

# İŞ ÇEVİRİMLERİNİN LİNEER OLMAYAN DİNAMİKLERİ: GOODWIN'İN BÜYÜME ÇEVİRİMLERİ VE AMPİRİK BİR UYGULAMA

Önder YERLİKAYA \*

## ÖZET

İş Çevrimleri literatüründe göze çarpan en belirgin ikilem, çevrimlerin doğasına ilişkindir. Çevrimlerin içsel ya da dışsal olduğunun önkabulü bu alandaki en keskin ayrışmayı oluşturur. Literatürde hakim olan görüş, piyasaların kendi kendilerine dengeye ulaşacakları ve piyasaların doğası gereği istikrarlı oldukları, sürekli dışsal şoklar olmadığı sürece kararlı dengeye yakınsayacağıdır. Son zamanlarda, genel iktisadi faaliyetlerde görülen dalgalanmaların rastlantısal şoklar olmadan da, içsel bir olgu olarak açıklanabileceğine dair bir ilgi açığa çıkmıştır. Bu bağlamda, makalenin ana amacı, Türkiye ekonomisinde 1987:1-2004:4 döneminde R.M. Goodwin'in büyüme çevrimleri modelini temel alan içsel bir yapıda genel iktisadi faaliyetlerdeki dalgalanmaları açıklamaktır. Analiz, değişkenler arasındaki dinamik etkileşimleri açıklayan Yapısal Vektör Otoregresif (*SVAR*) metodolojisi kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bulgular, Goodwin modelinin açıklayıcılığının zayıf olduğunu göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler:** İş Çevrimleri, Goodwin'in Büyüme Çevrimleri, İçsel Çevrimler, Stokastik Şoklar

## ABSTRACT

The most striking dichotomy in business cycles literature is related to the nature of oscillations. The idea that markets are self-adjusted and intrinsically stable, so that in the absence of continuing exogeneous shocks, the economy would tend toward a steady-state growth path is the dominant paradigm in the literature. Recent work, however, has seen a revival of interest in the hypothesis that aggregate fluctuations might represent an endogeneous phenomenon that would persist even in the absence of stochastic shocks to the economy. In this respect, to explain the aggregate fluctuations in Turkish economy covering the period from 1987:Q1 to 2004:Q4 in terms of endogeneous cycles by applying a model based on R.M. Goodwin's growth cycles. The analysis is carried out by Structural Vector Autoregressions (*SVAR*) methodology. Empirical results suggest that Goodwin's growth cycles model is weak in explaining the aggregate fluctuations.

**Keywords:** Business Cycles, Goodwin's Growth Cycles, Endogeneous Cycles, Stochastic Shocks

---

\* İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi İngilizce İktisat Teorisi Anabilim Dalı

## GİRİŞ

İktisadın bir bilim olarak ortaya çıkmasıyla beraber yapılan tartışmaların önemli bir kısmını, ekonomide genel bir dengenin varlığı, tekliği ve de mevcut dengenin istikrar durumu oluşturmaktadır. Tarihsel perspektifte bakıldığında farklı iktisat okullarının bu tartışmaya yaptıkları katkılar, iktisat okulların da ideolojik olarak birbirlerinden ayrılmalarının temelini teşkil etmektedir. Bu tartışmaların iki ana ekseninde yürüdüğüünü söylemek yanlış olmaz. Birincisi, meseleye denge iktisadı etrafında açıklamalar getiren Klasik İktisat Okulu ve ardılları, diğeri ise meseleye dengesizlik bağlamında açıklamalar getiren radikal iktisatçılar ve Post-Keynesyenlerdir.

1929 yılında yaşanan Büyük Bunalım'a (*The Great Depression*) kadar hakim olan yaklaşım Adam Smith'in "görünmez el" (*invisible hand*) olarak ifade ettiği bir mekanizma ile piyasaların kendiliğinden dengeye varacağı üzerine idi. Daha sonra Jean Baptise Say'ın "A Treatise on Political Economy" adlı eserinde ortaya koyduğu Mahreçler Kanunu'na (*Say's Law*) göre de, ekonomide genel bir dengesizlik mevcut olamaz. Birinci yaklaşımın temsil ettiği görüş esas olarak, Mahreçler Kanunu'nun kabulüne dayanmaktadır. Mahreçler Kanunu'na göre her arz kendi talebini yaratır. Bir mal ya da hizmet üretildiğinde anında bir gelir ve satın alma gücü oluşur. Elde edilen gelir ile üretilen tüm mal ve hizmetler satın alınır. Para ise sadece, tüm bu iktisadi işlemleri gerçekleştirmeye yarayan bir araç niteliği taşımaktadır. Ekonomide ne genel bir arz ne de genel bir talep dengesizliğinden söz edilebilir. Tam istihdam dengesi her zaman sağlanmaktadır. Klasik İktisat Okulu'nun bu iddiası aynı zamanda genel iktisadi faaliyetlerde dalgalanmaların reddi anlamına gelmektedir. Bu da mevcut dengenin istikrarlı bir yapıda olduğuna kabulüdür. Aynı şekilde istikrarlı bir dengenin mevcudiyeti, herhangi bir anda dengesizlik durumunun geçici surette olduğunu ifade etmektedir. Bu noktada, dengeden sapmalara neden olan kaynağın ne olduğu sorusu gündeme gelmektedir.

Genel iktisadi faaliyetlerdeki dalgalanmalara denge iktisadı çerçevesinde açıklama getiren ana akım iktisat, dengeden sapmalara neden olan kaynağın dışsal şoklar olduğunu vurgulamaktadır. Dışsal şokların kay-

nağını "etki mekanizması" (*impulse mechanism*) oluşturmaktadır. Dışsal şokların genel iktisadi faaliyetlerdeki dalgalanmalara etkisi ise "yayılm mekanizması" (*propagation mechanism*) vasıtasıyla gerçekleşir. Ragnar Frisch (1933) ve Eugen Slutsky'nin (1937) çalışmalarından sonra literatürde etki-yayılm mekanizması (*impulse-propagation mechanism*) olarak adlandırılan bu yaklaşıma göre, ekonominin uzun dönem dengesinden sapmalara dışsal şoklar neden olur. Dışsal şoklar, dinamik etkileşimler neticesinde yayılım mekanizması ile diğeri iktisadi değişkenlere iletilir. Bu noktada şokların kaynağı sorusu gündeme gelmektedir.

Ana akım iktisat bağlamında şokların kaynağı sorusuna temelde verilen cevabı iki alt guruba ayırmak mümkündür. Bunlardan birincisi, 1970'lerde başını Robert E. Lucas'ın çektiği Yeni Klasiklerdir. Walrasçı genel denge kuramı çerçevesinde, makroiktisadi mikro temellerine oturtan Yeni Klasikler, Klasik İktisat Okulu'nun iddia ettiği gibi iktisadi birimlerin tam bilgiye değil, eksik bilgiye sahip olduklarını, ileriye dönük beklentilerini piyasada mevcut bulunan bilgiyi kullanarak oluşturduklarını ve faydalarını maksimize ettiklerini savunurlar. Rasyonel hareket ederek faydasını maksimize eden bireylerin aldıkları kararlar makro değişkenler üzerinde belirleyicidir. Para arzında meydana gelen beklenmedik bir değişimin yol açtığı talep şoku karşısında bireyler ve firmalar emek arzlarını ve üretim düzeylerini değiştirerek gelen şoklara cevap verirler. Dolayısıyla, Yeni Klasik Okul içerisinde iktisadi dalgalanmaları rasyonel beklentiler hipotezi çerçevesinde ele alan yaklaşıma göre, etki mekanizmasını parasal şoklar oluşturur. Ancak, kesinlikle bir genel arz fazlasından bahsedilemez ve iktisadi birimlerin verdikleri tepkiler süregiden bir dengeyi ifade eder. Lucas tarafından geliştirilen iş çevrimlerine denge yaklaşımının (*equilibrium approach to business cycles*) dayanak noktasını parasal şoklar oluşturmaktadır. Lucas (1975:1113-14), makroiktisat çalışmalarının ana sorununu parasal şokların, devamlı olmayan ve kendini tekrar etmeyen reel dalgalanmalara neden olabileceğine dair teorik bir çerçevenin kurulması olarak değerlendirmiştir. İkincisi, genel iktisadi faaliyetlerde meydana gelen dalgalanmaları tamamiyle arz-yanlı olarak açıklayan ve Reel İş Çevrimleri (*Real Business Cycles*) teorisine esin

kaynağı olan Kydland ve Prescott'un (1982) çalışmalarıdır. Nelson ve Plosser (1982), makroiktisadi dalgalanmalara neden olan asıl faktörlerin parasal olmaktan çok, reel değişkenlerdeki rastlantısal değişimler olduğunu belirtmişlerdir. Etki mekanizmasını teknoloji ve verimlilik şokları oluşturmaktadır. Etki mekanizmasının verimlilik ve teknoloji şoklarına, yayılım mekanizmasının üretici ve tüketici maksimizasyonuna dayandığı modellerin çözümünde, optimal kontrol teorisi ya da doğrusal programlama teknikleri kullanılır.

Mahreçler Kanunu'nun reddedildiği, dolayısıyla da genel iktisadi faaliyetlerde sürekli bir dalgalanmanın mevcut olduğunu savunan radikal iktisatçılara ve Post-Keynesyenler'e göre kapitalist üretim yapısı bünyesinde çelişkiler barındırmaktadır. Bunun neticesinde de iktisadi dalgalanmalar, dışsal herhangi bir etkiye ihtiyaç duyulmaksızın, sistemin kendi iç dinamikleriyle oluşmaktadır. Dolayısıyla, bu yaklaşımın içerisinde etki mekanizmasına yer yoktur. Genel iktisadi faaliyetlerde görülen dalgalanmalar içsel (*endogeneous*) nitelik taşımaktadır ve yayılım mekanizmasını lineer olmayan dinamik ilişkiler oluşturur. Post-Keynesyenlerin iş çevrimlerine yaklaşımları Keynesyen ve Marksist teoriler arasında durmaktadır. İş çevrimlerinin temel kaynağının talep eksikliğinden kaynaklandığını savunan Keynesyen görüşle paralellik göstermekle beraber, çevrimlerin ücret-istihdam dinamiklerine, diğer bir ifadeyle sınıf çatışmasına, vurgu yaparak Marksist öğeleri de bünyesinde barındırır.

İş çevrimlerinin içsel olduğu yaklaşımı, ekonominin durağan durum patikası boyunca yerel istikrarsız olduğunu kabul eder. Bu yaklaşım, fiyatların ve ücretlerin yapışkan; dolayısıyla piyasaların dengeye intibak sürecinin çok yavaş gerçekleştiği, durgun durum patikasının istikrarsız olabildiği ve beklentilerin uyarlanmasının da zaman aldığı varsayımlarını analize dahil eder. Kuramsal olarak içsel olduğu kabul edilen dalgalanmaların açıklanmasına yönelik geliştirilen analiz yöntemleri lineer olmayan dinamikler üzerine kuruludur. Zira, kendi kendini besleyen çevrimler lineer olmayan dinamikleri barındırır. Formel olarak çarpan-hızlandırıcı modelleri ile başlayan iş

çevrimlerinin modellenmesi lineer yapıdadır. Fakat sürekli çevrimler için modeldeki parametreler üzerinde muhkem kısıtlar zaruridir. Buna karşılık, lineer olmayan dinamikler ise özü itibarıyla kendi kendilerine salınım üretirler. Karmaşık yapıdaki bu sistemleri analiz etmek için kullanılan yöntemler genellikle, fiziksel olguların, biyolojik yaşam formları arasındaki etkileşimlerin ya da nüfus dinamiklerinin modellenmesi sırasında geliştirilmişlerdir. Söz konusu yöntemler iş çevrimlerinin lineer olmayan dinamiklerinin anlaşılmasına yardımcı olmuştur. İçsel iş çevrimleri yazınında, analiz yöntemi olarak Çatallanma Teorisi'nin (*Bifurcation Theory*), Lyapunov Fonksiyonları'nın (*Lyapunov Functions*), Poincaré-Bendixson Teoremi'nin (*Poincaré-Bendixson Theorem*) ve diferansiyel-fark denklemlerinin (*mixed difference-differential equations*) kullanıldığı görülmektedir.

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Goodwin'in büyüme çevrimleri modelinin teorik ve matematiksel yapısı verilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde sırasıyla Goodwin modeline yapılan teorik katkılar ile modelin ampirik uygulamaları özetlenmiştir. Dördüncü bölümde Türkiye ekonomisine dair ampirik bir uygulamaya yer verilmiştir. Sonuç bölümünde ampirik uygulamadan elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

## I. GOODWIN'İN BÜYÜME ÇEVİRİMLERİ: MODELİN TEORİK VE MATEMATİKSEL YAPISI

Richard Murphy Goodwin, 1967 yılında yayımladığı "A Growth Cycle" isimli makalesiyle lineer olmayan büyüme çevrimleri modelini geliştirmiştir. Büyüme iş çevrimleri, belirli bir büyüme trendi etrafındaki dalgalanmaların, bu trendden sapmaları olarak ifade edilir. Goodwin (1967), kapitalist bir ekonomide devrevi dalgalanmaların içsel niteliğini, biyolojik yaşam formları arasındaki sembiyotik<sup>1</sup> ilişkileri modelleyen Lotka-Volterra avcı-av (*predator-prey*) lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin yardımıyla açıklamaya çalışmıştır. Kapitalist üretim sürecinde

<sup>1</sup> Biyolojide, iki canlı türünün bağımlı bir ilişki içinde yaşaması anlamını taşımaktadır.

emek ve sermaye sınıfları arasındaki mücadele, diğer bir ifadeyle karşılıklı bağımlılık ilişkisinin iç çelişkileri devrevi dalgalanmaları meydana getirmektedir. Kâr, ücret ve istihdam haddi arasındaki dinamik etkileşimlerin zaman içerisinde tersine dönmesi dalgalanmaların esasını oluşturmaktadır. Sermaye birikimi hızlandıkça, istihdam haddinin artmasıyla beraber (yedek işgücü ordusunun azalmasıyla) emeğin pazarlık gücü artar. Pazarlık gücünün emek lehine dönüşmesi sonucunda artan reel ücret düzeyi, sermaye birikim sürecini tersine çevirir; kâr haddi düşer. Yatırımın azalmasıyla istihdam haddi de düşer; ekonomi artık daralma safhasına girmiştir. Geline bu safhada emek, pazarlık gücünü yitirir; reel ücret düzeyi düşer. Bölüşümün sermaye lehine değişmesiyle birikim süreci yeniden başlar. Ekonomin içinde bulunduğu genişleme (daralma) safhası, aslında daralma (genişleme) safhasının tohumlarını da beraberinde taşımaktadır.

Goodwin'in büyüme çevrimleri sınıf çatışması olarak da bilinir ve işçi sınıfı ile sermaye sınıfının mücadelesinin iktisadi faaliyetlerde dalgalanmalara yol açtığı, bu dalgalanmaların kapitalist sistemin içsel dinamiklerinin doğal bir sonucu olarak ortaya çıktığı iddia edilir. İşçi sınıfının ücret düzeyi üzerindeki pazarlık gücü, buna karşılık sermaye sınıfının yatırım kararları ile istihdam haddi üzerindeki belirleyici rolü, büyüme trendi etrafında daimi bir çevrim yaratır.

### A. LOTKA-VOLTERRA DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMİ

R.M. Goodwin, büyüme çevrimleri modelini kurarken, biyolojik yaşam formları arasındaki nüfus dinamiklerinin modellendiği Lotka-Volterra diferansiyel denklem sisteminden yararlanmışır. Literatürde Avcı-Av modeli olarak da bilinen denklem sistemi, Amerikalı matematikçi, fiziko kimyacı ve aynı zamanda istatistikçi olan Alfred J. Lotka (1925) ile İtalyan matematikçi ve fizikçi Vito Volterra'nın (1926) matematiksel biyolojiye yaptıkları katkının önemli bir parçasını oluşturur. İki bilim adamı 1920'li yılların ortasında birbirlerinden bağımsız olarak yaptıkları çalışmalarda aynı biyolojik çevrede bulunan farklı canlı türleri arasındaki nüfus dinamiklerini açıklamaya çalışmışlardır. Denklem sistemi ile aynı biyolojik çevrede bulunan birisi "avcı" olarak nitelendirilen canlı türü ile bu canlı türü-

nün besin kaynağını oluşturan diğer canlı türü arasındaki nüfus etkileşimleri analiz edilmiştir.

Goodwin'in büyüme çevrimleri modelinin matematiksel altyapısını oluşturan Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemi, lineer olmayan iki denklemden oluşmaktadır. Modelde  $x$  ve  $y$  olmak üzere iki değişken mevcuttur.  $x$  avın nüfusunu,  $y$  ise avcının nüfusunu göstermek üzere sistem şu şekildedir.

$$\dot{x} = kx - axy \quad (1)$$

$$\dot{y} = -rx + bxy$$

(1) no'lu sistemde  $\dot{x}$  ve  $\dot{y}$  sırasıyla  $x$  ve  $y$  değişkenlerinin zamana göre türevini göstermektedir. Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemi aşağıdaki varsayımları içerir:

1) "Av" daima kendine yeterince besin sağlamaktadır. "Avcının" besin kaynağını ise sadece av nüfusu belirlemektedir.

2) Avcının olmadığı durumda avın nüfusu  $k$  haddinde büyümektedir.  $\dot{x}/x = k$ . Buna karşılık avın olmadığı durumda ise, avcının nüfusu  $r$  haddinde azalmaktadır.  $\dot{y}/y = -r$

3) Av ve avcının aynı anda bulunması durumunda av nüfusu, her iki canlı türünün nüfusları çarpımının belirli bir oranında azalmakta,  $-a$ , avcının nüfusu ise yine bu çarpımın belirli bir nispetinde artmaktadır,  $b$ . Sistemin sabit noktaları  $\dot{x} = 0$  için  $y^* = k/a$  ve  $\dot{y} = 0$  için  $x^* = r/b$ 'dir. Sistem, bu sabit noktalar etrafında eliptik bir yörünge izleyen çevrim aileleri oluşturur. Sabit noktalar, her iki canlı türü için ortalama nüfusu ifade eder. Avcı ve avın nüfusu bu ortalama değerler etrafında sürekli dalgalanmaktadır.

Goodwin bu sistemden yola çıkarak emek ve sermaye sınıfları arasındaki mücadelenin, tıpkı biyolojik yaşam formları arasındaki (avcı ve av) mücadelenin nüfusları düzeyinde meydana getirdiği dalgalanmalar gibi, iktisadi faaliyetlerdeki dalgalanmanın kaynağı olarak modellenebileceğini göstermiştir.

### B. MODELİN TEORİK YAPISI VE LİNEER OLMAYAN DİNAMİKLERİ

#### 1. Teorik Yapı

Goodwin'in büyüme çevrimleri modeli aşağıdaki varsayımları içermektedir.

1. İçerilmemiş teknolojik gelişme varsayımı yapılmaktadır.  $(Y/L) = a = a_0 e^{\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ .  $Y$  toplam hasılayı,  $L$  üretimde kullanılan emek miktarını,  $a$  emek verimliliğini,  $\alpha$  emek verimliliğinin büyüme haddini göstermektedir. Emek verimliliği sabit ve pozitif bir hadde büyüme haddidir.

2. Emek, sabit ve pozitif bir hadde büyüme haddidir.  $N = N_0 e^{\beta t}$ ,  $\dot{N}/N = \beta$ ,  $\beta > 0$ .

3. Üretimde sadece emek ve sermaye kullanılmaktadır.

4. Modeldeki tüm değişkenler reel ve net değerleri üzerinden tanımlanmıştır.

5. Emegın üretimden elde ettiği payın tamamı harcanmakta buna karşılık sermayenin aldığı payın tamamı tasarruf edilmekte ve tasarrufların tamamı otomatik olarak yatırıma ayrılmaktadır.  $S = I$ .

6. Sermaye-hasıla oranı sabittir.  $k = K/Y$

7. Reel ücretler, tam istihdam dengesinin çok yakın komşuluğunda artmaktadır.

## 2. Modelin Çözülmesi ve Lineer Olmayan Dinamikleri

Bu bölümde Goodwin'in büyüme çevrimleri modelinin dinamik analizinin yapılması için temel denklemler elde edilecektir. Emegın toplam üretimden aldığı pay,  $l$  ile gösterilsin. Dolayısıyla,  $l = wL/Y$ 'dir. 1 no'lu varsayımdan hareketle emegın toplam üretimden aldığı pay  $w/a$  şeklinde yazılabilir. Bu durumda sermayenin toplam üretimden aldığı pay  $1 - (w/a)$  olur. Kâr haddi, sabit sermaye başına düşen pay olduğuna göre,

$$r = Y(1 - w/a)/K \quad (1)$$

kâr haddini ifade eder. (1) no'lu denklemden eşitliğin sağ tarafı  $Y$  ile bölünüp tekrar düzenlendiğinde  $(Y - wL)/K$  yazmak mümkündür.  $Y - wL$ , gelirin sermayedarlar tarafından harcanmayan kısmına tekabül etmektedir. (5) no'lu varsayım gereği, bu büyüklüğün tamamı yatırıma ayrılmaktadır.  $Y - wL$  yerine sermaye

ye stokundaki değişimi ifade eden yatırım,  $dK/dt$ , yazıldığında (1) no'lu ifade sermaye stokunun büyüme haddine tekabül etmektedir. Sermaye-hasıla oranı sabit olduğundan  $\dot{Y}/Y = \dot{K}/K$  dır. Bu durumda kâr haddi sabit sermaye stokunun ve hasılanın büyüme haddine denktir.

$$r = Y(1 - w/a)/K = \dot{K}/K = \dot{Y}/Y \quad (2)$$

Emek verimliliğinin büyüme haddi  $\alpha$ , kişi başına düşen reel gelirin büyüme haddine tekabül etmektedir:

$$\alpha = (\dot{Y}/Y) - (\dot{L}/L) \quad (3)$$

(3) no'lu ifadeden emegın büyüme haddi,

$$(\dot{L}/L) = (\dot{Y}/Y) - \alpha \quad (4)$$

elde edilir. (4) no'lu denklemden  $\dot{Y}/Y$  yerine  $(1 - w/a)/k$  yazıldığında istihdam edilen emegın büyüme haddi,

$$(\dot{L}/L) = [(1 - l)/k] - \alpha \quad (5)$$

olur. İstihdam oranı  $v = L/N$  olarak ifade edildiğinde istihdam oranının büyüme haddi,

$$\dot{v}/v = \dot{L}/L - \dot{N}/N \quad (6)$$

dir. (6) no'lu denklemden, istihdam edilen emegın büyüme haddi ve toplam işgücünün büyüme haddi yerine daha önce tanımlanan eşitlikler yerine konduğunda,

$$\dot{v} = \left\{ \left[ (1 - l)/k \right] - (\alpha + \beta) \right\} v \quad (7)$$

diferansiyel denklemi elde edilmiş olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında (7) no'lu ifade, Lotka-Volterra denklem kalıbına uygun olarak aşağıdaki gibi yazılır ve Goodwin'in büyüme çevrimleri modelinin ilk denklemi elde edilmiş olur:

$$f_1 = \dot{v} = \left\{ \left[ \frac{1}{k} - (\alpha + \beta) \right] - \frac{1}{k} l \right\} v \quad (8)$$

Goodwin reel ücret düzeyindeki değişimleri standart Phillips eğrisi ile göstermiştir.<sup>2</sup>  $f(v) = -\gamma + \rho v$  şeklinde fonksiyonel bir ilişki kurulduğunda, büyüme çevrimleri modelinin ikinci denklemi de elde edilmiş olur.

$$l = w/a \Rightarrow \dot{l}/l = \dot{w}/w - \alpha \quad (9)$$

$$f_2 = \dot{l} = (-(\gamma + \alpha) + \rho v)l \quad (10)$$

(7) ve (10) no'lu denklemlerden oluşan sistemin dinamik analizinin yapılabilmesi için Jacobian matris oluşturulmalıdır. Sistemin meydana getirdiği çevrimlerin niteliğini, oluşturulan Jacobian matrisin "izinin" (*Trace of the Jacobian matrix*) işareti belirler. (Lorenz, 1993: 61).

İki boyutlu  $\dot{x} = f_1(x, y)$ ,  $\dot{y} = f_2(x, y)$  gibi dinamik bir sistem için Jacobian matris,

$$J = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} \quad (11)$$

dir. Buna göre, Goodwin'in lineer olmayan büyüme çevrimleri modelinde sistem sabit noktalar (*fixed points*)<sup>3</sup> etrafında lineer hale getirildiğinde Jacobian matris,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -(\gamma + \alpha)/k\rho \\ \rho(1 - k(\alpha + \beta)) & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

dır. Matrisin izi 0 olduğundan sistem, merkezi  $(v^*, l^*)$  noktası olan eliptik yörünge izleyen çevrim aileleri oluşturur. (Hirsch, Smale ve Devaney, 2004: 242-43). Sistemin karakteristik köklerinin reel kısmı 0 olduğundan (*pure imaginary*), sabit noktaların kararlılığı Lyapunov fonksiyonu ile belirlenebilir.<sup>4</sup> Ekonomi, bu sabit noktalar etrafında sürekli bir devinim gösterir, fakat denge noktasının gösterdiği ortalama değerlere

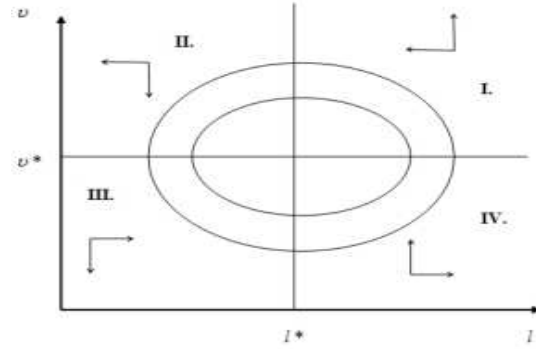
<sup>2</sup>  $f(v) = -\gamma + \rho v$ ,  $\lim_{v \rightarrow 1} f(v) = \infty$ ,  $\lim_{v \rightarrow 0} f(v) = \gamma < 0$  ve  $\partial f / \partial v > 0$

<sup>3</sup> Sabit Noktalar (*fixed points*) herhangi bir fonksiyonun türev fonksiyonunu sifra eşitleyen değerlerdir. Goodwin çevrim modelindeki Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemi için sabit noktalar sırasıyla  $v^* = (\gamma + \alpha)/\rho$  ve  $l^* = 1 - k(\alpha + \beta)$  dir.  $v^*$  ve  $l^*$  aynı zamanda istihdam haddinin ortalama değeri emeğin toplam gelirden aldığı payın ortalamasına eşittir.

<sup>4</sup> Çalışmanın sonunda Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemi için Lyapunov fonksiyonunun varlığı ispat edilmiştir.

hiçbir zaman eşanlı olarak ulaşamaz. Kapitalist bir ekonomide, herhangi bir dışsal etki olmaksızın, içsel dinamikler neticesinde büyüme trendi etrafında periyodik dalgalanmalar meydana gelir.

### Şekil 1. Goodwin'in Büyüme Çevrimleri Dinamikleri



Şekil 1'de Goodwin modelinin çevrim dinamikleri yer almaktadır. I. bölgede hem iş gücünün gelirden aldığı pay hem de istihdam oranı kendi ortalamalarının üzerindedir.  $l > l^*$ ,  $v > v^*$ . İstihdam haddinin yüksek olması dolayısıyla işçi sınıfının ücret üzerindeki pazarlık gücünün artması, gelir bölüşümünü işgücü lehine çevirir. Kâr oranının ortalama değerinin altına düşmesi ve sürekli olarak azalması yatırımların daralmasına neden olur. Daralan yatırımlar nedeniyle düşen istihdam haddi, emeğin pazarlık gücünü yitirmesine neden olur ve bu defa gelir bölüşümü sermaye lehine değişir. Kâr oranlarının artmasıyla yatırımlar artar, istihdam oranı yükselir. İstihdamın artması emeğe kaybettiği pazarlık gücünü yeniden kazandırır ve gelir bölüşümündeki payının artmasıyla tam bir çevrim tamamlanmış olur. Süreç tekrar tekrar işleyerek ilelebet süren bir dalgalanma meydana getirir. Bu yönüyle model, kapitalist ekonomilerde sınıf çatışmasından doğan, emek-sermaye çelişmesini yansıtan Marksist temellere dayanan bir modeldir. Çevrimin konumunu ve periyodunu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  ve  $k$  parametreleri belirler.

Goodwin'in büyüme çevrimleri modeli kalitatif özellikleri bakımından eleştirilse de iktisadi dalgalanmaları, Marx'ın sınıf çatışması teorisi bağlamında doğrusal olmayan dinamiklerle açıklayan ilk ve özgün çalışmalardan biridir. Goodwin bu çalışmasıyla kapitalist üretim biçiminin çelişkilerinin anlaşılmasına lineer olmayan dinamik bir model çerçevesinde katkı sunmuş-

tur. Model esas olarak nötr istikrarlı (*neutrally stable*) olmakla beraber, hem yerel asimptotik (dolayısıyla global asimptotik) hem de yapısal istikrarsız özelliklere sahiptir. (Velupillai, 1979:248) Nitekim, eleştirilerin hedefinde modelin yapısal istikrarsızlığı vardır. Model, temelini oluşturan Lotka-Volterra diferansiyel denklem sisteminin yapısal istikrarsız özelliğinden dolayı birçok makalede eleştirilmiştir. Sato, (1985:21) bu özelliğin model için başlıca dezavantaj teşkil ettiğini, Sportelli (1995:35) iktisadi modeller için arzu edilmeyen niteliğe sahip olduğunu, Manfredi ve Fanti (2004:21) uygun bir dalgalanma modeli olmadığını belirtmişlerdir.

## II. MODELE İLİŞKİN TEORİK ÇALIŞMALAR

Goodwin'in büyüme çevrimleri modeline yapısal istikrarsız özelliklerinden dolayı eleştiriler gelse de kapitalist bir ekonominin çelişkilerinin genel iktisadi faaliyetlerde sürekli bir dalgalanma meydana getireceğini modellemesi bakımından önemlidir. Bu sebeple çalışma birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve modelin teorik yapısına ilişkin önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların ortak özelliği, modelin yapısal kararlı duruma hangi şartlar ve varsayımlar altında ulaştığı ile ilgilidir.

Modele yapılan katkılardan ilki Meghnad Desai'e aittir ve daha sonraki çalışmaların da önünü açmıştır. Desai (1973), orijinal modeldeki varsayımlardan bazılarını daha gerçekçi hale getirerek çevrimlerin yapısında farklı sonuçlar elde etmiştir. Desai çalışmasında, modele ücret-fiyat intibakını dahil etmiş, enflasyon ve işsizlik ilişkisini nominal ücretler üzerinden kurmuştur. Elde ettiği sonuçlar orijinal modelden önemli farklılıklar göstermektedir. Desai, nominal ücretler üzerinden yapılan ücret pazarlığının, enflasyonun modele dâhil edilmesi durumunda, denge etrafında sönümlü dalgalanmaların meydana geldiği, reel ücret düzeyini korumak için daha yüksek bir istihdam haddine ihtiyaç olduğu, enflasyonun, emeğin pazarlık gücünü olumsuz etkilediği ve gelir bölüşümünün emek aleyhine bozulduğu sonucuna ulaşmıştır. Bir başka deyişle enflasyon, işgücünün pazarlık stratejilerini etkilemektedir.

Desai aynı çalışmasında nominal ücretler üzerinden yapılan pazarlık sürecine gerçekleşen enflasyonu dahil etmiştir. Para yanılması olduğu durumda sistem yapısal olarak istikrarlı hale gelmektedir. Para yanılması olmadığı durumda sistem, Goodwin'in orijinal modelindeki gibi yapısal istikrarsız özelliğini korumaktadır.

Orijinal modelin varsayımlarından birinin daha terk edildiği durum ise teknolojik gelişmeye ilişkindir. Desai, istihdam haddinde meydana gelen değişimler neticesinde sermaye-hasıla oranının da değişkenlik gösterdiğini, ekonomide ortaya çıkan atıl veya eksik kapasitenin yatırımlar üzerindeki etkisinin de tekrar istihdam haddini etkileyeceğini analizine dahil etmiştir. İstihdam haddinin azaldığı zamanlarda ortaya çıkan kapasite fazlası, ölçülen sermaye-hasıla oranını tam kapasite sermaye-hasıla oranının üzerine çıkarır. Ölçülen sermaye-hasıla oranı, tam kapasite sermaye-hasıla oranı ve istihdam haddinin bir fonksiyonudur. Desai bu fonksiyonel ilişkiyi  $k = k^* v^{-\varepsilon}$  olarak ifade etmiştir. İstikrar analizinin sonucuna göre,  $\varepsilon$ 'nin büyüklüğü dengenin kararlı olmasını belirleyen temel parametredir.  $\varepsilon > 1$  durumunda, istihdam haddindeki %1'lik bir düşüş sermaye-hasıla oranının büyüme haddini %1'den daha fazla arttırır, bu etki sabit sermaye stokunun büyüme haddini düşürür (birim sermaye stoku başına düşen yatırım miktarı azalır) ve istihdam haddinin daha fazla düşmesine neden olur.  $\varepsilon$  sabitinin 1'den büyük olması istikrarsızlaştırıcı bir etkiye sahiptir.

Bir başka çalışmada Shah ve Desai (1981), içermemiş teknolojik gelişme varsayımını terk ederek sistemin istikrar durumunu incelemişlerdir. Emeğin pazarlık gücünün tam istihdam haddi ile belirlendiği, sermayedarların yatırım kararlarının istihdam edilen işgücünün büyüme haddini belirlediği orijinal modele ek olarak sermayedarların, maliyet minimizasyonunu gerçekleştirebilecekleri teknoloji düzeyini belirleyebilmeleri modelin yerel kararlı olmasını sağlamaktadır.

Goodwin'in av-avcı modeline dayanan büyüme çevrimleri modeline önemli katkılardan bir tanesi de Frederick van der Ploeg'a aittir. Ploeg (1983) çalışmasında, nüfus artış haddi, teknik ilerleme, tasarruf davra-

nışları, sendikal örgütlenme, enflasyon ve işgücü gömülemesi gibi yapısal değişikliklerin çevrimler üzerindeki etkisini incelemiştir. Post-Keynesyen büyüme modeli çerçevesinde yaptığı bir simülasyonda Philips eğrisinin eğimi azaldıkça, işsizlik haddi yükseldikçe, sınıflar arasındaki tasarruf hadleri farkı arttıkça, sermaye-hasıla oranı yükseldikçe ve işgücünün gelirden aldığı pay azaldıkça tam bir çevrimin uzunluğunun arttığını tespit etmiştir. (Ploeg, 1983:258-259)

Van der Ploeg (1987) bir başka çalışmada "Hopf Çatallanma" teorisi yardımıyla teknolojik gelişme, tasarruf davranışı ve ücret pazarlık süreci ile ilgili yapısal değişiklikler durumunda çevrimlerin karakterini incelemiştir. Kaldor'un teknolojik gelişme fonksiyonunu kullanarak üretim maliyetlerini en aza indirebilecekleri teknoloji düzeyini belirleyebilmeleri, sermaye ve işgücünün farklı tasarruf hadlerine sahip olmaları (*differential saving hypothesis*) ve işgücünün gelirden aldığı payın istihdam haddi ile beraber verimlilik artışları tarafından belirlenmesi durumunda sistemin yapısal kararlı hale geleceğini ortaya koymuştur. Tasarruf hadlerindeki farklılığın ve ücret pazarlıklarının verimlilik artışları üzerinden yapılmasının, içsel teknolojik gelişmeye oranla daha baskın olması durumunda kararlı limit çevrimlerin oluşacağını göstermiştir.

Glombowski ve Krüger (1983), sosyal devlet anlayışı çerçevesinde, ekonomide farklı işsizlik sigortası politikalarının büyüme çevrimleri üzerindeki etkilerini incelemiştir. Çalışma iki ana bölüme ayrılmıştır. Birinci ana bölümde işsizlik sigortası fonunun her zaman dengede olduğu varsayımı altında, işsizlik sigortası fonunun oluşturulmasında sermayedarlardan ve işgücünden yapılan kesintilerin kurumsal olarak bir takım kurallara bağlanması durumunda büyüme çevrimlerinin niteliği incelenmiştir. Bu bölümde, işsizlik sigortası fonunun oluşturulmasında Anglo-Sakson ve Kıta Avrupası uygulamalarını ayrı ayrı Goodwin modeline dahil etmişler; her iki uygulamada, işsizlik sigortası fonunun her zaman dengede olduğu varsayımı altında, sermayedarlar ve işgücü için optimum kesinti oranlarını simüle etmişlerdir. Fonun sermayedarların ve işgücünün toplam üretimden aldıkları pay üzerinden belirli sabit bir oranda yapılan kesintilerle oluşturulduğu Anglo-Sakson sisteminde, orijinal Goodwin modelinin kalitatif özelliklerinin (Şekil 1'de gösterilen çev-

rimsel yapı - Lyapunov anlamında kararlı) korunduğu sonucuna ulaşmışlardır. Fon kesintilerinin sermaye ve işgücü gelirlerinin düzeyine bağlı olarak belirlendiği Kıta Avrupası uygulamasında ise kararsız denge çözümü elde etmişlerdir.

İkinci ana bölümde, çevrimlerin farklı safhalarında işsizlik sigorta fonunun açık ya da fazla verdiği ve kapasite kullanımının değişken olduğu durumlar beraber modellenmiştir. Yaptıkları simülasyonda kararsız denge çözümü elde etmekle birlikte, kararlı denge çözümünü sağlayan koşulların iktisadi anlamlılığının belirlenemeyeceği sonucuna ulaşmışlardır. Bu bağlamda, sermaye birikimindeki dalgalanmanın işsizlik sigorta fonu uygulamasından kaynaklandığını söylemenin zor olduğunu belirtmişlerdir.

### III. MODELE İLİŞKİN AMPİRİK ÇALIŞMALAR

Goodwin'in 1967 yılındaki çalışması biyolojik yaşam formları arasındaki sembiyotik ilişkinin varlığı üzerine kurulmuştur. Emeğin gelirden aldığı pay ile istihdam haddi arasındaki dinamik ilişkilerin tersine dönmesiyle ekonomide devrevi dalgalanmalar meydana gelir. Sermaye birikimi hızlandıkça istihdam artar. Buna bağlı olarak emeğin pazarlık gücü artar. Pazarlık gücünün artması emeğin gelirden aldığı payın artması, ya da kâr haddinin düşüşünü de beraberinde getirir. Kâr hadlerinin düşmesi yatırımları ve dolayısıyla da istihdamı azaltır. Düşük istihdam düzeyi, emeğin pazarlık gücünü azaltır ve gelir bölüşümünü kâr lehine değiştirir. Sermaye birikim süreci yeniden başlar ve tam bir çevrim tamamlanmış olur. Bu dinamik ilişkiler, kâr haddi  $\uparrow \rightarrow$  yatırım  $\uparrow \rightarrow$

toplam talep (büyüme)  $\uparrow$  olarak özetlenebilir. Bu bağlamda, bu makalenin ana çerçevesini oluşturan Goodwin modelinin temsil ettiği rejim, exhilaryonist, yani kâr çekişli olarak tanımlanabilir. Bir diğer ifadeyle gelir bölüşümündeki değişimlerin yatırımlar üzerindeki etkisi, tüketim üzerindeki etkisinden büyüktür. Buna mukabil, gelir bölüşümünün tüketim üzerindeki etkisinin yatırımlar üzerindeki etkisinden büyük olduğu maliyet etkisinden daha baskın olduğu tezine sahip Kalecki'nin (1971) modeli ise ücret-çekişli rejimi temsil eder.



Neo-klasik teoriye göre gelir bölüşümünün sermaye lehine değişmesi ve emeğin gelirden aldığı payın azalması yatırımları arttırır. Emeğin gelirden aldığı payın özellikle maliyet etkisinin baskın olduğu bu yaklaşıma göre, talep etkisi ise daha sınırlıdır. Kâr hadlerinin yükselmesi, diğer taraftan ücretlerin düşmesi, yatırımları uyaracaktır. Bir başka yaklaşıma göre ise, gelir bölüşümünün emek lehine değişmesi hızlandıran prensibi dolayısıyla efektif talebi ve buna bağlı olarak yatırımları arttırır. Gelir bölüşümünün düşük tasarruf meyli olan kesimlerin lehine değişmesi yatırımları arttıracaktır. Taylor (1991), birinci yaklaşımın temsil ettiği rejimleri exhilarasyonist, ikinci yaklaşımın temsil ettiği rejimleri ise stagnasyonist olarak tanımlar. Bhaduri ve Marglin (1990), Taylor'un analizini geliştirerek hem kâr çekişli hem de ücret çekişli rejimler için sınırlar oluşturmuşlardır. Gelir bölüşümünün sermaye birikimi ve büyüme rejimi (kâr çekişli ya da ücret çekişli) üzerindeki etkisini inceledikleri çalışmasında Bhaduri ve Marglin'in teorik çalışmasını takiben birçok ampirik çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların temel amacı fonksiyonel gelir dağılımı ile toplam talep ve sermaye birikimi arasındaki ilişkilerin incelenmesi neticesinde büyüme rejimlerinin niteliğinin (kâr çekişli ya da ücret çekişli) belirlenmesidir. Bu teorik çerçeve içerisinde ampirik olarak yapılan ilk çalışma Bowles ve Boyer'e (1995) aittir. Çalışmada 1961-1987 dönemi için Fransa, Almanya, Japonya, Birleşik Krallık ve Amerika Birleşik Devletleri'nde hakim olan büyüme rejiminin niteliği belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, En Küçük Kareler (*Ordinary Least Squares; OLS*) yöntemi kullanılmış, söz konusu ülkeler için ayrı ayrı toplam talebin bileşenleri olarak tüketim, yatırım ve net ihracat bağımlı değişkenler olarak tanımlanmış, kâr haddi ve istihdam haddindeki değişimlerin toplam talep bileşenleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Kamu sektörünün ihmal edildiği çalışmada öncelikle ekonomilerin dışı kapalı olduğu varsayılarak büyüme rejimi tespit edilmeye çalışılmıştır. Buna göre, tüm ülkeler için ücret-çekişli bir büyüme rejiminin varlığı istatistikî olarak anlamlı bulunmuştur. Çalışmaya net ihracat bileşeninin dâhil edilmesiyle Fransa, Almanya ve Japonya için büyüme rejimi kâr-çekişli bir niteliğe kavuşurken, Bir-

leşik Krallık ve Amerika Birleşik Devletleri için büyüme rejimi ücret-çekişli niteliğini korumuştur.

Büyüme rejiminin niteliğine yönelik olarak yapılan bir başka çalışma Gordon'a (1995) aittir. Gordon, 1955:1-1988:4 dönemini kapsayan Amerikan ekonomisine dair yaptığı çalışmada, kâr oranının kapasite kullanımını üzerindeki etkisini araştırmış ve hem kapalı hem açık ekonomi durumunda kâr-çekişli bir büyüme rejiminin olduğuna yönelik anlamlı sonuçlar elde etmiştir. İki aşamalı En Küçük Kareler (*2-Stage Least Squares*) yöntemi kullanılan çalışmada Bowles ve Boyer'in çalışmasına zıt sonuçlar elde edilmiştir.

Yine toplam talep bileşenleri üzerinden yapılan çalışmalardan ikisi Naastepad (2006) ve Naastepad ve Storm'a (2007) aittir. Naastepad, ilk çalışmasında Hollanda ekonomisinde 1960-2000 yılları arasında reel ücret kesintilerinin tasarruf, yatırım ve net ihracat üzerindeki etkilerini incelemiştir. Daha önceki modellere ek olarak, işgücü verimliliğindeki değişikliklerin birim emek maliyetleri üzerinden gelir dağılımı, tüketim, yatırım ve net ihracat üzerindeki etkisi de dikkate alınmış, söz konusu dönemde ekonominin reel ücret kesintilerinin büyüme ve verimlilik artışlarını olumlu yönde etkilemediği ve dolayısıyla ücret-çekişli bir rejime sahip olduğu sonucuna ulaşmıştır. Yüksek işsizlik ve düşük büyüme sorunlarını çözebilmek için 1982 yılından sonra gerçekleştirilen reel ücret kesintilerinin verimlilikteki büyüme yavaşlattığı, emek piyasasının esnek hale getirilmesinin makroekonomik performansı arttırmaktan uzak olduğunu belirtmiştir. 2007 yılına ait olan çalışmada ise bir önceki yıla ait olan çalışmadaki teorik çerçeve esas alınarak sekiz OECD ülkesi (Almanya, İtalya, Fransa, Hollanda, Japonya, İspanya, Birleşik Krallık ve Amerika Birleşik Devletleri) için sonuçlar elde edilmiştir. 1960-2000 yılları arasında Japonya ve Amerika Birleşik Devletleri haricindeki tüm ülkelerin ücret-çekişli toplam talep rejimine sahip olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Kâr çekişli rejimin hâkim olduğu Amerika Birleşik Devletleri ve Japonya dâhil olmak üzere 1980'den sonra düşük büyüme ve yüksek işsizliğin temel sebebinin dünya ticaretinin zayıflaması olduğunu, işgücü verimliliğindeki yavaşla-

manın, reel ücretlerin büyüme teşvik edici etkisini dengelediğini ortaya koymuşlardır.

Harvie (2000), 1959-1994 arasında yıllık verileri kullanarak on OECD ülkesi (Avustralya, Kanada, Finlandiya, Fransa, Almanya, Yunanistan, İtalya, Norveç, Birleşik Krallık ve Birleşik Devletler) için Goodwin modelinin geçerliliğini test etmiştir. Emegın gelirden pay ve istihdam haddinin diyagramatik olarak niteliği tüm ülkeler için Goodwin'in çevrimlerine uymasına rağmen, ampirik olarak hiçbir ülke için anlamlı sonuçlara ulaşamamıştır.

Flaschel (2008), genişletilmiş Goodwin modeli çerçevesinde 1955-2004 dönemine ait çeyreklik veri seti ile Amerikan ekonomisinde mal piyasasında kâr çekişli bir rejimin varlığına ait anlamlı sonuçlar elde etmiştir.

Barbosa-Filho ve Taylor (2006), Kalecki ve Goodwin modellerini baz alarak, 1948-2002 dönemi için Amerikan ekonomisinde özel sektöre ait çeyreklik veri seti ile mal piyasasındaki rejimi test etmişlerdir. Çalışmada emegın gelirden aldığı pay ile kapasite kullanım oranları kullanılmış ve mal piyasasında kâr çekişli bir rejimin varlığını gösterir sonuçlara ulaşmışlardır.

#### IV. AMPİRİK BİR UYGULAMA

##### A. EKONOMETRİK YÖNTEM

Zaman serisi ekonometrisinde sıkça kullanılan yöntemlerden birisi de Vektör Otoregresif analizdir. Kısaca VAR olarak adlandırılan yöntem ilk olarak Sims (1980) tarafından ortaya konulmuştur. Analize konu olan değişkenler arasında eşanlılık mevcutsa, değişkenlerin bağımlılık ve bağımsızlık durumları ortadan kalkmaktadır. Bu nedenle bir değişken, hem kendisinin geçmiş dönemlerdeki değerlerinden hem de başka bir değişkenin cari ve geçmiş dönemlerdeki değerlerinden etkilenir. Teorik olarak, değişkenler arasında böylesine dinamik ilişkiler bulunuyorsa bir VAR modelinin kurulması uygun olur.  $y_t$  değişkeni  $z_t$  değişkeninin hem cari döneme hem geçmiş dönemlere ait değerlerinden etkileniyorsa ve  $z_t$  değişkeni de benzer şekilde,  $y_t$  değişkeninin hem cari hem geçmiş dönemlerdeki değerlerinden etkileniyorsa, basit iki değişkenli

bir eşanlı denklem sistemi şu şekilde kurulur: (Enders, 2004:264)

$$y_t = b_{10} - b_{12}z_t + \gamma_{11}y_{t-1} + \gamma_{12}z_{t-1} + \varepsilon_{yt} \quad (13)$$

$$z_t = b_{20} - b_{21}y_t + \gamma_{21}y_{t-1} + \gamma_{22}z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (14)$$

Denklem (1) ve (2), gecikme uzunluğu 1 olan 2 değişkenli bir eşanlı denklem sistemini ifade etmektedir ve VAR(1) olarak gösterilir.  $y_t$  ve  $z_t$  değişkenlerinin durağan,  $\varepsilon_{yt}$  ve  $\varepsilon_{zt}$ , standart sapmaları sırasıyla  $\sigma_y$  ve  $\sigma_z$  olan otokorelasyon içermeyen beyaz gürültü terimleri oldukları varsayılır (Enders, 2004:264). Sistemde  $y_t$  ve  $z_t$  değişkenleri birbirlerini eşanlı olarak etkiledikleri için yapısal olarak geri beslemelidir. Denklem (1)'deki  $-b_{12}$  terimi,  $z_t$  değişkeninin  $y_t$  değişkeni üzerindeki eşanlı etkisini göstermektedir. Benzer şekilde,  $-b_{21}$  terimi de  $y_t$  değişkeninin  $z_t$  değişkeni üzerindeki eşanlı etkisini ifade eder.  $\varepsilon_{yt}$  ve  $\varepsilon_{zt}$  terimleri sırasıyla  $y_t$  ve  $z_t$  üzerindeki şoklardır.  $b_{21}$  ( $b_{12}$ ) sıfırdan farklıysa,  $\varepsilon_{yt}$  ( $\varepsilon_{zt}$ ) terimi  $z_t$  ( $y_t$ ) değişkeni üzerinde eşanlı dolaylı bir etkiye sahiptir. Yukarıdaki denklem sistemi ilkel form (*primitive form*) olarak adlandırılmaktadır ve  $y_t$  ile  $\varepsilon_{zt}$ ,  $z_t$  ile  $\varepsilon_{yt}$  arasında korelasyon bulunduğundan En Küçük Kareler (*Ordinary Least Squares, OLS*) yöntemi ile tahmin edilemez.<sup>5</sup> OLS yöntemi ile tahmin yapılabilmesi için (13) ve (14) no'lu denklemlerin ifade ettiği sistem, indirgenmiş forma (*reduced form*) dönüştürülmelidir. (13) ve (14) no'lu denklemlerin ifade ettiği sistem için indirgenmiş yapı ve standart formu şu şekildedir.<sup>6</sup>

$$y_t = a_{10} + a_{11}y_{t-1} + a_{12}z_{t-1} + e_{1t} \quad (15)$$

$$z_t = a_{20} + a_{21}y_{t-1} + a_{22}z_{t-1} + e_{2t} \quad (16)$$

$$x_t = A_0 + A_1x_{t-1} + e_t \quad (17)$$

dir. VAR modellemesinde ilkel sistemi ifade eden ve Denklem (13) ve (14)'le verilen yapı ile indirgenmiş yapı arasında göze çarpan en önemli sorun "özdeşleşme" (*identification*) sorunudur. İlkel formda on

<sup>5</sup> Standart ekonometrik teknikler, bağımsız değişkenlerin hata terimi ile korelasyonun bulunmamasını gerektirmektedir.

<sup>6</sup> İlkel formdan, indirgenmiş forma ulaşmak için gerekli adımlar için bkz. Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, Second edition, John Wiley & Sons, New York, ss.264-265.

parametre tahmini yer alırken, indirgenmiş formda dokuz parametre tahmini söz konusudur. İndirgenmiş formdaki sistemin katsayıları üzerinde kısıtlar konularak yapısal formdaki katsayılar elde edilebilir (Enders, 2004:271). Sims (1980), özdeşleşme sorununun çözümü için tekrarlamalı (*recursive*) bir yöntem önermektedir. Bunun için yapısal modelde eşanlı etkileri gösteren  $b_{12}$  veya  $b_{21}$  katsayılarının 0'a eşitlenmesini önermiştir. Bu kısıtlar altında, indirgenmiş sistemde  $z_t$  serisi için gözlemlenen hatalar tamamıyla yapısal formdaki  $z_t$  serisinin hataları tarafından belirlenmiş olur. Buna karşın, indirgenmiş sistemde  $y_t$  serisi için gözlemlenen hatalar ise yapısal formdaki  $y_t$  ve  $z_t$  serileri için gözlemlenen hatalar tarafından belirlenmiş olur. Choleski Ayırıştırması (*Choleski Decomposition*) adı verilen bu işlem ile hata terimleri ayrıştırılarak özdeşleşme sorunu çözülmüş olur.

Sims'in geliştirdiği metodolojinin önemli bir ayağını standart VAR modelinin, Vektör Hareketli Ortalama (*Vector Moving Average, VMA*) biçimindeki ifadesi oluşturur. Böylelikle, sistemdeki değişkenlere uygulanan şokların söz konusu değişkenler üzerindeki etkileri izlenebilmektedir. Denklem (17) ile ifade edilmiş olan standart biçimdeki VAR modelinin VMA gösterimi,

$$x_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} A_1^i e_{t-i} \quad (18)$$

dir. (Enders, 2004:267). Denklem (18)'de  $\mu = [\bar{y}, \bar{z}]'$ ,  $\bar{y} = [a_{10}(1 - a_{22}) + a_{12}a_{20}] / \Delta$  ve  $\bar{z} = [a_{20}(1 - a_{11}) + a_{21}a_{10}] / \Delta$  dir. Böylece standart formdaki bir VAR sürecini şoklar ( $e_{1t}, e_{2t}$ ) cinsinden yazmak mümkün hale gelir. Etki-tepki fonksiyonları ile herhangi bir değişkene gelen şok karşısında serilerin cari ve ileriki dönemlerdeki davranışlarını gözlemlemek olanağı vardır.

VAR modellerinde değişkenler arasındaki ilişkilerin belirlenmesinde hata terimlerinin tahmini önemli bilgiler içermektedir. Tahmin Hata Varyans Ayırıştır-

ması (*Forecast Error Variance Decomposition, FEVD*), bir değişkende meydana gelen değişimin hangi oranda kendi varyansındaki değişimden, hangi oranda diğer değişken ya da değişkenlerin varyanslarından meydana geldiğini analiz etmede kullanılır. Tahmin hata varyansı ayırıştırması değişkenler arasındaki dinamik ilişkilerin belirlenmesinde önemli bir araçtır.  $\varepsilon_{zt}$ 'ye gelen şok,  $y_t$  serisine ait tahmin hatası varyansını hiç açıklamıyorsa,  $y_t$  serisi tamamıyla dışsaldır. Buna mukabil,  $\varepsilon_{zt}$ 'ye gelen şok,  $y_t$  serisine ait tahmin hatası varyansının tamamını açıklıyorsa,  $y_t$  serisi tamamıyla içseldir (Enders, 2004:280). Tahmin hatası varyans ayırıştırma işlemi, etki-tepki analizine dayandığı için değişkenlerin sıralamasından etkilenmektedir (Breitung vd., 2004:182). Sims (1980)'in bu yaklaşımı değişkenlerin simetrik bir yapıda olduğu varsayımını da beraberinde getirmektedir. Ne var ki, iktisadi açıdan bir değişkenin farklı değişkenlerdeki değişimlere verdiği tepki simetrik bir yapıda olmayabilir. Sims (1981), Bernanke (1986), Sims (1986), Shapiro ve Watson (1988) çalışmalarında, bugün literatürde Yapısal Vektör Otoregresyon (*Structural Vector Auto Regression, SVAR*) ya da belirlenmiş (*identified*) VAR olarak bilinen yeni bir yöntem ortaya koymuşlardır.

Bu çalışmada, 1987:1-2004:4 döneminde Türkiye ekonomisi için Goodwin modelinin açıklayıcılığı, Blanchard-Quah tipi SVAR modeli ile çerçevesinde sınanmıştır. Belirlenen değişkenler arasındaki dinamik ilişkiler dikkate alınarak, gelecek dönemlere ilişkin çıkarsamalar yapılmıştır.

### 1. Veri Seti ve Değişkenler

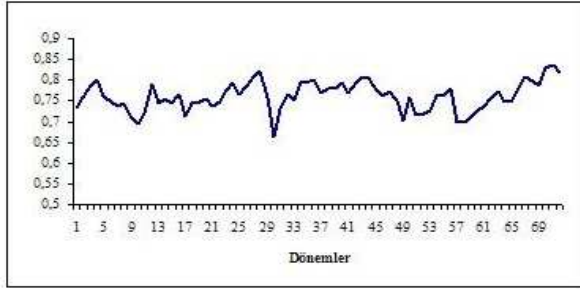
Bu çalışmada, toplam imalat sanayiinde işgücüne yapılan ödemelerin toplam ödemeler içindeki payı ile yine toplam imalat sanayiinde kapasite kullanım oranları kullanılarak Goodwin'in büyüme çevrimleri modelinin açıklayıcılığı sınanmıştır. Toplam imalat sanayiinde işgücüne yapılan ödemelerin toplam imalat sanayii içindeki payı, Türkiye İstatistik Kurumu'ndan (TÜİK), toplam imalat sanayi kapasite kullanım oranları, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası (TCMB) Veri Dağıtım Sistemi'nden derlenmiştir. Çalışmada kullanılan serilerin frekansı üç aydır. Kapasite kullanım oranı

“CAP”, işgücünün toplam ödemelerden aldığı pay “LSH” ile gösterilmiştir.

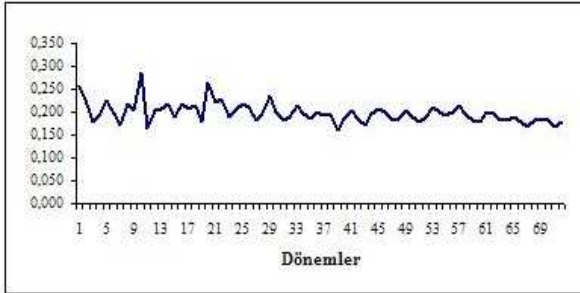
## 2. Durağanlık Analizi

Çalışmada kullanılan zaman serilerinin durağanlık analizi Genişletilmiş Dickey-Fuller (*Augmented Dickey-Fuller, ADF*) testi ile yapılmıştır.<sup>7</sup> Pantula (1989) tarafından geliştirilen metodolojiye göre, bir seri trend barındırıyorsa, serinin düzey (*level*) değerlerine ilişkin birim kök (*unit root*) testi trend terimi içeren ADF testi ile yapılmalıdır. Benzer şekilde eğer trend barındırmıyor, sabit bir ortalama etrafında dalgalanıyorsa, ADF testi trend terimi olmadan sadece sabit terim yardımıyla tahmin edilir. Grafik 1 ve Grafik 2’de sırasıyla, “CAP” ve “LSH” zaman serileri düzey değerleriyle verilmiştir. Buna göre, “CAP” trend içermeyen fakat sabit bir ortalama etrafında dalgalanan bir yapı sergilemektedir. “LSH” serisi ise zayıf da olsa trend barındırmaktadır. Bundan dolayı ADF testi “CAP” serisi için trend terimi olmadan sadece sabit terim ile, “LSH” serisi için hem trend hem sabit terim ile gerçekleştirilmiştir.

**Grafik 1. Toplam İmalat Sanayiinde Kapasite Kullanımı**



**Grafik 2. Toplam İmalat Sanayiinde, İşgücünün Toplam Ödemelerden Aldığı Pay**



Aşağıdaki tabloda durağanlık testinin sonuçları gösterilmiştir. Test sonuçlarına göre, “CAP” serisi düzey değerleriyle durağandır. Dolayısıyla, “CAP” serisi 0. mertebeden entegredir. “LSH” serisi birinci farkının alınmasıyla durağan hale gelmektedir. “LSH” serisi 1. mertebeden entegredir.

**Tablo 1. ADF Durağanlık Testi Sonuçları**

Değişkenler	Genişletilmiş Dickey-Fuller Test İstatistiği	Deterministik Terim	Gecikmeli Farklar Sayısı
CAP	-3,9896	Sabit	0
LSH	-3,1457	Sabit, Trend	3
ΔLSH	-13,4059	Sabit	2

**Not:** Δ birinci farkı belirtmektedir. ADF testi için %1 anlamlılık düzeyinde kritik değerler “sabit ve trend”, “sabit” ve “terimsiz” durumlar için sırasıyla, -3,96, -3,43 ve -2,56’dır. Kritik değerler, R. Davidson and J. McKinnon, London, Oxford University Pres, 1993, s. 708’den alınmıştır.

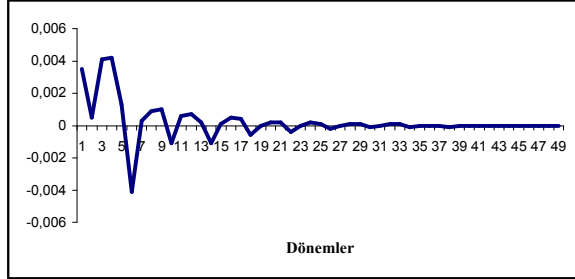
## 3. Etki-Tepki Fonksiyonları Tahmin Sonuçları

Blanchard-Quah tipi SVAR modeli çerçevesinde etki-tepki fonksiyonu tahminin sonuçları, izleyen 48 çeyreklik dönem için aşağıda grafik şeklinde gösterilerek yorumlanmıştır. Çalışmada etki-tepki fonksiyonları tahmini ile bir değişkende meydana gelen pozitif “1 standart sapmalık” bir şokun gelecek dönemler için modeldeki diğer değişkenleri ne yönde etkileyeceği tespit edilmektedir.

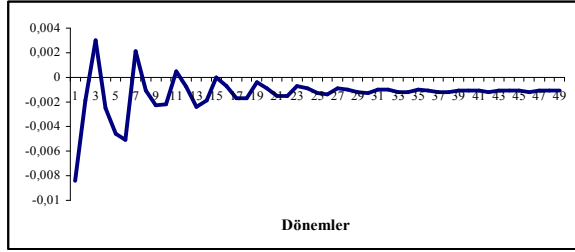
Etki-Tepki Fonksiyonları, Grafik 3. ve Grafik 4.’te verilmiştir. Grafik 3.’te kapasite kullanımının işgücüne yapılan ödemelere gelen şoka verdiği tepki gösterilmiştir. Buna göre, kapasite kullanımı yaklaşık 30 çeyreklik dönem boyunca çevrimsel bir yapı sergilemektedir. Çevrimselliğin sönümlü yapıda olduğu görülmektedir. Grafik 4.’te ise işgücüne yapılan ödemelerin, kapasite kullanımına gelen şoka verdiği tepki gösterilmiştir. Benzer şekilde yaklaşık 30 dönem boyunca çevrimsellik mevcut olmakla beraber, dalgalı yapı sönümlüdür. Dolayısıyla, bu dönemden sonra belirli bir değere yakınsamaktadır. Goodwin modeli sürekli bir dalgalanma modeli olduğu için, çalışmaya konu olan dönemde modelin açıklayıcılığı zayıf kalmaktadır.

<sup>7</sup> ADF testi ve diğer analizler JMulti 4.24. paket programı ile gerçekleştirilmiştir. Programa <http://www.jmulti.de/> adresinden ulaşılabilir.

**Grafik 3. Kapasite Kullanımının, İşgücüne Yapılan Ödemelere Gelen Şoka Verdiği Tepki**



**Grafik 4. İşgücüne Yapılan Ödemelerin, Kapasite Kullanımına Gelen Şoka Verdiği Tepki**



#### 4. Tahmin Hata Varyansı Ayırıştırması Sonuçları

Bir değişkende meydana gelen değişimin hangi oranda kendi varyansındaki değişimden, hangi oranda diğer değişkenlerin varyansından meydana geldiği Tahmin Hata Varyansı Ayırıştırması ile analiz edilir. Bu bölümde, çalışmada kullanılan değişkenler için varyans ayırıştırmasına yer verilmiştir.

**Tablo 2. Kapasite Kullanımındaki Değişimin, İşgücüne Yapılan Ödemelere ve Kapasite Kullanımı Şoklarına Atfedilen Hatalar**

Dönemler	Değişken	Kapasite Şoku	İşgücüne Yapılan Ödemeler Şoku
1	CAP	0.98	0.02
5		0.97	0.03
10		0.94	0.06
20		0.93	0.07
30		0.93	0.07
40		0.93	0.07

**Tablo 3. İşgücüne Yapılan Ödemelerdeki Değişimin, Kapasite Kullanımı ve İşgücü Ödemeleri Şoklarına Atfedilen Hatalar**

Dönemler	Değişken	Kapasite Şoku	İşgücüne Yapılan Ödemeler Şoku
1	LSH	0.21	0.79
5		0.21	0.79
10		0.25	0.75
20		0.26	0.74
30		0.26	0.74
40		0.26	0.74

Tablo 2’de, kapasite kullanımındaki değişimin, işgücüne yapılan ödemeler ve kapasite kullanımı şoklarına atfedilen hatalar yer almaktadır. Buna göre, tüm dönemler boyunca kapasite kullanımındaki değişimlerin tamamına yakını kendi varyansındaki değişimden oluşmaktadır. Tablo 3’te ise işgücüne yapılan ödemelerdeki değişimin, kapasite kullanımı ve işgücüne yapılan ödemeleri şoklarına atfedilen hatalar yer almaktadır. 5 çeyreklik dönem boyunca işgücüne yapılan ödemelerdeki değişimler %21 oranında kapasite şoku tarafından açıklanmaktadır. 20. dönemde söz konusu değişimlerin, kapasite şoku tarafından açıklanma oranı %26’ya yükselmekle birlikte bu dönemden sonra değişmemektedir. Oysa ki, Goodwin’in büyüme çevrimleri modelinin dinamikleri, değişkenler arasındaki ilişkilerin zaman içerisinde tersine dönmesini gerektirmektedir.

#### SONUÇ

Goodwin’in büyüme çevrimleri modeli, kapitalist üretim sisteminin içsel çelişkilerini lineer olmayan dinamikler çerçevesinde modelleyen özgün çalışmalardan biridir. Goodwin (1967), kapitalist bir ekonomide devrevi dalgalanmaların içsel niteliğini, biyolojik yaşam formları arasındaki sembiyotik ilişkileri modelleyen Lotka-Volterra avcı-av lineer olmayan diferansiyel denklem sisteminin yardımıyla açıklamaya çalışmıştır. Kapitalist üretim sürecinde emek ve sermaye sınıfları arasındaki mücadele, diğer bir ifadeyle karşılıklı bağımlılık ilişkisinin iç çelişkileri devrevi dalgalanmaları meydana getirmektedir. Bu çalışmada modelin geçerliliği Türkiye ekonomisinde 1987:1-2004:4 kapsayan dönem için test edilmiştir. Çalışmada, uzun dönemde değişkenler arasındaki dinamik ilişkileri analiz etmeye yarayan Yapısal Vektör Otoregresyon yönteminden yararlanılmıştır. Yöntemin araçları olan etki-tepki fonksiyonları ve tahmin hata varyans ayırıştırması sonuçlarına göre ele alınan dönem için Goodwin modeli-

nin açıklayıcılığı oldukça zayıftır. Grafik 3 ve Grafik 4'teki çevrimsel yapının sönümlü olması modelin temel savına ters düşmektedir. Zira, Goodwin'in büyüme çevrimleri sürekli bir dalgalanma modelidir.

#### KAYNAKÇA

BARBOSA-FILHO, N.H., and L. TAYLOR; (2006), "Distributive and Demand Cycles in the US Economy- A Structuralist Goodwin Model", *Metroeconomica*, 57(3), ss. 389-411.

BERNANKE, B.; (1986), "Alternative Explanations of the Money-Income Correlation", *NBER Working Paper Series*, No: 1842.

BHADURI, A., S. MARGLIN; (1990), "Unemployment And The Real Wage: The Economic Basis for Contesting Political Ideologies", *Cambridge Journal of Economics*, 14(4), ss. 375-393.

BOWLES, S., and R. BOYER; (1995), "Wages, Aggregate Demand, and Employment in an Open Economy,: An Emprical Investigation" iç. G.A. EPSTEIN and H.M. GINTIS (Ed.), *Macroeconomic Policy After The Conservative Era*, Cambridge University Press, Cambridge, ss. 143-174.

BREITUNG, JÖRG., vd.; (2004), "Structural Vector Autoregressive Modeling and Impulse Responses", iç. HELMUT LÜTKEPOHL and MARKUS KRÄTZIG (Ed.), *Applied Time Series Econometrics*, Cambridge University Press, New York, 323s.

DAVIDSON, R., and J. MACKINNON, (1993), *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press, London, 896s.

DESAI, M.; (1973), " Growth Cycles and Inflation in a Model of the Class Cycle", *Journal of Economic Theory*, 6(6), ss. 527-545.

ENDERS, WALTER; 2004, *Applied Econometric Time Series*, Second edition, John Wiley & Sons, New York, 460s.

FREDERICK, van der PLOEG; (1983), "Economic Growth and Conflict Over the Distribution of Income", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 6, ss. 253-279.

FREDERICK, van der PLOEG; (1987), " Growth Cycles, Induced Technical Change, and Perpetual Conflict over the Distribution of Income", *Journal of Macroeconomics*, Cilt 9(1), ss. 1-12.

FRISCH, RAGNAR; (1933), "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics" iç. *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*, George Allen & Unwin, London, ss.171-205.

GLOMBOWSKI, J., and M. KRÜGER; (1983), "Unemployment Insurance and Cyclical Growth", iç. R.M. GOODWIN, M. KRÜGER, and A. VERCELLI (Ed.), *Nonlinear Models of Fluctuating Growth*, An International Symposium, Siena, Italy, March, ss. 25-46.

GOODWIN, R.M.; (1967), "A Growth Cycle", iç. C.H. FEINSTEIN (Ed.), *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge University Press, Cambridge, ss. 54-58.

GORDON, D.; (1995), "Growth, Distribution and the Rules of the Game: Social Structuralist Macro Foundations for a Democratic Economic Policy", iç. G.A. EPSTEIN and H.M. GINTIS (Ed.), *Macroeconomic Policy After The Conservative Era*, Cambridge University Press, Cambridge, ss. 335-383.

HARVIE, D.; (2000), "Testing Goodwin: Growth Cycles in Ten OECD Countries", *Cambridge Journal of Economics*, 24(3), ss. 349-376.

HIRSCH, MORRIS W., STEPHEN SMALE, and ROBERT L. DEVANEY; (2004), *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier Academic Press, New York, 417s.

JR, ROBERT E. LUCAS; (1975), "An Equilibrium Model of the Business Cycle", *Journal of Political Economy*, 83(6), ss. 1113-1144.

KYDLAND, F.E., and E.C. PRESCOTT; (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50(6), ss. 1345-1370.

LORENZ, HANS-WALTER; (1993), *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 319s.

LOTKA, A.J.; (1925), **Elements of Physical Biology**, Williams & Wilkins Co., Baltimore.

MANFREDI, PIERO and LUCIANO FANTI, (2004), "Cycles in Dynamic Economic Modelling", **Economic Modelling**, 21(3), ss. 573-594.

NAASTEPAD, C.W.N.; (2006), "Technology, Demand and Distribution: A Cumulative Growth Model with an Application to the Dutch Productivity Growth Slowdown", **Cambridge Journal of Economics**, 30(3), ss. 403-434.

NAASTEPAD, C.W.N and S. STORM, (2007), "OECD Demand Regimes", **Journal of Post Keynesian Economics**, 29(2), ss. 211-246.

NELSON, C., and C. PLOSSER; (1982), "Trends and Random Walks in Macro Economic Time Series: Some Evidence and Implications", **Journal of Monetary Economics**, 10(2), ss. 139-162.

PANTULA, SASTRY G.; 1989, "Testing for Unit Roots in Time Series Data **Econometric Theory**, 5(2), ss. 256-271.

SAPHIRO, M. and M.W. WATSON; (1986), "Sources of Business Cycle Fluctuations", **NBER Macroeconomics Annual**, 3, ss. 111-156.

SATO, Y; (1985), "Marx-Goodwin Growth Cycle in a Two Sector Economy", **Journal of Economics**, 45(1), ss.21-34.

SHAH, A., and MEGHNAD DESAI; (1981), "Growth Cycles with Induced Technical Change", **The Economic Journal**, 91(364), No: 364, ss. 1006-1010.

SIMS, C.A.; (1980), "Macroeconomics and Reality", **Econometrica**, 48(1), ss.1-49.

SIMS, C.A.; (1981), "An Autoregressive Index Model for the U.S. 1948-1975", iç. J. KMENTA, J.B. RAMSEY, (Ed.), **Large Scale Macro- Econometric Models**, North- Holland, Amsterdam.

SIMS, C.A.; (1986), "Are Forecasting Models Usable for Policy Analysis?", **Quarterly Review**, Federal Reserve Bank of Minneapolis, 10, ss. 3-16.

SPORTELLI, MARIO C.; (1995), "A Kolmogoroff Generalized Predator-Prey Model of Goodwin's Growth Cycle", **Journal of Economics**, 61(1), ss. 35-64.

SLUTSKY, EUGEN; (1937), "The Summation of Random Causes As The Source of Cyclic Processes", **Econometrica**, 5(2), ss.105-146.

VELUPILLAI, KUMARASWAMY; (1979), "Some Stability Properties of Goodwin's Growth Cycle", **Journal of Economics**, 39(3-4), ss. 245-257.

VOLTERRA, V.; (1926), "Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi", Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei, 6(2) (Çevrimiçi): <http://www.jmulti.de> Erişim Tarihi: 25.06.2011

### İSPAT: LOTKA-VOLTERRA DENKLEM SİSTEMİNİN LYAPUNOV ANLAMINDA KARARLILIĞI

#### Teorem:

$X^*$ , bir diferansiyel denklem sisteminin sabit noktası ve  $L(X): U \rightarrow \mathcal{R}$ ,  $U$  açık kümesi üzerinde tanımlanan ve  $W$  komşuluğunda,  $U \subset W \subset \mathcal{R}^n$ , türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer,

$$i) L(X^*) = 0 \text{ ve } X \neq X^* \text{ için } L(X) > 0,$$

$$ii) U - \{X^*\} \text{ açık kümesinde,}$$

$$dL(X)/dt \leq 0 \text{ ise,}$$

$X^*$  kararlıdır.  $L(X)$  ise Lyapunov fonksiyonudur. (Lorenz, 1993:34-35).

#### Çözüm:

$$\dot{x} = kx - axy \quad (1)$$

$$\dot{y} = -rx + bxy \quad (2)$$

Lotka Volterra diferansiyel denklem sistemini oluşturmaktadır. Sistemin sabit noktaları  $\dot{x} = 0$  için  $y^* = k/a$  ve  $\dot{y} = 0$  için  $x^* = r/b$  dir. Denklem (1), denklem (2)'ye bölünürse,

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{(k-ay)x}{(r-bx)y} \quad (3)$$

elde edilir. Denklem (3) aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$(r-bx)ydx = -(k-ay)xdy \Rightarrow (r-bx)ydx + (k-ay)xdy = 0 \quad (4)$$

Denklem (4),  $xy$ 'ye bölüldüğünde değişkenlerine ayrılabilir hale gelir.

$$(rx^{-1} - b)dx + (ky^{-1} - a)dy = 0 \quad (5)$$

Denklem (5)' in integrali alındığında,

$$\int (rx^{-1} - b)dx + \int (ky^{-1} - a)dy = r \ln x - bx + k \ln y - ay = F(x, y) \quad (6)$$

elde edilir. Sabit noktalar denklem (6)'nın türevinde yerine konduğunda,

$$\left( \frac{dF}{dt} \right)_{\substack{x=x^* \\ y=y^*}} = \frac{r}{x^*} - b + \frac{k}{y^*} - a = 0 \text{ olduğu ka-}$$

nitlanır.  $F(x, y) = r \ln x - bx + k \ln y - ay$ , Lotka-Volterra diferansiyel denklem sistemi için Lyapunov fonksiyonudur. Goodwin modeli için sabit noktalar Lyapunov anlamında kararlıdır.