Sosyal Bilimler Dergisi 2011, (2), 108-111

KISMİ SIRALI HAUSDORFF UZAYLARINDA FAYDA FONKSİYONLARININ VARLIĞI

Murat BEŞER*

ÖZET

Klasik mikro iktisadi analizin temel konularından biri, bireye ait kısmi sıralı seçim kümesinde, ilgili sıralamayı koruyan ve kesin artan özel bir fonksiyon olan fayda fonksiyonlarının varlığını araştırmaktır. Bu fonksiyonların yardımıyla, bireye ait fayda düzeyi ifade edilmekte ve çeşitli kısıtlar altında bireyin optimal refah düzeyinde olup olmadığı gözlenebilmektedir. Tüm bu analizler ise $\mathbb{R}^n$ 'de tanımlı standart topoloji üzerinde gerçekleştirilir. Bu çalışmada ilgili analiz daha genel bir topolojik uzay olan Hausdorff uzaylarına genişletilmiş ve bu uzaylarda fayda fonksiyonlarının varlığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fayda fonksiyonu, kısmi sıralı topolojik uzay , Hausdorff uzayı

ABSTRACT

THE EXISTENCE OF UTILITY FUNCTIONS FOR PARTIALLY ORDERED HAUSDORFF SPACES

One of the themes of classical micro economical analysis is to study the existence of utility functions which are order preserved and strictly increasing special functions for partially ordered individual's choice set. With the help of these functions it is possible to express individual's utility level and to observe whether an individual is in optimal welfare level under various constraints. All these analyses are performed based on standard topology defined in $\mathbb{R}^n$. In this study the mentioned analysis is expanded to a broader topological space, Hausdorff spaces, and the existence of utility functions in Hausdorff spaces is pointed out.

Keywords: Utility function, partially ordered topological space, Hausdorff space

* Araştırma Görevlisi, İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi İktisat Bölümü İktisat Politikası A.B.D.

Matematik biliminin temel amaçlarından biri, üzerinde çalışılan matematiksel yapıları daha geniş, kapsayıcı matematiksel yapılara genişletmek ve bu genişletilmiş yapılar üzerinde çalışarak genel matematiksel sonuçlar elde etmektir. Bu sayede genel yapılar için elde edilmiş sonuçlar, özel durumlar içinde geçerlilik kazanacaktır. Klasik iktisadi analizin üzerinde çalıştığı $\mathbb{R}^n$ 'de tanımlı standart topoloji, Hausdorff uzaylarının özel bir alt kümesini teşkil ettiğinden, metriklik özelliğinden bağımsız olarak Hausdorff uzayları üzerinde hangi karakteristik özelliklerin fayda fonksiyonlarının varlığını garanti altına alacağı gösterilebilirse, $\mathbb{R}^n$ 'de üzerindeki standart topoloji tanımlı fayda fonksiyonlarının varlıkları için gerekli koşularda gösterilmiş olacaktır. İlgili çalışmada bu özellikler gösterilmiş ve konu ile ilgili yeni bir ispat verilmiştir.

Konu ile ilgili çalışmalar Eilenberg'in (1941) yılında yayımlamış olduğu sıralı topolojik uzaylar ile ilgili makalesine dayanmaktadır. L.E. Ward (1954) yılında ki makalesinde yansımalı ve geçişkenlik özelliklerine sahip topolojik uzayları incelemiştir. Debreu (1954) ve (1956) tarihli çalışmalarında kısmi sıralı topolojik uzaylarda fayda fonksiyonlarının varlığına dair gerekli ve yeterli koşulları göstermiştir, (1964) yılına ait makalesinde alt ve üst kısmi sıralı topolojik uzaylar için alt yarı sürekli ve üst yarı sürekli fayda fonksiyonlarının varlığını göstermiştir. Monterio (1987) yılına ait çalışmasında tüketim kümesinin sonlu boyuttan sonsuz boyuta genişlemesi durumunda fayda fonksiyonlarının varlığını ispatlamıştır. Herden (1989) yılında kısmi sıralı keyfi topolojik uzaylarda fayda fonksiyonlarının varlığına dair gerekli ve yeterli şartları vermiştir.

Tanım 1 : X , bağlantılı bir topolojik uzay ve bu uzay üzerinde $<$ şeklinde verilmiş bir sıralama bağıntısı varsa, X , sıralama bağıntısı ile donatılmış topolojik uzay olarak adlandırılır ve aşağıdaki şartları sağlar:

- $\forall x, y \in X$ için $x < y$, $x > y$ veya $x = y$ şartlarından biri geçerlidir.
- $x, y, z \in X$ için $x < y$ ve $y < z$ için $x < z$ geçerlidir.
- $x, y \in X$ ve $x < y$ için x 'in öyle bir U_x ve y 'nin öyle bir V_y açık komşuluğu vardır

ki, $x' \in U_x$ ve $y' \in V_y$ için $x < y'$ ve $x' < y$ sağlanır.

Tanım 2 : $x \in X$ elemanı için $P(x) = \{y \in X : y < x\}$ ve $T(x) = \{y \in X : y > x\}$ şeklinde tanımlanan alt kümeler $X \backslash x = P(x) \cup T(x)$, $P(x) \cap T(x) \neq \varnothing$ şartlarını sağlar ve bu kümeler X bağlantılı topolojik uzayında açık kümelerdir.

Lemma 1 : Her sıralı bağlantılı X uzayı Hausdorff uzayıdır.

İspat : $x < y$ için $x < z < y$ olacak şekilde bir z elemanı varsa $x \in P(z)$ ve $y \in T(z)$ açık komşuluklarının kesişimleri boş kümedir.

Eğer iki nokta arasında z gibi bir nokta yoksa $P(y) \cap T(x) \neq \varnothing$ ve her iki alt küme de açıktır.

$\Delta = \{(x, y) : x, y \in X, x = y\}$ X kümesinin kendisi ile Kartezyen çarpımın diagonal alt kümesidir.

Teorem 1 : X bağlantılı bir topolojik uzay için, $X \times X \setminus \Delta$ alt kümesi bağlantılı değil ise X uzayı sıralıdır.

İspat: Kısalık açısından $\Gamma(X) = X \times X \setminus \Delta$ yazalım, X uzayı sıralı için $A(X) \subset \Gamma(X)$ alt kümesini (x, y) sıralı ikilileri için $x < y$ şartını sağlasın, aynı şekilde $B(X) \subset \Gamma(X)$ alt kümesini (x, y) sıralı ikilileri için $y < x$ şartını sağlasın. Tanım 2'den $\Gamma(X) = A(X) \cup B(X)$ ve $A(X) \cap B(X) \neq \varnothing$ sağlanır ki buradan da ilgili kümelerin açık olduğu ortaya çıkar, buradan da $\Gamma(X)$ bağlantılı değildir.

$\Gamma(X)$ üzerinden kendine giden bir homeomorfizma fonksiyonunu $\varphi(x, y) = (y, x)$ sağlayacak şekilde tanımlayabiliriz. Böylelikle $\Gamma(X) = A(X) \cup B(X)$ için φ homeomorfizmamız $A(X)$ kümesini $B(X)$ kümesine dönüştürecektir. Sıralama bağıntısını da $A(X)$ kümesi üzerinde $(x, y) \in A(X)$ için $x < y$ sağlayacak şekilde kurabiliriz. Böylelikle Tanım 1'deki şartlar sağlanmış olacaktır ki bu da X uzayının sıralılığını verir.

Lemma 2 : X ve Y sıralı bağlantılı uzay olsun, bu uzaylar arasında tanımlanan her bire-bir fonksiyon ya sıralamayı korur ya da sıralamayı tersine çevirir.

İspat: Bu iki uzay arasındaki fonksiyonu ϕ ile gösterelim ve $(x,y)\in\Gamma(X)$ için $\psi(x,y)=(\phi(x),\phi(y))$ fonksiyonu $\Gamma(X)$'den $\Gamma(Y)$'ye giden bire-bir ve sürekli fonksiyondur, teorem 1'den hareketle $\psi(A(X))=A(Y)$ veya $\psi(A(X))=B(Y)$ şartı gerçekleşir.

Tanım 3 : X topolojik uzayı üzerinde yansıma, geçişkenlik ve anti-simetrik özelliğine sahip $\prec$ bağıntısı varsa, X, kısmi sıralama ile donatılmış topolojik uzay olarak adlandırılır.

Lemma 3: Kısmi sıralı topolojik uzay Frechet uzayıdır, eğer kısmi sıralama sürekli ise Hausdorff uzayı olacaktır.

İspat: Süreklilik yapısı X topolojik uzayı üzerinde bağlantılı olma şartını sağlayacaktır. Lemma 1'den X topolojik uzayı Hausdorff uzayıdır.

X kısmi sıralı topolojik uzay, $x\in X$ için $L(x)=\{y\in X : x$ “ $y, x\in X\}$ ve $M(x)=\{y\in X : y$ “ $x, x\in X\}$ kümeleri sırası ile x elemanının önceleyenleri ve ardılları kümeleridir ve her iki küme de kapalıdır. X kısmi sıralama ile donatılmış topolojik uzay ve $a \ldots b$ $(b \ldots a)$ için $x\in U_a$ şeklinde a'nın açık komşuluğunda tanımlanan her eleman $x \ldots b$ $(b \ldots x)$ şartını sağlıyorsa bu kısmi sıralamaya alt yarı-sürekli (üst yarı-sürekli) denir. Eğer hem üst hem de alt yarı-sürekli ise kısmi sıralama yarı süreklidir.

Lemma 4: Kısmi sıralı topolojik uzayda her maksimal zincir kapalı kümedir.

İspat: Kısmi sıralı topolojik uzay içinde C, maksimal bir zincir olsun. Bu durumda $C=\bigcap\{L(x)\bigcup M(x) : x\in C\}$ eşitliği açıktır ve yarı süreklilikten hareketle, bu maksimal zincir kapalıdır.

Teorem 2: Alt yarı-sürekli (üst yarı-sürekli) kısmi sıralama ile donatılmış kompakt Z uzayı minimal (maksimal) elemana sahiptir.

İspat: İlgili ispatı üst yarı-sürekli durum için yapalım. $\mathrm{M} =\{M(x) x\in X\}$, tümleyenleri kapsama bağıntısı ile tanımlanmış kısmi sıralı kümedir. $\mathrm{L}\subset\mathrm{M}$ bu kısmi sıralama içinde maksimal zincir olsun. Lemma 4'den her $M(x)$ kapalı olduğu ve Z uzayı da kompakt olduğundan $\bigcap\{M(x) : M(x)\in \mathrm{L}\}=x^*$ tek bir nokta vardır. L maksimal zincir olmasından x^* noktası maksimaldir.

Yukarıdaki çıkarsamalardan hareketle X uzayı üzerinde her x “ y için $u(x)\geq u(y)$ şartını sağlayacak reel değerli fayda fonksiyonunun varlığını göstermek için ek olarak topolojik uzayımızın ikinci sayılabilir uzay olması gerekir.

Teorem 3 : X kompakt, 2. sayılabilir Hausdorff uzayı ve üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlansın. $M(x)=\{y\in X : y$ “ $x, x\in X\}$ kümesi her $x\in X$ için kapalı ise y “ x için $u(y)\geq u(x)$ şartını sağlayan reel değerli fayda fonksiyonu bulunur.

İspat : X, 2. sayılabilir Hausdorff uzayı olduğundan sayılabilir tabanı vardır, bu tabanları $O_i : i\in\Lambda$ ile indisleyelim. $L(x)$ ” $\{x\}$ açık küme olması lemma 3'den hareketle elde edilir. $\Lambda'\subset\Lambda$ için $L(x)$ ” $\{x\}=\bigcup_{j\in\Lambda'\subset\Lambda} O_j$ şeklindedir. $\wp(x)$, $L(x)$ ” $\{x\}$ tarafından içerilen açık kümelerin sayısıdır.

$\{O_i\}_{i\in\Lambda}$ açık kümeleri X topolojik uzayının açık örtüsü olduğundan, bu açık kümeler üzerinde tanımlı düzgün bir fonksiyon ailesi $\{\varphi_i\}_{i\in\Lambda}$, $\Theta(\varphi_i)=cl(\{x\in X : \varphi_i(x)\neq 0\})\subset O_i$, ve her $x\in X$, $i\in\Lambda$ için $\varphi_i(x)\geq 0$ ve $\{\varphi_j\}_{j\neq i}(x)=0$ şartını sağlayacak şekilde bulunabilir. $\wp(x)=\bigcup_{j\in\Lambda'\subset\Lambda} O_j$ için $u(x)=\sum_{j\in\Lambda'\subset\Lambda}\max\{\varphi_j(y) : y\in O_j\}$ fonksiyonu artan niteliklidir ve $\wp(z) \subset \wp(x)$ için $u(z) \leq u(x)$ elde edilir.

Diğer taraftan $u(z) \leq u(x)$ varsayımı altında lemma 2'den ya z “ x ya da x “ z sağlanacaktır, böylelikle ya $\left(L(x)'' \{x\}\right) \subset \left(L(z)'' \{z\}\right)$ ya da $\left(L(z)'' \{z\}\right) \subset \left(L(x)'' \{x\}\right)$ geçerli olacaktır. Fayda fonksiyonları sıralamayı koruduğundan dolayı $\left(L(z)'' \{z\}\right) \subset \left(L(x)'' \{x\}\right)$ geçerli olacaktır. Böylelikle x “ z elde edilir.

SONUÇ

Bu çalışmada kısmi sıralama bağıntısı ile donatılmış topolojik uzayların tanımı verilmiş, daha sonra çalışmada araştırılan reel değerli fayda fonksiyonunun Hausdorff uzayları üzerinde tanımlanabilmesi için bu uzaylara ek olarak kompaktlık ve 2. sayılabilirlik özellikleri eklenmiştir. Bu özellikler yardımı ile teorem 3'te ilgili reel değerli fayda fonksiyonunun varlığı gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

1.Debreu, Gerard (1954). “Representation of Preference Ordering by Numerical Function”, Decision Processes, ed. R.M. Thrall, C.H. Coombs, R.L. Davis, Wiley, New York

2.Debreu, Gerard (1959). *Theory of Value*. Wiley, New York.

3.Debreu, Gerard (1964). “Continuity Properties of Paretian Utility”, *International Economic Review*, Vol. 5, No. 3, s.285–293.

4.Eilenberg, Samuel (1941). “Ordered Topological Spaces”, *American Journal of Mathematics*, Vol. 63, s. 39–45.

5.Herden, G. (1989). “On the Existence of Utility Functions”, Mathematical Social Sciences, Vol.17, No.3, s.297–313

6.Monteiro, paulo Klinger (1987). “ Some Results on the Existence of Utility Functions on Path Connected Spaces”, Journal of Mathematical Economics, Vol.16, no.2, s.147–156

7.Peleg, Bezalel (1970). “Utility Functions for Partially Ordered Topological Spaces”, *Econometrica*, Vol. 38, No.1, s. 93–96.

8.Rader, Trout (1963). “The Existence of a Utility Function to Represent Preferences”, *The Review of Economic Studies*, s. 229–232.

9. Ward, L. E. (1954). “Partially Ordered Topological Spaces”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 5, No. 1, s. 144–161.