_n^{(k)} = N_n+1 \tag{13}$$

gesetzt. Es gilt offenbar $N_n \geq 0$; und ferner

$$N_n \to +\infty \text{ für } n\to\infty, \tag{14}$$

denn die Folge $\{N_n\}$ ist offenbar monoton nicht-abnehmend, und wäre sie beschränkt, so gäbe es wegen

$$0 \leq u_n^{(i)} \leq N_n+1 \quad (i=1,\ldots,k) \tag{14'}$$

nur eine endliche Anzahl von k-tupeln $(u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(k)})$, was nicht zutrifft.

Wir betrachten nun die Anzahl n' der k-tupeln $(u^{(1)},\ldots,u^{(k)})$ mit $u^{(1)}+\cdots+u^{(k)} \leq N_n$. (Dabei ist natürlich $p \nmid u^{(1)}$).

Da, laut des Bildungsgesetzes der Folge $\{(u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(k)})\}$ das k-tupel $(u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(k)})$ nach allen k-tupeln der zuletzt genannten Art kommen muss, folgt

$$n' < n. \tag{14''}$$

Wir wollen jetzt n' bestimmen. Nach dem Sonderungsgesetz von

$$\{(u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(k)})\} \text{ aus } \{(\lambda_n^{(1)},\ldots,\lambda_n^{(k)})\} \text{ muss}$$

$$n' = A_n - B_n \tag{15}$$

sein, wobei A_n, B_n folgende Bedeutungen haben:

(16) $A_n =$ Die Anzahl der Lösungen von $x_1+x_2+\cdots+x_k \leq N_n$ in nichtnegativen, ganzen rationalen Zahlen $x_1,\ldots,x_k$

und

(17) $B_n =$ Die Anzahl der Lösungen von $py+x_2+\cdots+x_k \leq N_n$ in nicht-negativen, ganzen, rationalen Zahlen $y, x_2,\ldots,x_k$, wobei ausserdem $y \neq 0$ sein soll.

Es gilt bekanntlich

(18) $$A_n = \frac{(N_n+1)(N_n+2)\cdots(N_n+k)}{k!} = \frac{1}{k!}N_n^k + o(N_n^k).$$

Um B_n zu berechnen, beachten wir, dass B_n = der Summe der Lösungsanzahlen der Ungleichungen

$$x_2 + \cdots + x_k \leqq N_n - py \qquad \left(y = 1, \ldots, \left[\frac{N_n}{p}\right]\right)$$

in nicht-negativen, ganzen rationalen Zahlen $x_2, \ldots, x_n$ ist. Da diese letzten Ungleichungen von derselben Art sind wie $x_1 + \cdots + x_k \leqq N_n$, ist die Lösungsanzahl von $x_2 + \cdots + x_k \leqq N_n - py$ (y fest) gleich

$$\frac{(N_n - py + 1)\cdots(N_n - py + k - 1)}{(k-1)!},$$

woraus für B_n folgende Formel gewonnen wird:

(19) $$B_n = \sum_{y=1}^{\left[\frac{N_n}{p}\right]} \frac{(N_n - py + 1)\cdots(N_n - py + k - 1)}{(k-1)!}.$$

Um nun B_n bequemer berechnen zu können, setzen wir

(20) $$\left[\frac{N_n}{p}\right] = q, \text{ so dass } N_n = qp + r \quad \text{mit} \quad 0 \leqq r < p$$

wird. Danach ist also für $n \to \infty$

(21) $$q \to +\infty, \ r \text{ beschränkt.}$$

(19) wird hiermit zu

(22) $$B_n = \sum_{y=1}^{q} \frac{((q-y)p + r + 1)\ldots((q-y)p + r + k + 1)}{(k-1)!}$$

Setzen wir in (22) $q - y = z$, so wird

(23) $$B_n = \sum_{z=0}^{q-1} \frac{(pz + r + 1)\ldots(pz + r + k - 1)}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{z=0}^{q-1} \left[\frac{p^{k-1}}{(k-1)!} z^{k-1} + c_1 z^{k-2} + \cdots + c_{k-1}\right],$$

wobei $c_1, \ldots, c_{k-1}$ dieKoeffizienten der z-Potenzen von niedrigeren Graden als $k-1$ bedeuten. Die Summation der rechten Seite von (23) gibt uns jetzt

(24) $$B_n = \frac{p^{k-1}}{k!} q^k + o(q^k).$$

Wenn wir nun in (24) q mit $\left[\frac{N_n}{p}\right]$ ersetzen, erhalten wir endlich daraus

$$B_n = \frac{1}{k\,!\,p} N_k^n + o(N_n^k). \tag{25}$$

Aus (15), (18) und (25) ergibt sich nun

$$n' = \frac{p-1}{p} \frac{N_n^k}{k\,!} + o(N_n^k). \tag{26}$$

(14″) und (26) geben uns jetzt

$$\frac{p-1}{p} \frac{N_n^k}{k\,!} + o(N_n^k) < n. \tag{27}$$

Wählen wir nun ein n_0 so, dass für $n > n_0$

$$| o(N_n^k) |_\infty < \frac{p-1}{2p} \frac{N_n^k}{k\,!} \tag{28}$$

wird. (Dabei stellt $o(N_n^k)$ auf der linken Seite von (28) die Differenz

$$n' - \frac{p-1}{p} \frac{N_n^k}{k!} = A_n - B_n - \frac{p-1}{p} \frac{N_n^k}{k\,!}$$

dar.) Aus (28) folgt

$$\frac{p-1}{p} \frac{N_n^k}{k\,!} + o(N_n^k) > \frac{p-1}{2p} \frac{N_n^k}{k!} \text{ für } n > n_0. \tag{29}$$

Endlich geben (27) und (29) zusammen :

$$\frac{p-1}{2p} \cdot \frac{N_n^k}{k\,!} < n \text{ für } n > n_0\,, \tag{30}$$

was auch in der Form

$$N_n < \left(\frac{k\,!\,2p}{p-1}\right)^{\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{k}} \qquad \text{für } n > n_0 \tag{31}$$

geschrieben werden kann. Aus (31) verbunden mit (14′) folgt nun die Behauptung des Lemma2.

Lemma 3. *Es seien $k\,(\geq 1)$ linear unabhängige Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ aus dem p-adischen Gebiet mit*

$$|\alpha_1|_p > |\alpha_j|_p \qquad (j = 2, \ldots, k) \tag{32}$$

gegeben. Mit diesen Elementen bilden wir die Interpolationsfolge

(33) $$z_n = a_n^{(1)}\alpha_1 + a_n^{(2)}\alpha_2 + \cdots + a_n^{(k)}\alpha_k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit

(34) $$a_n^{(j)} = (u_n^{(j)} + p)\, p^{[\varrho \log_p n]} \qquad \begin{matrix} (j=1,2,\ldots,k) \\ (n = 1, 2, \ldots), \end{matrix}$$

wobei $(u_n^{(1)},\ldots, u_n^{(k)})$ *das* n. *Glied der in Lemma 2 oben beschriebenen Folge.* ϱ *eine positive reelle Zahl,* $\log_p n$ *den gewöhnlichen, reellen Logarithmus von* n *nach der Basis* p *bedeutet.*

Diese Folge $\{z_n\}$ *ist eine nach Null konvergierende und wiederholungsfreie Folge mit der weiteren Eigenschaft, dass die ihr zugeordnete Folge* $\{\log p_n\}$ *ausgeglichen ist, wobei*

(35) $$p_n = \frac{1}{|z_n|_p}$$

gesetzt wurde. (Für eine Definition der Ausgeglichenheit vgl. İÇEN [1], Teil 1, §1).

Beweis. Es gelten laut der Definition von $u_n^{(j)}$:

$$|u_n^{(1)}|_p = 1 \quad , \quad |u_n^{(j)}|_p \leq 1 \qquad (j = 2, \ldots, k),$$

woraus

$$|u_n^{(1)} + p|_p = 1\, , \quad |u_n^{(j)} + p|_p \leq 1 \qquad (j = 2, \ldots, k),$$

also für die in (34) definierten $a_n^{(j)}$

(36) $$|a_n^{(1)}|_p = p^{-[\varrho \log_p n]} \quad , \quad |a_n^{(j)}|_p \leq p^{-[\varrho \log_p n]} \qquad (j = 2, \ldots, k)$$

folgt. Aus (32) und (36) erhalten wir jetzt

(37) $$|a_n^{(1)}\alpha_1|_p > |a_n^{(j)}\alpha_j|_p \qquad (j = 2, \ldots, k).$$

Aus (33) und (37) ergibt sich endlich

$$|z_n|_p = |a_n^{(1)}\alpha_1|_p\, ,$$

woraus im Hinblich auf (36)

(39) $$|z_n|_p = p^{-[\varrho \log_p n]} \cdot |\alpha_1|_p$$

folgt.

Aus (39) ergibt sich unmittelbar die Konvergenz der Folge $\{z_n\}$ nach 0.

Der Beweis der Wiederholungsfreiheit von $\{z_n\}$ wird zunächst wegen der linearen Unabhängigkeit von $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ auf den Beweis derselben Eigenschaft der Folge $\{(a_n^{(1)},\ldots, a_n^{(k)})\}$ zurückgeführt. Dann wird die Wiederholungsfreiheit von $\{(a_n^{(1)},\ldots, a_n^{(k)})\}$ durch eine beim Beweise der Wiederholungsfreiheit von $\{(a_n, b_n, c_n)\}$ bei Lemma 3 von §2, Teil I verwendeter ähnliche Methode auf dieselbe Eigenschaft von $\{(u_n^{(1)},\ldots, u_n^{(k)})\}$ zurückgeführt. Die Wiederholungsfreiheit dieser letzten Folge ist aber klar, da sie Teilfolge von der offenbar Wiederholungsfreien Folge $\{(\lambda_n^{(1)},\ldots, \lambda_n^{(k)})\}$ ist.

Laut (35) und (39) ist die zu $\{z_n\}$ zugeordnete Folge

(40)
$$p_n = \frac{1}{|\alpha_1|_p} p^{[\rho \log_p n]}.$$

Hieraus folgt

(41)
$$\frac{\log p_n}{\log n} \to \varrho \neq 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty .$$

Dies zeigt aber, gemäss Lemma 2 vom §1, Teil I von İÇEN [1] und der Ausgeglichenheit von $\{\log n\}$, dass $\{\log p_n\}$ ausgeglichen ist.

Damit ist der Beweis des Lemma 3 beendet.

§ 3. Schluss

Lemma 1. *Es seien die p-adischen Funktionen* $\wp(u\,;g_2\,,g_3)=\wp(u)$ *und* $q(u;g_2\,,g_3\,,\lambda,\mu) = q(u)$ *mit algebraischen* $\lambda\,,\mu\,,g_2\,,g_3$ $(\mu \neq 0\,, g_2^3 - 27\,g_3^2 \neq 0)$ *gegeben, und es sei* α *ein Element des p-adischen Gebiets mit* $0 < |\alpha|_p < r_3$ (r_3 *wie bei* (62), §1, *Teil I*).

Wenn $\wp(\alpha)$ *und* $q(\alpha)$ *gleichzeitig algebraisch sind, dann ist auch* $q(m\alpha)$, *wobei* m *irgend eine natürliche Zahl bedeutet, algebraisch mit*

(42)
$$\text{Grad von } q(m\alpha) \leq E_0\,,$$

(43)
$$h_{q(m\alpha)} \leq e^{E_1 m^2} \qquad (m=1,2,\ldots)$$

wobei $E_0 = E_0\,(\alpha\,,g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu) > 0$, $E_1 = E_1\,(\alpha\,,g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu) > 0$ *von* m *unabhängig sind*[1].

Beweis. 1°) Algebraizitat von $q\,(m\alpha)\;(m = 1, 2,\ldots)$:

Für $m = 1$ ist $q(m\alpha)$ laut der Voraussetzung des Lemma algebraisch. Für $m > 1$ folgt die Algebraizität von $q(m\alpha)$ aus der von $q(\bar{m}\alpha)$ mit $\bar{m}<m$ laut Formeln (8), (9) von Eigenschaft 3, §1, Teil II. Denn wegen Lemma 2 von §3, Teil I ist $\wp(m\alpha)\;(m = 1,2,\ldots)$ algebraisch, wenn $\wp(\alpha)$ es ist, folglich, weil $\wp'(m\alpha)^2 = 4\,\wp^3(m\alpha) - g_2\,\wp(m\alpha) - g_3$, ist $\wp'(m\alpha)\;(m = 1,2,\ldots)$ es auch, woraus man nach der Bauart derselben Formeln (unter Berücksichtigung der Algebraizität von μ und g_2) auf die Algebraizität von $q(m\alpha)$ aus derselben Eigenschaft von $q(\bar{m}\alpha)$ $(\bar{m} < m)$ schliessen kann. Es ist dabei zu beachten, dass wegen $0 < |\alpha|_p < r_3$ aus den Eigenschaften 1 und 3 vom §1, Teil I das Nichtverschwinden der Nenner in den Formeln (8), (9), d.h. $\wp'(n\alpha) \neq 0$, $\wp(2n\alpha) - \wp(\alpha) \neq 0$ $(n = 1,2,\ldots)$ folgt.

2°) Grad von $q(m\alpha) \leq E_0$:

Wir wollen durch Induktion nach m zeigen, dass

(44)
$$q(m\alpha) \in \mathrm{P}(g_2\,,g_3\,,\lambda\,,\mu\,,\wp(\alpha),\ \wp'(\alpha),\ q(\alpha)) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

ist[2]. Für $m=1$ ist das klar. Falls (44) für alle $\bar{m}<m$ gilt, so gilt es auch für m. Dies folgt aus den obigen Formeln (8), (9) von Eigenschaft, § 1, Teil II, zusammen mit der Tatsache, dass $\wp(m\alpha) \in \mathrm{P}(\wp(\alpha), g_2\,,g_3)$ und $\wp'(m\alpha) \in \mathrm{P}(\wp(\alpha),\ \wp'(\alpha), g_2\,,g_3)$ $(m = 1, 2,\ldots)$ ist. [$\wp(m\alpha) \in \mathrm{P}(\wp(\alpha), g_2\,,g_3)$ ist für $m = 1$ klar. Für $m > 1$ folgt es aus den Formeln (18) vom §3, Teil I zusammen mit der dort bewiesenen Tatsache, dass für $0 < |\alpha| < r_3$ die in (18) auftretenden Koeffizienten von $\wp(m\alpha)$, d.h. $\wp'(\alpha)^2 P_m^2\,(\wp(\alpha))$ bzw. $P_m^2\,(\wp(\alpha))$ je nachdem m gerade bzw. ungerade ist, von Null verschieden ist. Um $\wp'(m\alpha) \in \mathrm{P}(\wp(\alpha), (\wp'(\alpha), g_2\,,g_3)$ daraus zu erhalten, differenzieren wir die aus (65) vom §1, Teil I durch Einsetzung von m statt n und Teilung mit dem Koeffizienten von $\wp(mu)$ gewonnene Formel

---

[1]) Es wird hier, wie im I. Teil dieser Arbeit, die Höhe einer algebraischen Zahl ζ mit h_ζ bezeichnet.

[2]) Hier bedeutet P, wie im I. Teil, den Körper der rationalen Zahlen.

$$\wp(mu) = \begin{cases} \wp(u) - \dfrac{P_{m+1}(\wp(u))\, P_{m-1}(\wp(u))}{(4\wp^3(u) - g_2\, \wp(u) - g_3)\, P_m^2(\wp(u))}, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \wp(u) - \dfrac{(4\wp^3(u) - g_2\, \wp(u) - g_3)\, P_{m+1}(\wp(u))\, P_{m-1}(\wp(u))}{P_m^2(\wp(u))}, & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

($m > 1$) nach u an der Stelle $u = \alpha$. So gewinnnen wir

$$\wp'(m\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\mathfrak{A}_m(\wp(\alpha))\, \wp'(\alpha)}{(4\wp^3(\alpha) - g_2\, \wp(\alpha) - g_3)^2\, P_m^4(\wp(u))}, & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\mathfrak{B}_m(\wp(\alpha))\, \wp'(\alpha)}{P_m^4(\wp(\alpha))}, & \text{falls } m \text{ ungerade } (m > 1), \end{cases}$$

wobei $\mathfrak{A}_m(\alpha))$, $\mathfrak{B}_m(\wp(\alpha))$ passende Polynome in $\wp(\alpha)$ sind mit Koeffizienten, die selber Polynome in g_2, g_3 mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind. Dabei sind die Nenner $(4\wp^3(\alpha) - g_2\, \wp(\alpha) - g_3)^2\; P_n^4(\wp(\alpha)) = \wp'(\alpha)^4\, P_m^4(\wp(\alpha))$ bzw. $P_m^4\;(\wp(\alpha))$ laut dem vorhin Gesagten (wegen $0 < |\alpha|_p < r_3$) von Null verschiedene Polynome in $\wp(\alpha)$, g_2, g_3 mit rationalen Zahlenkoeffizienten sind. Aus der obigen Darstellung von $\wp'(m\alpha)$ ($m > 1$) folgt also die Behauptung $\wp'(m\alpha) \in \mathbf{P}(\wp(\alpha), \wp'(\alpha), g_2, g_3)$ für $m > 1$. Für $m = 1$ aber ist sie trivialerweise richtig.]. Um jetzt die Behauptung (42) zu beweisen, genügt es

$$E_0 = [\mathbf{P}(g_2, g_3, \lambda, \mu, \wp(\alpha), \wp'(\alpha), q(\alpha)) : \mathbf{P}] \tag{45}$$

zu setzen.

3°) $h_{q(m\alpha)} \leq e^{E_1 m^2}$ $(m = 1, 2, \ldots)$:

Hier stützen wir uns wieder auf die Formeln (8), (9) der Eigenschaft 3, §1, Teil II, die wir jetzt mit den Abkürzungen

$$\begin{cases} \theta_n = \dfrac{\mu}{2} \cdot \dfrac{6\wp^2(n\alpha) - \dfrac{g_2}{2}}{\wp'(n\alpha)} \\ \varphi_n = \dfrac{\mu}{2} \cdot \dfrac{\wp'(2n\alpha) - \wp'(\alpha)}{\wp(2n\alpha) - \wp(\alpha)} \end{cases} \tag{46}$$

in der Form

$$q(m\alpha) = 2q(n\alpha) + \theta_n \qquad \text{für } m = 2n, \tag{47}$$

$$q(m\alpha) = 2q(n\alpha) + q(n\alpha) + \; + \theta_n + \varphi_n \quad \text{für } m = 2n + 1 \tag{48}$$

schreiben wollen.

Es werden zunächst die Höhen von θ_n und φ_n abgeschätzt:

Da $\wp'(n\alpha)^2 - 4\wp(n\alpha)^3 + g_2\, \wp(n\alpha) + g_3 = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ist, gilt laut Lemma 1, § 2, Teil I mit $\alpha_1 = \wp(n\alpha)$, $\alpha_2 = g_2$, $\alpha_3 = g_3$, $\eta = \wp'(n\alpha)$:

$$h_{\wp'(n\alpha)} \leq (2w)!\, 2^{2w} \cdot 3^{6w} \cdot 4^w \cdot h_{g_2}^w \cdot h_{g_3}^w \cdot h_{\wp(n\alpha)}^w, \tag{49}$$

wobei $w = [\mathbf{P}(\wp(\alpha), g_2, g_3) : \mathbf{P}]$ ist (Es ist hier nämlich $\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{P}(\wp(\alpha), g_2, g_3)$, da wegen des in 2°) oben gesagten $\wp(n\alpha) \in \mathbf{P}(\wp(\alpha), g_2, g_3)$ war). Aus (49) oben und (17) von Lemma 2, § 3, Teil I folgert man

$$h_{\wp'(n\alpha)} \leq e^{D_1 n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{50}$$

mit einem $D_1 = D_1(\alpha, g_2, g_3) > 0$, das von n unabhängig ist. Aus der ersten Gleichung von (46) ergibt sich nun

$$4\wp'(n\alpha)\theta_n - 12\mu\wp^2(n\alpha) + g_2\mu = 0,$$

worauf, wegen $\wp'(n\alpha) \neq 0$, weil $0 < |n\alpha|_p \leq |\alpha|_p < r_3$, das Lemma 2, § 2, Teil I mit $k = 4$, $\alpha_1 = \mu$, $\alpha_2 = g_2$, $\alpha_3 = \wp(n\alpha)$, $\alpha_4 = \wp'(n\alpha)$, $\eta = \theta_n$ angewendet werden kann, was uns

$$h_{\theta_n} \leq \widehat{w}!\, 2^{\widehat{w}} \cdot 3^{4\widehat{w}} \cdot (12)^{\widehat{w}} \cdot h_\mu^{\widehat{w}} \cdot h_{g_2}^{\widehat{w}} \cdot h_{\wp(n\alpha)}^{2\widehat{w}} \cdot h_{\wp'(n\alpha)}^{\widehat{w}} \tag{51}$$

gibt, wobei $\widehat{w} = [\mathbf{P}(g_2, g_3, \mu, \wp(\alpha), \wp'(\alpha)) : \mathbf{P}]$, denn $\alpha_i \in \mathbf{P}(g_2, g_3, \mu, \wp(\alpha), \wp'(\alpha))$ $(i = 1, \ldots, 4)$ ist. (51) lässt sich schreiben als

$$h_{\theta_n} \leq D_2 \cdot h_{\wp(n\alpha)}^{2\widehat{w}} \cdot h_{\wp'(n\alpha)}^{\widehat{w}} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{52}$$

wobei $D_2 = D_2(\alpha, g_2, g_3, \mu) > 1$ eine Abkürzung des offenbar von n unabhängigen Koeffizienten von $h_{\wp(n\alpha)}^{2\widehat{w}}\, h_{\wp'(n\alpha)}^{\widehat{w}}$ auf der rechten Seite von (51) bedeutet. Aus (52) zusammen mit (50) oben und (17) von Lemma 2, § 3, Teil I folgt

$$h_{\theta_n} \leq e^{D_3 n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{53}$$

mit geeignetem, von n unabhängigem $D_3 = D_3(\alpha, g_2, g_3, \mu) > 0$.

Es bleibt jetzt φ_n abzuschätzen. Dazu schreiben wir die zweite Gleichung von (46) wie folgt:

$$2[\wp(2n\alpha) - \wp(\alpha)]\varphi_n - \mu[\wp'(2n\alpha) - \wp'(\alpha)] = 0. \tag{54}$$

Hier ist $2n\alpha \neq \pm\alpha$ wegen $\alpha \neq 0$, also $\wp(2n\alpha) - \wp(\alpha) \neq 0$ wegen Eigenschaft 1, § 1, Teil I. Es lässt sich also auf (54) das Lemma 1, § 2, Teil I anwenden mit $k = 5$, $\alpha_1 = \mu$, $\alpha_2 = \wp(\alpha)$, $\alpha_3 = \wp'(\alpha)$, $\alpha_4 = \wp(2n\alpha)$, $\alpha_5 = \wp'(2n\alpha)$, $\eta = \varphi_n$, woraus

$$h_{\varphi_n} \leq \widehat{w}!\, 2^{\widehat{w}} \cdot 3^{5\widehat{w}} \cdot 2^{\widehat{w}} \cdot h_\mu^{\widehat{w}} \cdot h_{\wp(\alpha)}^{\widehat{w}} \cdot h_{\wp'(\alpha)}^{\widehat{w}} \cdot h_{\wp(2n\alpha)}^{\widehat{w}} \cdot h_{\wp'(2n\alpha)}^{\widehat{w}} \tag{55}$$

folgt, wobei wieder $\widehat{w} = [\mathbf{P}(g_2, g_3, \mu, \wp(\alpha), \wp'(\alpha)) : \mathbf{P}]$ ist, weil auch hier

$$\alpha_i = \mathbf{P}(g_2, g_3, \mu, \wp(\alpha), \wp'(\alpha)) \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

gilt. Aus (55), (50) oben und (17) von Lemma 2, § 3, Teil I erhält man

$$h_{\varphi_n} \leq e^{D_4 n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{56}$$

mit einem passenden, von n unabhängigem $D_4 = D_4(\alpha, g_2, g_3, \mu) > 0$.

Wir wollen jetzt durch Induktion beweisen, dass mit passenden, von m unabhängigem $E_2 = E_2(\alpha, g_2, g_3, \lambda, \mu) > 0$ und $E_3 = E_3(\alpha, g_2, g_3, \lambda, \mu) > 0$ folgendes gilt

$$\left|\overline{q(m\alpha)}\right| \leq e^{E_2 m^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots), \tag{57}$$

$$\text{Nenner von } q(m\alpha) \leq e^{E_3 m^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{58}$$

Zu (57): Es sei E_2 der Einschränkung

$$E_2 \geq \max\left(1\,,\, \log \overline{|q(\alpha)|}\right) \tag{59}$$

unterworfen. Dann ist (57) für $m = 1$ erzwungen. Es sei jetzt $m > 1$. Falls m gerade, d.h. $m = 2n$ ist, folgt laut Induktionsvoraussetzung aus (47) zusammen mit $\overline{|\theta_n|} = h_{\theta_n} + 1 \leq 2h_{\theta_n}$:

$$\begin{aligned}\overline{|q(2n\alpha)|} &\leq 2\,\overline{|q(n\alpha)|} + \overline{|\theta_n|}\\ &\leq 2\,e^{E_2 n^2} + 2\,h_{\theta_n}\,,\end{aligned}$$

was zusammen mit (53)

$$\overline{|q(2n\alpha)|} \leq 2\,e^{E_2 n^2} + 2\,e^{D_3 n^2} \tag{60}$$

gibt. Wenn wir jetzt E_2 der ferneren Einschränkung

$$E_2 \geq D_3 \tag{61}$$

unterwerfen, wird (60) zu

$$\overline{|q(2n\alpha)|} \leq 4\,e^{E_2 n^2}\,. \tag{62}$$

(62) kann nun wie folgt geschrieben werden

$$\overline{|q(2n\alpha)|} \leq e^{E_2 n^2 + 2\log 2}\,. \tag{63}$$

Da $\log 2 > 1$, $n \geq 1$ und laut (59) $E_2 \geq 1$ ist, ist hiernach $E_2\, n^2 + 2\log 2 < 3E_2\, n^2 < E_2(2n)^2$, woraus (63) zu

$$\overline{|q(2n\alpha)|} \leq e^{E_2(2n)^2} \tag{64}$$

wird. Nun sei m ungerade, d.h. $m = 2n + 1$. Es folgt nun aus (48) wie oben

$$\begin{aligned}\overline{|q((2n+1)\alpha)|} &\leq 2\,\overline{|q(n\alpha)|} + \overline{|q(\alpha)|} + \overline{|\theta_n|} + \overline{|\varphi_n|}\\ &\leq 2\,e^{E_2 n^2} + 2h_{q(\alpha)} + 2\,h_{\theta_n} + 2h_{\varphi_n}\,,\end{aligned}$$

was zusammen mit (53) und (56)

$$\overline{|q((2n+1)\alpha)|} \leq 2\left(e^{E_2 n^2} + e^{\log h_{q(\alpha)}} + e^{D_3 n^2} + e^{D_4 n^2}\right) \tag{65}$$

gibt. Unterwerfen wir jetzt E_2 der noch weiteren Bedingung

$$E_2 \geq \max\left(\log h_{q(\alpha)},\, D_3\,,\, D_4\right), \tag{66}$$

so folgt aus (65):

$$\overline{|q((2n+1)\alpha)|} \leq 8\,e^{E_2 n^2} = e^{E_2 n^2 + \log 8}\,. \tag{67}$$

Da $\log 8 < 3$, $E_2 \geq 1$ und $n \geq 1$ sind, folgt

$$E_2\, n^2 + \log 8 < 4E_2\, n^2 < E_2\,(2n+1)^2\,,$$

womit (67) zu

$$(68) \qquad \overline{|q((2n+1)\alpha)|} \leq e^{E_2(2n+1)^2}$$

wird. Da es offenbar möglich ist, E_2 so zu wählen, dass es allen ihm vorgeschriebenen Bedingungen (59), (61) und (66) genügt,ist laut (64) und (68) der Induktionsbeweis von (57) beendet.

Zu (58) : Es sei N_m der Nenner von $q(m\alpha)$, $\widehat{A}_n$ derjenige von θ_n , $\widehat{B}_n$ der von φ_n. Wenn wir E_3 gemäss der Einschränkung

$$(69) \qquad E_3 \geq \text{Max}\,(1, \log N_1)$$

wählen, dann ist die Richtigkeit von (58) für $m = 1$ erzwungen. Es sei nun $m > 1$. Falls $m = 2n$ ist, gilt wegen (47) $N_{2n} \mid N_n \cdot \widehat{A}_n$, also

$$(70) \qquad N_{2n} \leq N_n \cdot \widehat{A}_n \leq \cdot h_{\theta n} ,$$

da $\widehat{A}_n \leq h_{\theta n}$ ist, woraus wegen der Induktionsvoraussetzung und (53)

$$(71) \qquad N_{2n} \leq e^{E_3 n^2} \cdot e^{D_3 n^2} = e^{(E_3 + D_3) n^2}$$

folgt. Wenn wir nun E_3 der weiteren Einschränkung

$$(72) \qquad E_3 \geq D_3$$

unterwerfen, wird (71) zu

$$(73) \qquad N_{2n} \leq e^{2 E_3 n^2} \leq e^{E_3 (2n)^2} .$$

Falls $m = 2n + 1$, ist wegen (48) :

$$N_{2n+1} \mid N_n \cdot N_1 \cdot \widehat{A}_n \cdot \widehat{B}_n ,$$

woraus

$$(74) \qquad N_{2n+1} \leq N_n \cdot N_1 \cdot \widehat{A}_n \cdot \widehat{B}_n$$

folgt. Unter Mitberücksichtigung von (53), (56) und $\widehat{A}_n \leq h_{\theta n}$, $\widehat{B}_n \leq h_{\varphi n}$ ergibt sich laut Induktionsvoraussetzung folgendes aus (74) :

$$(75) \qquad \begin{aligned} N_{2n+1} &\leq N_n \cdot N_1 \cdot h_{\theta n} \cdot h_{\varphi n} \\ &\leq e^{E_3 n^2 + \log N_1 + D_3 n^2 + D_4 n^2} . \end{aligned}$$

Wenn wir nun E_3 der nochmaligen Einschränkung

$$(76) \qquad E_3 \geq \text{Max}\,(\log N_1 \ , D_3 \, , D_4)$$

unterwerfen, dann folgt aus (75) :

$$(77) \qquad N_{2n+1} \leq e^{4 E_3 n^2} \leq e^{E_3 (2n+1)^2}$$

Da es offenbar möglich ist, E_3 gemäss allen Einschränkungen, d.h. gemäss (66), (69) und (76), zu wählen, ist laut (73) und (77) der Induktionsbeweis von (58) beendet.

Nach diesen Vorbereitungen bleibt es, die Behauptung des Lemma über $h_{q(m\alpha)}$ zu beweisen, was folgendermassen geschehen wird :

Es ist zunächst, laut einer schon im Teil I dieser Arbeit, §3, Ende vom Beweis des Lemma I. erwähnten Eigenschaft der Höhe einer ganzen algebraischen Zahl (vgl. TH. SCHNEIDER. *Einführung in die Transzendente Zahlen*, S. 10 (Hilfssatz 4)) :

$$h_{N_m q(m\alpha)} \leqq 2^{E_0} \left|\overline{N_m \cdot q(m\alpha)}\right|^{E_0} \tag{78}$$

$$= 2^{E_0} \,.\, N_m^{E_0} \left|\overline{q(m\alpha)}\right|^{E_0} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

denn aus der schon bewiesenen Abschätzung (42) wissen wir, dass der Grad von $q(m\alpha) \leqq E_0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ist. Ausserdem gilt, wie bei der oben angeführten Stelle vom Teil I,

$$h_{q(m\alpha)} \leqq N_m^{E_0} \cdot h_{N_m\, q(m\alpha)} \tag{79}$$

Die Einsetzung von (78) in (79) gibt jetzt

$$h_{q(m\alpha)} \leqq 2^{E_0}\, N_m^{2E_0} \cdot \left|\overline{q\,(m\alpha)}\right|^{E_0} \tag{80}$$

Aus (57, (58) und (80) folgt nun

$$h_{q(m\alpha)} \leqq 2^{E_0} \cdot e^{2E_0E_3m^2} \cdot e^{E_0E_2m^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{81}$$

Falls wir endlich in (81)

$$E_1 = E_0 \log 2 + 2\, E_0\, E_3 + E_0\, E_2 \tag{82}$$

setzen, wird-laut (45), (57) und (57)- $E_1 = E_1\,(\alpha, g^2, g_3, \lambda, \mu) > 0$ und von m unabhängig sein, und es wird

$$h_{q(m\alpha)} \leqq e^{E_1 m^2} \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{83}$$

sein, womit das Lemma in allen Teilen bewiesen ist.

Lemma 2. Wir betrachten ein p-adisches Funktionenpaar

$$\wp(u\,; g_2\,, g_3) = \wp(u),\; q(u\,; g_2\,, g_3\,, \lambda\,, \mu) = q(u) \qquad \text{mit algebraischen}$$

$$g_2\,, g_3\,, \lambda\,, \mu\; (\mu \neq 0,\; g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0).$$

Es seien ferner k (über P) linear unabhängige Elemente aus dem p-adischen Gebiet gegeben mit $0 < |\,\alpha_j\,|_p < r_3$ $(j = 1, \ldots, k)$, wobei r_3 dieselbe Bedeutung wie (62) vom §1, Teil 1 haben soll.

Wenn $\wp(\alpha_j)$, $q(\alpha_j)$ $(j = 1, \ldots, k)$ alle algebraisch sind, dann sind

$$\wp(m_1\,\alpha_1 + \ldots + m_k\alpha_k),\; q(m_1\,\alpha_1 + \ldots + m_k\,\alpha_k)$$

für alle k-tupeln $(m_1 \ldots m_k)$ von natürlichen Zahlen algebraisch mit

$$\text{Grad von } \wp(m_1\,\alpha_1 + \ldots + m_k\,\alpha_k) \leqq C_0^{(k)}\,, \tag{84}$$

$$h_{\wp(m_1\,\alpha_1 + \ldots + m_k\,\alpha_k)} \leqq e^{C_1^{(k)}\,(m_1^2 + \ldots + m_k^2)}\,, \tag{85}$$

und

$$\text{Grad von } q(m_1\,\alpha_1 + \ldots + m_k\,\alpha_k) \leqq E_0^{(k)}\,, \tag{86}$$

$$(87)\qquad h_{q(m_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)} \leq e^{E_1^{(k)}(m_1^2+\dots+m_k^2)} \; .$$

wobei $C_0^{(k)}$, $C_1^{(k)}$, $E_0^{(k)}$, $E_1^{(k)}$ passende, von $g_2, g_3, \lambda, \mu, k, \alpha_j$ $(j = 1, \dots, k)$ abhängende, aber von $m_1, m_2, \dots, m_k$ unabhängige positive reelle Zahlen bedeuten.

Beweis. Die Algebraizität von $\wp(m_1\alpha_2 + \dots + m_k\alpha_k)$ und die Behauptungen (84), (85) stellen eine Verallgemeinerung des Lemma 3 vom § 3, Teil I von $k=3$ auf allgemeines k dar und werden mit derselben Methode wie dort, verbunden mit einer Induktion nach k, bewiesen.

Nun zu den Behauptungen über $q(m_1\alpha_2 + \dots + m_k\alpha_k)$:

Für $k=1$ reduziert sich das obige Lemma 2 auf Lemma 1 dieses Paragraphen mit $E_0^{(1)}=E_0$, $E_1^{(1)} = E_1$. Es seien nun die Algebraizität und (86), (87) für k-1 schon bewiesen. Wir setzen in der Additionsformel (7), § 1, Teil II von q-Funktion $u = m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1}$, $v = m_k\alpha_k$ und erhalten

$$\begin{aligned}(88)\qquad & 2\,[\wp(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}) - \wp(m_k\alpha_k)]\, q(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k)\\ & - 2\,[\wp(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1}) - \wp(m_k\alpha_k)]\,[q(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_1) + q(m_k\alpha_k)]\\ & - \mu\,[\wp'(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1}) - \wp'(m_k\alpha_k)] = 0\end{aligned}$$

Denken wir dies als eine Gleichung nach $q(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k)$, so wissen wir aus Lemma 1 oben, der Induktionsvoraussetzung und dem ersten Teil (über $\wp(u)$) dieses Lemma, dass alle darin vorkommenden anderen Grössen algebraisch sind, und ferner wegen der linearen Unabhängigkeit von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und Eigenschaft 1 (§ 1, Teil I) der $\wp$-Funktion, dass der Koeffizient von $q(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k)$ in (88) von Null verschieden ist. Es ist hiernach auch $q(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k)$ algebraisch und es gilt sogar

$$\begin{aligned}(89)\qquad & q(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k)\\ & \in \tilde{K}\,(\wp'(m_k\alpha_k), \wp'(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1}), q(m_k\alpha_k), q(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1}))\end{aligned}$$

mit

$$(90)\qquad \tilde{K} = \mathrm{P}(g_2, g_3, \lambda, \mu).$$

Laut (84) für $k=1$ ist der Grad in bezug auf P von $\wp(m_k\alpha_k) \leq C_0^{(1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_k)$; also ist der Grad von $\wp(m_k\alpha_k)$ in bezug auf $\tilde{K}$ erst recht $\leq C_0^{(1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_k)$. Aus der Relation $\wp'(m_k\alpha_k)^2 = 4\wp^3(m_k\alpha_k) - g_2\wp(m_k\alpha_k) - g_3$ folgert man jetzt:

$$(91)\qquad \text{Grad von } \wp'(m_1\alpha_1) \text{ in bezug auf } \tilde{K} \leq 2C_0^{(1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_k).$$

Wenn man nun mit $\wp'(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1})$ ähnlich verfährt, findet man

$$\begin{aligned}(92)\qquad & \text{Grad von } \wp'(m_1\alpha_1 + \dots + m_{k-1}\alpha_{k-1}) \text{ in bezug auf } \tilde{K}\\ & \leq 2C_0^{(k-1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}).\end{aligned}$$

Laut Lemma 1 bzw. der Induktionsvoraussetzung gilt

Grad von $q(m_k \alpha_k)$ in bezung auf $\mathbf{P} \leqq E_0^{(1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_k)$ bzw.

Grad von $q(m_1 \alpha_1 + \ldots + m_{k-1} \alpha_{k-1})$ in bezug auf $\mathbf{P} \leqq E_0^{(k-1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1})$, also erst recht

(93) Grad von $q(m_k \alpha_k)$ in bezug auf $K \leqq E_0^{(1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_k)$,

(94) Grad von $q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_{k-1} \alpha_{k-1})$ in bezug auf $\widetilde{K}$

$$\leqq E_0^{(k-1)}(\lambda, \mu, g_2, g_3, \alpha_1, \cdots, \alpha_{k-1}).$$

Aus (91), (92), (93) und (94) folgt nun

$$[\widetilde{\widetilde{K}} : \widetilde{K}] \leqq 4\, C_0^{(1)} \cdot C_0^{(k-1)} \cdot E_0^{(1)} \cdot E_0^{(k-1)}, \tag{95}$$

wobei $\widetilde{\widetilde{K}}$ den Körper

$$\widetilde{K}(\wp'(m_k \alpha_k), \wp'(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_{k-1} \alpha_{k-1}), q(m_k \alpha_k), q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_{k-1} \alpha_{k-1}))$$

auf der rechten Seite von (89) bedeutet.

Hiernach wird erst recht

(96) Grad von $q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_k \alpha_k)$ in bezug auf $\widetilde{K} \leqq 4\, C_0^{(1)} C_0^{(k-1)} E_0^{(1)} E_0^{(k-1)}$

sein, wobei rechts die Argumente von $C_0^{(1)}, C_0^{(k-1)}, E_0^{(1)}, E_0^{(k-1)}$ zur Abkürzung weggelassen worden sind. Es folgt aus (96):

(97) Grad von $q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_k \alpha_k)$ in bezug auf $\mathbf{P}$

$$\leqq [\widetilde{K} : P] \cdot 4\, C_0^{(1)} C_0^{(k-1)} E_0^{(1)} E_0^{(k-1)}.$$

Wenn wir nun

$$[\widetilde{K} : P] \cdot 4\, C_0^{(1)} C_0^{(k-1)} \cdot E_0^{(1)} \cdot E_0^{(k-1)} = E_0^{(k)} \tag{98}$$

setzen, sehen wir, dass $E_0^{(k)}$ von $m_1, m_2, \cdots, m_k$ unabhängig ist, womit der Induktionsbeweis von (86) beendet ist.

Um nun (87) zu beweisen, bedienen wir uns der Formel (88) und der Induktion nach k. Für $k = 1$ ist (87), wie schon gesagt wurde, nach Lemma 1 richtig. Für $k < 1$ fassen wir uns (88) ins Auge. Da der Koeffizient von $q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_k \alpha_k)$ laut des vorher gesagten nicht verschwindet, ist auf die Relation (88) das Lemma 1, § 2, Teil I anwendbar, wo wir 7 statt der dortigen k, μ statt α_1, $\wp(m_k \alpha_k)$ statt α_2, $\wp'(m_k \alpha_k)$ statt α_3, $q(m_k \alpha_k)$ statt α_4,

$\wp(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_{k-1} \alpha_{k-1})$ statt α_5,

$\wp'(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_{k-1} \alpha_{k-1})$ statt α_6,

$q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_{k-1} \alpha_{k-1})$ statt α_7,

$q(m_1 \alpha_1 + \cdots + m_k \alpha_k)$ statt η und $\widetilde{\widetilde{K}}$ statt K nehmen

können.

Da $$[\tilde{\tilde{K}} : \mathbf{P}] = [\tilde{\tilde{K}} : \tilde{K}] \cdot [\tilde{K} : \mathbf{P}]$$

ist, folgt laut (95) und (98):

$$[\tilde{\tilde{K}} : \mathbf{P}] \leq E_0^{(k)}. \tag{99}$$

Es folgt also aus dem oben genannten Lemma, zusammen mit (99):

$$h_q(m_1\alpha_1 + \ldots + m_k\alpha_k) \leq (\widehat{E}_0^{(k)})\,!\, 2^{E_0^{(k)}} \cdot 3^{7E_0^{(k)}} \cdot 2^{E_0^{(k)}} \cdot h^{E_0^{(k)}} \cdot$$

$$\cdot \left(h_{\wp(m_k\alpha_k)} \cdot h_{\wp'(m_k\alpha_k)} \cdot h_{q(m_k\alpha_k)}\right)^{E_0^{(k)}} \cdot$$

$$\cdot \left(h_{\wp(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})} \cdot h_{\wp'(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1})} \cdot h_{q(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})}\right)^{E_0^{(k)}},$$

wobei $\widehat{E}_0^{(k)} = [E_0^{(k)}] + 1$ ist, was wir in der Form

$$h_{q(m_1\alpha_1+\ldots+m_k\alpha_k)} \leq \mathscr{E}_1^{(k)} \cdot \left(h_{\wp(m_k\alpha_k)} \cdot h_{\wp'(m_k\alpha_k)} \cdot h_{q(m_k\alpha_k)}\right)^{E_0^{(k)}} \cdot \tag{100}$$

$$\cdot \left(h_{\wp(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})} \cdot h_{\wp'(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})} \cdot h_{q(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1})}\right)^{E_0^{(k)}}$$

mit

$$\mathscr{E}_1^{(k)} = (\widehat{E}_0^{(k)})\,!\, 2^{E_0^{(k)}} \cdot 3^{7E_0^{(k)}} \cdot 2^{E_0^{(k)}} \cdot h_\mu^{E_0^{(k)}},\quad \widehat{E}_0^{(k)} = [E_0^{k}] + 1, \tag{101}$$

schreiben wollen. Aus

$$\wp'(m_k\alpha_k)^2 - 4\wp(m_k\alpha_k)^3 - g_2\,\wp(m_k\alpha_k) - g_3 = 0\text{, bzw.}$$
$$\wp'(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})^2 - 4\wp(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})^3 - g_2\wp(m_1\alpha_1+\ldots+m_{-1}\alpha_{k-1}) - g_3 = 0$$

folgt nach Lemma 1, §2, Teil I mit $\tilde{\tilde{K}}$ statt K:

$$h_{\wp'(m_k\alpha_k)} \leq (2\,\widehat{E}_0^{(k)})!\,2^{2E_0^{(k)}} \cdot 3^{10E_0^{(k)}} \cdot 4^{E_0^{(k)}} \cdot h_{g_2}^{E_0^{(k)}} \cdot h_{g_3}^{E_0^{(k)}} \cdot h^{3E_0^{(k)}}_{\wp(m_k\alpha_k)},$$

d.h.

$$h_{\wp'(m_k\alpha_k)} \leq \mathscr{E}_2^{(k)} \cdot h^{3E_0^{(k)}}_{\wp(m_k\alpha_k)} \tag{102}$$

mit

$$\mathscr{E}_2^{(k)} = (2\,\widehat{E}_0^{(k)})\,!\, 2^{2E_0^{(k)}} \cdot 3^{10E_0^{(k)}} \cdot 4^{E_0^{(k)}} \cdot h_{g_2}^{E_0^{(k)}} \cdot h_{g_3}^{E_0^{(k)}}, \tag{103}$$

bzw.

$$h_{\wp'(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})} \leq \mathscr{E}_2^{(k)} \cdot h^{3E_0^{(k)}}_{\wp(m_1\alpha_1+\ldots+m_{k-1}\alpha_{k-1})}. \tag{104}$$

Es ergibt sich nun aus der Einsetzung von (102) und (104) in (100):

$$(105)\qquad h_{q(m_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)}$$

$$\leq \mathscr{E}_3(k)\cdot h_{\wp(m_k\alpha_k)}^{\widetilde{E}_0^{(k)}}\cdot h_{q(m_k\alpha_k)}^{E_0^{(k)}}\ \cdot\ h_{\wp(m_1\alpha_1+\dots+m_{k-1}\alpha_{k-1})}^{\widetilde{E}_0^{(k)}}\cdot h_{q(m_1\alpha_1+\dots+m_{k-1}\alpha_{k-1})}^{E_0^{(k)}}$$

mit

$$(106)\qquad \mathscr{E}_3(k) = \mathscr{E}_1(k)(\mathscr{E}_2(k))^{2E_0^{(k)}} \quad \text{und} \quad \widetilde{E}_0(k) = E_0(k) + 3(E_0(k))^2 .$$

Auf die rechte Seite von (105) wenden wir jetzt (85) und die Induktionsvoraussetzung über q an. So wird (105) zu

$$(107)\qquad h_{(qm_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)} \leq \mathscr{E}_3(k)\cdot e^{\widetilde{E}_0^{(k)}C_1^{(k-1)}(m_1^2+\dots+m_{k-1}^2)+\widetilde{E}_0^{(k)}C_1^{(1)}m_k^2}$$

$$\cdot\, e^{E_0^{(k)}\cdot E_1^{(k-1)}(m_1^2+\dots+m_{k-1}^2)+E_0^{(k)}E_1^{(1)}m_k^2} .$$

Es sei jetzt

$$(108)\qquad \max\left(\widetilde{E}_0(k)\,C_1(k-1)\,,\ \widetilde{E}_0(k)\,C_1(1)\,,\ E_0(k)\,E_1(k-1)\,,\ E_0(k)\,E_1(1)\,,\ \log\mathscr{E}_3(k)\right) = \widetilde{\widetilde{E}}_1(k)$$

gesetzt. Aus (107) und (108) folgt

$$(109)\qquad h_{q(m_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)} \leq e^{3\,\widetilde{\widetilde{E}}_1^{(k)}(m_1^2+\dots+m_k^2)} ,$$

woraus man die Behauptung (87) mit $E_1(k) = 3\widetilde{\widetilde{E}}_1(k)$ gewinnt. Damit ist der Beweis von (87) beendet und das Lemma 2 ist jetzt in allen Teilen bewiesen.

Es wurde im Verlaufe des vorigen Beweises keine Mühe gemacht um möglichst kleine Konstanten $E_0(k)$, $E_1(k)$ zu erhalten. Das Vorhandensein allein dieser Konstanten genügt für das folgende.

Wir wollen die Ergebnisse dieses Teil II aus dem folgenden Spezialfall des Satzes III (mit den Bedingungen $a_1)$, $b_1)$) für $N = 2$, $\vec{\gamma} = \vec{0}$ von İçen [1] herleiten (Vgl. İçen [1], Teil I, §4, und Berichtigungen zur Arbeit):

"Es seien zwei an einer Stelle ζ des komplexen oder p-adischen Gebiets regulär analytische Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$ und eine nach ζ konvergierende Interpolationsfolge $\{z_n\}$ gegeben, wobei $\{z_n\}$ wiederholungsfrei und die zugeordnete Folge $\{\log p_n\}$, mit $p_n = \dfrac{1}{|z_n - \zeta|}$, ausgeglichen ist.

Wenn die Funktionswerte $f_1(z_n)$, $f_2(z_n)$ für $n = 1, 2,\dots$ lauter algebraische Zahlen sind, die den folgenden Bedingungen genügen, sind $f_1(z)$, $f_2(z)$ algebraisch abhängig im arithmetischen Sinne:

a) Die Grade von $f_1(z_n)$, $f_2(z_n)$ sollen für $n \to \infty$ beschränkt sein,

b) Für die Höhen $H_n^{(1)}$ bzw. $H_n^{(2)}$ von $f_1(z_n)$ bzw. $f_2(z_n)$ sollen für $n \to \infty$ folgende Abschätzungen gelten

$$\frac{\log H_n^{(1)}}{\log p_n} = O\left(n^{\vec{\delta}_1}\right), \qquad \frac{\log H_n^{(2)}}{\log p_n} = o\left(n^{\vec{\delta}_2}\right),$$

wobei $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 = \vec{J}$ und $\vec{0} \leq \vec{\delta}_1 < \vec{J}$, $\vec{0} < \vec{\delta}_2 \leq \vec{J}$ sein müssen."

Bemerkung. Der Satz gilt auch, wenn wir die Bedingung $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 = \vec{J}$ durch die scheinbar allgemeinere $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 \leqq \vec{J}$ ersetzen. Denn in diesem letzten Fall genügen $\vec{\delta'}_1, \vec{\delta'}_2$ mit $\vec{\delta'}_1 = \vec{\delta'}_2$ und $\vec{\delta}_2 = \vec{J} - \vec{\delta}_1$ den Bedingungen des Satzes, weil dann $\vec{\delta}_2 \leqq \vec{\delta'}_2$ und folglich $o(n^{\vec{\delta}_2}) = o(n^{\vec{\delta'}_2})$ sein wird (Das Erfülltsein anderer Bedingungen durch $\vec{\delta'}_2, \vec{\delta'}_2$ ist trivial). Diese Form des Satzes ist für seine Anwendung besonders günstig.

(Dabei bedeutet $|\ \ |$ den Absolut-oder p-betrag je nachdem wir das komplexe oder das p-adische Gebiet zugrunde legen. Für die Bedeutung von $\vec{\delta}$ und $n^{\vec{\delta}}$ sei auf İÇEN [1], Ende von S. 31 verwiesen.)

Satz II. *Es seien g_2, g_3, λ, μ algebraisch mit $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ und $\mu \neq 0$. Dann können die Werte der p-adisehen Funktionen $\wp(z\,;\, g_2, g_3) = \wp(z)$ und $q(z\,;\, g_2, g_3, \lambda, \mu) = q(z)$ höchstens an vier (über P) linear unabhängigen Stellen der Teilmenge $\widehat{\mathfrak{M}} = \{ z \mid 0 < |z|_p < r_3 \}$ des p-adischen Gebiets gleichzeitig algebraisch sein.*

(r_3 und $\widehat{\mathfrak{M}}$ behalten ihre Bedeutungen im I. Teil dieser Arbeit bei. Satz I steht im I. Teil. Die im Satz II betrachteten Argumentwerte brauchen nicht selber algebraisch zu sein.)

Beweis. Durch eine ähnliche Schlussweise wie beim Beweise des Satzes I wollen wir hier die gegenteilige Annahme, es gäbe ein System $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$ von fünf linear unabhängigen Elementen von $\widehat{\mathfrak{M}}$, derart, dass $\wp(\alpha_j)$, $q(\alpha_j)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ gleichzeitig algebraisch sind, unter Benutzung des oben zitierten Satzes von İÇEN [1] (statt des im Teil I benutzten Satzes I derselben Arbeit) zu einem Widerspruch führen :

Gesetzt nun, es seien $\wp(\alpha_j)$, $q(\alpha_j)$ für $\alpha_j \in \widehat{\mathfrak{M}}$ beide algebraisch $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$, wobei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$, (über P) linear unabhängig sind. Wir machen zunächst eine Bemerkung : Es seien l_j $(j = 1, \ldots, 5)$ irgendwelche natürliche Zahlen. Dann hat das System α'_j $(j = 1, \ldots, 5)$, wobei $\alpha'_j = l_j \alpha_j$ $(j = 1, \ldots, 5)$, die gleichen Eigenschaften wie das ursprüngliche System α_j $(j = 1, \ldots, 5)$. Denn es ist offenbar $0 < |\alpha'_j|_p < r_3$, also $\alpha'_j \in \widehat{\mathfrak{M}}$ $(j = 1, \ldots, 5)$; α'_j $(j = 1, \ldots, 5)$ ist ein linear unabhängiges System wie α_j $(j = 1, \ldots, 5)$; $\wp(\alpha'_j) = \wp(l_j \alpha_j)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ ist algebraisch wegen Lemma 2, § 3, Teil I ; $q(\alpha'_j) = q(l_j \alpha_j)$ $(j = 1, \ldots, 5)$ ist algebraisch wegen Lemma 1, § 3, Teil II. Wir Werden nun l_j $(j = 1, \ldots, 5)$ so wählen (Z. B. als genügend hohe p-Potenzen), dass gleichzeitig $0 < |\alpha'_j|_p < r_5$ (r_5 wie bei Eigenschaft 4, §1, Teil II und es ist $r_5 \leqq r_3$) und $|\alpha'_1|_p > |\alpha_j|_p$ $(j = 1, \ldots, 5)$ gelten. Dass dies möglich ist, ist klar.

Wir können nach dieser Bemerkung das System α_j $(j = 1, \ldots, 5)$ gleich am Anfang so nehmen, dass es folgenden zusätzlichen (Normierungs-) Bedingungen genügt :

$$0 < |\alpha_j|_p < r_5 \quad \text{und} \tag{110}$$

$$|\alpha_1|_p > |\alpha_j|_p \qquad (j = 2, 3, 4, 5). \tag{111}$$

Nun bilden wir mit diesem System α_j $(j = 1, \ldots, 5)$ die Interpolationsfolge

$$z_n = a_n^{(1)} \alpha_1 + a_n^{(2)} \alpha_2 + a_n^{(3)} \alpha_3 + a_n^{(4)} \alpha_4 + a_n^{(5)} \alpha_5 , \tag{112}$$

wobei $a_n^{(j)}$ $(j = 1, \ldots, 5)$ dieselbe Bedutung wie bei (34) mit $k=5$ von Lemma 3, § 2, Teil II haben. Wegen der linearen Unabhängigkeit und (111) genügen die hiesigen α_j $(j = 1, \ldots, 5)$ den Voraussetzungen des eben genannten Lemma. Nach diesem ist (112) eine nach Null konvergierende, wiederholungsfreie Folge, deren zugeordnete Folge $\{\log p_n\}$ ausgeglichen ist.

Andererseits sind :

1°) Für $0 < |z|_p < r_5$ die p-adischen Funktionen $\wp(z; g_2, g_3)$ und $q(z; g_2, g_3, \lambda, \mu)$ wegen Eigenschaft 2, § I, Teil I bzw. Eigenschaft 1, § I, Teil II von Null verschieden,

2°) $\dfrac{1}{\wp(z)}$, $\dfrac{1}{q(z)}$ um $z = 0$ in je eine für $|z| < r_6$ konvergente Taylorreihe entwickelbar.

Aus dem bisherigen entnehmen wir, dass die Funktionen $f_1(z) = \dfrac{1}{\wp(z)}$, $f_2(z) = \dfrac{1}{q(z)}$ und die Interpolationsfolge $\{z_n\}$ den ihnen am Anfang des oben zitierten Satzes der algebraischen Abhängigkeit im arithmetishen Sinne auferlegten Bedingungen genügen. Falls auch die Voraussetzungen über die Fumktionswerte $f_1(z_n), f_2(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ erfüllt sind, werden nach diesem Satz $f_1(z) = \dfrac{1}{\wp(z)}$ und $f_2(z) = \dfrac{1}{q(z)}$ algebraisch abhängig im arithmetischen Sinne sein, was aber nach Eigenschaft 5, §1, Teil II unmöglich ist, womit der am Anfang des Beweises angekündigte Widerspruch erreicht sein wird.

Um den Beweis zu beenden, bleibt also nur noch übrig, die Bedingungen a), b) des Satzes über $f_1(z_n), f_2(z_n)$ zu verifizieren :

Wegen (110) ist $0 < |z_n|_p < r_5$, also ist nach 1°) oben

(113) $$\wp(z_n) \neq 0 \quad , \quad q(z_n) \neq 0 \, ,$$

und nach 2°) oben

(113′) $$f_1(z_n) = \frac{1}{\wp(z_n)} \, , \quad f_2(z_n) = \frac{1}{q(z_n)} \, .$$

Aus Lemma 2, §3, Teil II mit $k = 5$ folgt die Algebraizitütät von $\wp(z_n), q(z_n)$ $(n = 1,2\ldots)$. Da die Reziproke einer von Null verschiedenen algebraischen Zahl ebenfalls algebraisch von demselben Grad und derselben Höhe ist, folgt hieraus zusammen mit (113), (113′) die Algebraizität von $f_1(z_n), f_2(z_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit

(114) $$\begin{cases} \text{Grad von } f_1(z_n) = \text{Grad von } \wp(z_n) \, , \\ \text{Grad von } f_2(z_n) = \text{Grad von } q(z_n) \, , \end{cases}$$

(115) $$\begin{cases} H_n^{(1)} = h_{f_1(z_n)} = h_{\wp(z_n)} \, , \\ H_n^{(2)} = h_{f_2(z_n)} = h_{q(z_n)} \, . \end{cases}$$

Aus (114) und (84), (86) von Lemma 2, §3, Teil II folgt nun die Beschränktheit der Grade von $f_1(z_n), f_2(z_n)$, womit die Bedingung a) verifiziert wurde. Für die Verifikation der Bedingung b) betrachten wir (115) mit (85) und (87) desselben Lemma,. Da hier $k=5$, $m_j = a_n^{(j)}$ $(j=1,\ldots,5)$ ist, folgt daraus

(116) $$\begin{cases} H_n^{(1)} \leq e^{C_1^{(5)} [(a_n^{(1)})^2 + \ldots + (a_n^{(5)})^2]} \, , \\ H_n^{(2)} \leq e^{E_1^{(5)} [(a_n^{(1)})^2 + \ldots + (a_n^{(5)})^2]} \, , \end{cases}$$

wobei $C_1^{(5)}$, $E_1^{(5)}$ von $a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(5)}$ und folglich von n unabhängig sind. Aus (12) von Lemma 2, §2, Teil II und (34) von Lemma 3, §2, Teil II erhält man mit $k = 5$ für $n \to \infty$

(117) $$a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(5)} = O\left(n^{\frac{1}{5}+\rho}\right).$$

Aus (116) und (117) ergibt sich jetzt

$$(118)\qquad \begin{cases} \log H_n^{(1)} = O(n^{\frac{2}{5}+\rho}), \\ \log H_n^{(2)} = O(n^{\frac{2}{5}+\rho}). \end{cases}$$

Zusammen mit (41) von Lemma 3, § 2, Teil II folgt hieraus

$$(119)\qquad \begin{cases} \dfrac{\log H_n^{(1)}}{\log p_n} = O(n^{\frac{2}{5}+2\rho}(\log n)^{-1}), \\ \dfrac{\log H_n^{(2)}}{\log p_n} = O(n^{\frac{2}{5}+2\rho}(\log n)^{-1}). \end{cases}$$

Falls wir nun ϱ gleich am Anfang gemäss $0 < \varrho < \dfrac{1}{20}$ wählen, wird (119) zu

$$(120)\qquad \frac{\log H_n^{(1)}}{\log p_n} = o(n^{\frac{1}{2}}), \quad \frac{\log H_n^{(2)}}{\log p_n} = o(n^{\frac{1}{2}}),$$

womit auch die Bedingung b) verifiziert, und der Beweis des Satzes II beendet ist.

§4. Ergänzende Bemerkungen

Es werde jetzt den p-adischen Funktionen

$$(121)\qquad q(z; g_2, g_3, \lambda, \mu) \text{ mit } \mu \neq 0,\ \wp(z; g_2, g_3) \text{ mit } g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0,$$
$$e^{\alpha z}\ (\alpha \neq 0),\quad \alpha^z (\alpha \neq 0), 1;\ |\alpha - 1|_p \leqq p^{-1}),\ z$$

jeweils die Gewichte 2, 2, 1, 1, 0 zugeordnet. Hier und im folgenden werden alle vorkommenden Parameter, d.h. $g_2, g_3, \lambda, \mu, \alpha$ als algebraisch vorausgesetzt. Es ist zu beachten, dass in (121) unendlich viele Funktionen einbegriffen sind. Ferner wollen wir diesen Funktionen jeweils eine echte oder unechte, nicht leere Teilmenge ihrer Definitionsbereiche zuordnen, und zwar nach folgender Vorschrift :

Es sei $F(z)$ irgend eine der Funktionen (121), und die zu $F(z)$ zuordnende Teilmenge des p-adischen Gebiets sei mit $\widehat{\mathfrak{M}}$ bezeichnet. Dann ist

1°) $\widehat{\mathfrak{M}}_F = \{z \mid 0 < |z|_p < r_3\}$, wenn $F(z)$ eine der Funktionen $\wp(z; g_2, g_3)$, $q(z; g_2, g_3, \lambda, \mu)$ bedeutet,

2°) $\widehat{\mathfrak{M}}_F = \{z \mid |z|_p < p^{-\frac{1}{p-1}} |\alpha|_p^{-1}\}$, wenn $F(z) = e^{\alpha z}$ ist,

3°) $\widehat{\mathfrak{M}}_F = \{z \mid |z|_p \leqq 1\}$, wenn $F(z) = \alpha^z$ ist,

4°) $\widehat{\mathfrak{M}}_F =$ das p-adische Gebiet, wenn $F(z) = z$ ist.

Es sei darauf hingewiesen, dass $\widehat{\mathfrak{M}}$ im Definititionsbereich von $F(z)$ enthalten ist und mit irgend k linear unabhängigen Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ auch deren lineare Komposita $m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k$ enthält, wobei $m_1, \dots, m_k$ beliebige, nicht sämtlich verschwindende ganze rationale Zahlen bedeuten.

Es gilt nun über das Gewicht von irgend einer Funktion $F(z)$ aus (121) das

Lemma 1. *Es sei $F(z)$ eine der Funktionen (121) vom Gewicht K, und für ein $\theta \in \widehat{\mathfrak{M}}_F$ sei $F(\theta)$ algebraisch (Im Falle $F(z) = q(z\,; g_2, g_3, \lambda, \mu)$ muss noch zusätzlich vorausgesetzt werden, dass $\wp(\theta\,; g_2, g_3)$ auch algebraisch ist).*

Dann ist auch $F(m\theta)$ algebraisch und es gelten für den Grad und die Höhe von $F(m\theta)$ folgende obere Abschätzungen :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Grad } F(m\theta) \leqq G_0 \\ h_{F(m\theta)} \leqq e^{G_1 m^{\vec{K}}},\end{array}\right. \tag{122}$$

wobei $\vec{K} = (K, \dots\dots)$, also einen Vektor mit dem ersten Komponenten K bedeutet, und G_0, G_1 zwei passende, von der Funktion $F(z)$ und der Stelle θ abhängige, aber von m unabhängige positive Konstanten sind.

Beweis. Für $F(z) = q(z\,; g_2, g_3, \lambda, \mu)$ bzw. $\wp(z\,; g_2, g_3)$ ist (122) gemäss Lemma 1, § 3, Teil II bzw. Lemma 2, § 3, Teil I mit $\vec{K} = (2, 0, 0, 0, \dots)$ erfüllt. Für $F(z) = e^{\alpha z}$ bzw. α^z ist $F(m\theta) = (F(\theta))^m$, woraus unter Benutzung von Lemma 3, § I, Teil II von İÇEN [1] $h_{F(m\theta)} \leqq \mathscr{C}(\theta)\, h^m_{F(\theta)}$ folgt, was uns $h_{F(m\theta)} \leqq e^{\mathscr{C}_1(\theta) m}$ gibt (Dabei sind $\mathscr{C}(\theta)$, $\mathscr{C}_1(\theta)$ von m unabhängig). Dies ist aber (122) mit $\vec{K} = (1, 0, 0, 0, \dots)$, also ist das Lemma auch in diesem Fall erfüllt. Für $F(z) = z$ sei $a\, x^\sigma + a_1\, x^{\sigma-1} + \dots + a_\sigma = 0$ die definierende Gleichung für θ. Die definierende Gleichung für $m\theta$ wird danach $a_0\, x^\sigma + m a_1\, x^{\sigma-1} + \dots + m^\sigma a_\sigma = 0$. Aus dem Vergleich beider Gleichungen erhält man $h_{m\theta} \leqq m^\sigma h_\theta$, wobei σ den Grad von θ darstellt. Daraus ergibt sich $h_{m\theta} \leqq e^{\mathscr{C}_2(\theta) \log m}$ also wieder (122) mit $\vec{K} = (0, 1, 0, 0, \dots)$ (Dabei ist $\mathscr{C}_2(\theta)$ von m unabhängig). Damit ist der Beweis des Lemma 1 beendet.

Lemma 2. *Es sei $F(z)$ eine der Funktionen (121) vom Gewicht K und für ein System von (über $\mathbf{P}$) linear unabhängiger Elemente $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \widehat{\mathfrak{M}}_F$ sei $F(\alpha_j)$ $(j = 1, \dots, k)$ algebraisch (Im Falle $F(z) = q(z\,; g_2, g_3, \lambda, \mu)$ muss noch zusätzlich vorausgestzt werden, dass $\wp(\alpha_j\,; g_2, g_3)$ $(j = 1, \dots, k)$ auch algebraisch sind). Es bedeute $m_1, \dots, m_k$ irgendein System von k natürlichen Zahlen.*

Dann ist auch $F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k)$ algebraisch und es gilt für den Grad und die Höhe von $F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k)$ folgende obere Abschätzung :

$$\begin{array}{l}\textit{Grad von } F(m_1 + \dots + m_k \alpha_k) \leqq G_0^{(k)}, \\ h_{F(m_1\alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k)} \leqq e^{G_1^{(k)} (m_1^{\vec{K}} + \dots + m_k^{\vec{K}})},\end{array} \tag{123}$$

wobei $G_0^{(k)}$, $G_1^{(k)}$ zwei passende positive Konstanten bedeuten, die zwar von $F(z)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und k abhängen dürfen, aber von $m_1, \dots, m_k$ unabhängig sind.

Beweis. Für $F(z) = q(z\,; g_2, g_3, \lambda, \mu)$, $\wp(z\,; g_2, g_3)$ ist die Behauptung schon in Lemma 2, § 3, Teil III bewiesen worden. Für $F(z) = e^{\alpha z}$, α^z ist $F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k)$

$= (F(\alpha_1))^{m_1} \dots (F(\alpha_k))^{m_k}$. Hieraus ist die Algebraizität von $F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k)$ klar. Wenn wir nun auf die Relation

$$F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k) - (F(\alpha_1))^{m_1} \dots (F(\alpha_k))^{m_k} = 0$$

das Lemma 1, § 2, Teil I mit $F(\alpha_j)$ statt α_j $(j = 1, \dots, k)$, $F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k)$ statt η anwenden, folgt

$$\text{Grad von } F(m_1 \alpha_1 + \dots + m_k \alpha_k) \leq [\mathbf{P}(F(\alpha_1), \dots, F(\alpha_k)) : \mathbf{P}]$$
$$(= g(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = g)$$

und

$$h_{F(m_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)} \leq g!\, 2^g \cdot 3^{(m_1+\dots+m_k)g} \cdot 1^g \cdot h_{F(\alpha_1)}^{m_1 g} \cdots h_{F(\alpha_k)}^{m_k g},$$

woraus (123) leicht bestätigt werden kann. Es bleibt nur noch der Fall $F(z) = z$ zu untersuchen. In diesem Falle ist

$$F(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k) = m_1 F(_1\alpha) + \dots + m_k F(\alpha_k).$$

Also wieder durch Anwendung von Lemma 1, §2, Teil I erhält man daraus

$$\text{Grad von } F(m_1\alpha_1 + \dots + m_k\alpha_k) \leq [\mathbf{P}(F(\alpha_1), \dots, F(\alpha_k)) : \mathbf{P}] \; (= g)$$

und

$$h_{F(m_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)} \leq g!\, 2^g \cdot 3^{kg} \cdot (\text{Max}\,(m_1, \dots, m_h))^g \cdot h_{F(\alpha_1)}^g \cdots h_{F(\alpha_k)}^g$$
$$\leq g!\, 2^g \cdot 3^{kg} \cdot h_{F(\alpha_1)}^g \cdots h_{F(\alpha_k)}^g \cdot (m_1 \dots m_h)^g,$$

da hier $\text{Max}\,(m_1, \dots, m_h) \leq m_1 \dots m_h$ ist. Die letzte Ungleichung kann man schreiben als

$$h_{F(m_1\alpha_1+\dots+m_k\alpha_k)} \leq \widehat{G} \cdot e^{g(\log m_1 + \dots + \log m_k)}$$

mit

$$\widehat{G} = g!\, 2^g \cdot 3^{kg} \cdot h_{F(\alpha_1)}^g \cdots h_{F(\alpha_k)}^g.$$

Aus diesen Ausführungen über $F(z) = z$ ersehen wir, dass (123) auch in diesem Falle gültig ist, und zwar mit $\vec{K} = (0, 1, 0, 0, \dots)$.

Satz III. *Es seien $F_1(z)$, $F_2(z)$ zwei im arithmetischen Sinne algebraisch unabhängige p-adische Funktionen aus* (121) *(also mit algebraischen Parametern). Es bedeute K_i das Gewicht von $F_i(z)$ und es sei $\widehat{\mathfrak{M}}_{F_i} = \widehat{\mathfrak{M}}_i$ gezetzt $(i = 1,2)$. (Wenn $F_1(z) = q(z\,;\, g_2, g_3, \lambda, \mu)$ ist, dann muss allerdings $F_2(z) = \wp(z\,;\, g_2, g_3)$ sein).*

Dann können $F_1(z)$, $F_2(z)$ nicht mehr als $K_1 + K_2$ (in bezug auf P) linear unabhängige Stellen aus der Teilmenge $\widehat{\mathfrak{M}}_1 \cap \widehat{\mathfrak{M}}_2$ des p-adischen Gebiets gleichzeitig algebraische Werte annehmen.

Beweis. (Wir bemerken zunächst, dass $\widehat{\mathfrak{M}}_1 \cap \widehat{\mathfrak{M}}_2$ von der Form $\{ z \mid 0 < |z|_p < r \}$ oder $\{ z \mid |z|_p < r \}$ mit $r > 0$ und folglich nicht leer ist, und unendlich viele linear unabhängige (z. B. algebraische) Zahlen enthält).

Machen wir nun die gegenteilige Annahme, es gäbe ein System $\{\alpha_j\}$ $(j = 1,\dots,k)$ mit $k = K_1 + K_2 + 1$ linear unabhängigen Elementen, derart, dass $F_i(\alpha_j)$ $(i = 1, 2, ; j = 1,\dots,k)$ alle algebraisch sind. Nach einem am Anfang des Beweises von Satz II angegebenen ähnlichen Verfahren, können wir das System $\{\alpha_j\}$ gleich so normiert annehmen, dass

$$0 < |\alpha_j|_p < \tilde{r} \qquad (j = 1, \dots, k) \tag{124}$$

$$|\alpha_1| > |\alpha_j|_p \qquad (j = 2, \dots, k) \tag{125}$$

gilt, wobei $\tilde{r}$ eine positive reelle Zahl mit $\tilde{r} \leq r$ bedeutet, über die später verfügt wird. Wir bilden dann mit diesem System α_j $(j = 1, \dots, k)$ die Interpolationsfolge

$$z_n = a_n^{(1)} \alpha_1 + \cdots + a_n^{(k)} \alpha_k\,, \tag{126}$$

wobei $a_n^{(j)}$ $(=1, \dots, k)$ dieselbe Bedeutung wie bei (34) von Lemma 3, §2, Teil II haben. Da wegen der linearen Unabhängigkeit und (125) das obige System $\{\alpha_j\}$ den Voraussetzungen dieses Lemma genügt, ist also nach diesem Lemma die Folge $\{z_n\}$ von (126) eine nach Null konvergierende, wiederholungsfreie Folge, deren zugeordnete Folge $\{\log p_n\}$ ausgeglichen ist.

Andererseits ist, wenn wir $\tilde{r} > 0$ genügend klein wählen,

1°) Für $0 < |z|_p < \tilde{r}$ $F_i(z)$ von Null verschieden $(i = 1, 2)$,

2°) Entweder $F_i(z)$ oder $\dfrac{1}{F_i(z)}$ um $z = 0$ in eine für $|z|_p < \tilde{r}$ konvergente Taylorreihe entwickelbar $(i = 1, 2)$.

Setzen wir nun $f_i(z) = F_i(z)$ oder $\dfrac{1}{F_i(z)}$, je nachdem $F_i(z)$ oder $\dfrac{1}{F(z)}$ um $z = 0$ in eine Taylorreihe entwickelbar ist $(i = 1, 2)$. Aus dem vorhergehenden entnehmen wir, dass die Funktionen $f_i(z)$ $(i = 1, 2)$ und die Interpolationsfolge $\{z_n\}$ den ihnen am Satzes der algebraischen Abhängigkeit i. a. S. zweier Funktionen auferlegten Bedingungen mit $\zeta = 0$ genügen. Es genügen auch die Funktionswerte $f_i(z_n)$ $(i = 1, 2 ; n = 1, 2,\dots)$ den dortigen Bedingungen a), b):

Denn einerseits ist wegen (126) $0 < |z_n|_p < \tilde{r}$, also nach 1°) oben

$$F_i(z_n) \neq 0 \quad (i = 1, 2, ; n = 1, 2, \dots). \tag{127}$$

und nach 2°)

$$f_1(z_n) = F_i(z_n) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{F_i(z_n)} \quad (i = 1, 2,; n = 1, 2, \dots)\,, \tag{128}$$

woraus wir zunächst auf

$$f_i(z_n) \neq 0 \qquad (i = 1, 2 ; n = 1, 2, \dots) \tag{129}$$

schliessen. Andererseits ist, wegen der Voraussetzung der Algebraizität von $F_i(\alpha_j)$ $(i=1, 2 ; j = 1, \dots, k)$ und laut Lemma 2, §4, Teil II, auch $F_i(z_n)$ algebraisch mit

$$\begin{cases} \text{Grad } F_1(z_n) \leq G_{0,i}^{(k)} \\ h_{F_i(z_n)} \leq e^{G_{1,i}^{(k)} [(a_n^{(1)})^{\overrightarrow{K_i}} + \dots + (a_n^{(k)})^{\overrightarrow{K_i}}]} \end{cases} \qquad (i = 1, 2 ; n = 1,2,\dots) \tag{130}$$

wobei $G_{0,i}^{(k)} > 0$, $G_{1,i}^{(k)} > 0$ von n unabhängig sind $(i = 1, 2)$.

Nach (127) und (128) ist mit $F_i(z_n)$ auch $f_i(z_n)$ algebraisch ($i=1, 2$), sogar mit demselben Grad und derselben Höhe, woraus mit (130) folgendes erhalten wird :

$$(131)\qquad \begin{cases} \text{Grad } f_i(z_n) \leq G_{0,i}^{(k)} \\ h_{f_i(z_n)} \leq e^{G_{1,i}^{(k)}[(a_n^{(1)})^{\vec{K}_i} + \ldots + (a_n^{(k)})^{\vec{K}_i}]} \end{cases} \qquad (i = 1,2,\ ;n=1,2,\ldots).$$

Aus der ersten Zeile von (131) folgt das Erfülltsein der Bedingung a) des Satzes über die algebraische Abhängigkeit i.a.S. zweier Funktionen. Aus der zweiten Zeile von (131), zusammen mit (12) von Lemma 1 2, §2, Teil II und (34) von Lemma 3, §2, Teil II erhält man

$$(132)\qquad \log H_n^{(i)} = \log h_{f_i(z_n)} = O\left(n^{\left(\frac{1}{k}+\varrho\right)\vec{K}_i}\right) \quad (i = 1,\ 2)$$

Wegen (41) von Lemma 3, §2, Teil II folgt aus (132) :

$$\frac{\log H_n^{(i)}}{\log p_n} = O\left(\frac{n^{\left(\frac{1}{k}+\varrho\right)\vec{K}_i}}{\log n}\right) = o\left(n^{\left(\frac{1}{k}+\varrho\right)\vec{K}_i}\right) \qquad (n = 1, 2)$$

wobei $p_n = \dfrac{1}{|z_n|_p}$, d. h.

$$(133)\qquad \frac{\log H_n^{(i)}}{\log p_n} = o\left(n^{\vec{\delta}_i}\right) \qquad (i = 1,\ 2)$$

mit
$$\vec{\delta}_i = \left(\frac{1}{k} + \varrho\right)\vec{K}_i = \left(\left(\frac{1}{k} + \varrho\right)K_i, \ldots\right) \qquad (i = 1, 2).$$

Falls wir nun ϱ so wählen, dass $0 < \varrho < \dfrac{1}{k(k-1)}$ gilt, etwa $\varrho = \dfrac{1}{2k(k-1)}$ (Es ist $k = K_1 + K_2 + 1 \geq 2$, denn $k = 1$ kann nur dann sein, wenn $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ ist, aber in diesem Falle reduzieren sich $F_1(z)$, $F_2(z)$ beide auf $F(z) = z$, wo sie nicht algebraisch unabhängig i.a.S. sein können.), dann wird $\vec{\delta}_i = (\widehat{\Delta}_i, \ldots)$ sein mit $0 \leq \widehat{\Delta}_i < \dfrac{K_i}{K_1+K_2}$, also $\vec{0} \leq \vec{\delta}_i < \vec{J}$ ($i = 1, 2$). Da $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 = (\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2, \ldots)$, folgt ausserdem $\vec{\delta}_1 + \vec{\delta}_2 < \vec{J}$. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes über die algebraische Abhängigkeit i.a.S. zweier Funktionen für $f_1(z)$, $f_2(z)$ erfüllt (Vgl. auch die Bemerkung dazu). Also es müssen $f_1(z)$, $f_2(z)$ und folglich auch $F_1(z)$, $F_2(z)$ algebraisch abhängig i.a.S. sein. Dies widerspricht aber der Voraussetzung des Satzes III über $F_1(z)$, $F_2(z)$. Daher ist die am Anfang des Beweises gemachte Annahme, es gäbe in $\widehat{\mathfrak{M}}_{F_1} \cap \widehat{\mathfrak{M}}_{F_2}$ ein System von $k = K_1 + K_2 + 1$ linear unabhängigen Stellen mit gleichzeitig algebraischen Funktionswerten von $F_1(z)$ und $F_2(z)$, unhaltbar. Damit ist der Satz III bewiesen.

Folgerungen aus dem Satz III :

Folgerung 1. Satz II oben ist offensichtlich ein Spezialfall von Satz III mit

$$F_1(z) = \wp(z\,;\, g_2\,,\, g_3),\ F_2(z) = q(z\,; g_2\,, g_3\,, \lambda, \mu).$$

Folgerung 2. Satz I von Teil I dieser Arbeit folgt aus dem Satz III mit $F_1(z) = \wp(z\,;\,g_2, g_3)$, $F_2(z) = z$. Damit ist ein etwas anderer (auf einer anderen Interpolationsfolge stützender) Beweis jenes Satzes gewonnen.

Folgerung 3. Nehmen wir zwei im komplexen algebraisch unabhängige $\wp$-Funktionen mit algebri sehen Invariantenpaaren g_2, g_3 und g_2^*, g_3^* und bilden die dazu entsprechenden p-adisch elliptischen Funktionen

$$\wp(z\,;\,g_2, g_3) = \wp(z) \text{ und } \wp(z\,;\,g_2^*, g_3^*) = \wp^*(z).$$

Dann sind $\wp(z)$, $\wp^*(z)$ laut Eigenschaft 6 vom §1 Teil II auch im p-adischen algebraisch unabhängig i.a.S. Setzen wir in Satz III $F_1(z) = \wp(z)$, $F_2(z) = \wp^*(z)$, so folgt :

"*$\wp(z)$ und $\wp^*(z)$ können höchstens an* $2 + 2 = 4$ *linear unahängigen Stellen von $\widehat{\mathfrak{M}}_1 \cap \widehat{\mathfrak{M}}_2$ gleichzeitig algebraische Werte annehmen.*"

Insbesondere, falls β algebraisch von mindestens drittem Grad über P ist, sind laut der Folgerung von Eigenschaft 6, §1, Teil II, $F_1(z) = \wp(z)$, $F_2(z) = \beta^{-2}\,\wp(\beta z)$ voneinander algebraisch unabhängig, so dass folgendes gilt :

"*$\wp(z)$ und $\wp(\beta z)$ können höchstens an* 4 *linear unabhängigen Stellen von $\widehat{\mathfrak{M}}_1 \cap \widehat{\mathfrak{M}}_2$ gleichzeitig algebraische Werte annehmen.*"

Diese stellen schwache p-adische Analoga zu einem im komplexen Gebiet gültigen Schneiderschen Satz dar (dar (Satz 16 (I. Fassung) in Th. Schneider, Transzendente Zahlen, S. 61).

Folgerung 4. Setzen wir $F_1(z) = \wp(z\,;\,g_2, g_3)$, $F_2(z) = e^{\alpha z}$, so sind diese Funktionen laut Eigenschaft 7 vom §1, Teil II im p-adischen Gebiet algebraisch unabhängig i.a.S. Danach ergibt sich aus Satz III : "*$\wp(z\,;\,g_2, g_3)$ und $e^{\alpha z}$ können höchstens an* $2 + 1 = 3$ *linear unahhängigen Stellen von $\widehat{\mathfrak{M}}_1 \cap \widehat{\mathfrak{M}}_2$ gleichzeitig algebraische Werte annehmen.*"

Auch dies stellt ein schwaches p-adisches Analogon zu einem Schneider'schen Satz im Komplexen dar (Satz 18 in TH. SCHNEIDER, Transzendente Zahlen, S. 63).

Es liesse sich eine Reihe weiterer Folgerungen ziehen, falls wir für $F_1(z)$, $F_2(z)$ Funktionenpaare aus (121) wählen, deren Gewichte kleiner als 2 sind. Aber diese Folgerungen sind teils bekannte (wie z. B. der MAHLER-VELDKAMPSCHE Satz im Falle $F_1(z) = z$, $F_2(z) = \alpha^z$ und teils schwächere Formen der bekannten Transzendenzergebnisse über die Werte der p-adischen Exponentialfunktion, und wir wollen hier diese Frage nicht weiter verfolgen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. Ş. İÇEN : Eine *Verallgemeinerung und Übertragung der Schneiderschen Algebraizitatskriterien ins p-adische mit Anwendung auf einen Transzendenzbeweis im p-adischen*, Journ. f.d. reine u. angew. Math. 198 ,S. 28-55 und Berichtigungen dazu am Ende desselben Bandes (1957).

[2] O. Ş. İÇEN : *Über die Funktionswerte der p-adisch elliptischen Funktionen* I., Dieses Revue Vol. (?).

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
MATEMATİK ENSTİTÜSÜ
İSTANBUL - TÜRKİYE

(Manuskript eingegangen am Mai 2, 1970)

ÖZET

Aynı adı taşıyan I. Kısmın devamı olan bu çalışmada-gerektiğinde I. Kısımda kullanılan âletleri de genelleştirmek suretiyle-SCHNEIDER'in (I. Kısımda bahsedilen) kompleks alandaki elliptik fonksiyonlara dair transandanthk sonuçlarının p-adik alandaki zayıf mukabillerini teşkil eden diğer bir takım p-adik transandantlık sonuçları elde edilmektedir. Bu maksat için bir fonksiyonun aritmetik anlamdaki cebirselliğine dair İÇEN [1] de verilen bir kriteryum yerine, gene aynı çalışmada verilen birden fazla fonksiyonun cebirsel bağlılığına dair bir kriteryumun bir özel hali kullanılmaktadır.

1 de p-adik ζ-fonksiyonu tarif edilerek onun ve onunla ilgili bâzı fonksiyonların bâzı özelikleri verilmektedir.

2 de I Kısım § 2 deki bâzı yardımcı teoremler genelleştirilmektedir.

3 te evvelâ I. Kısım § 3 teki yardımcı teoremleri genelleştirilerek

$$q(z) = \lambda z + \mu\zeta(z) \qquad (\lambda, \mu \text{ sabit}, \ \mu \neq 0)$$

fonksiyonunun değerleri hakkında bir teorem (Teorem II) elde edilmektedir.

Nihayet § 4 te evvelâ genel bir teorem (Teorem IV) ispatlandıktan sonra bu teoremden SCHNEIDER'in yukarda bahsedilen sonuçlarının zayıf p-adik mukabillerini teşkil eden bir sıra sonuç çıkarılmaktadır. Daha fazla bilgi için bu teoremlerinin ifadelerine ve I. Kısmın girişine bakınız.

Editor's Note. *For tecnical reasons the first part of this article will be published in the next issue.*