En Küçük Kareler Ve Toplam En Küçük Kareler Yöntemleri İle Deformasyon Analizi

Mustafa ACAR[1],Tevfik AYAN[2], Orhan AKYILMAZ[2]

Özet

Bu çalışmada, Toplam En Küçük Kareler (TEKK) yönteminin deformasyon analizinde uygulanması, elde edilen sonuçların En Küçük Kareler(EKK) yöntemi ile deformasyon analiz sonuçları ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. Bu nedenle Büyükçekmece-Gürpınar heyelan bölgesinde Ekim 1997 ve Mart 1998'de gerçekleştirilen GPS gözlemleri değerlendirilmiş, bölgede meydana gelen deformasyonlar hem EKK hem de TEKK yöntemi ile analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Sözcükler
Deformasyon analizi, Heyelan, Dönüşüm, En Küçük Kareler, GPS/GNSS, Toplam En Küçük Kareler

Abstract

Deformation Analysis With Least Squares And Total Least Squares Methods

In this study, application of Total Least Squares (TLS) method in deformation analysis and comparison of its results with the Least Squares (LS) method was aimed. In this context, GPS observations collected in a landslide area nearby Büyükçekmece-Gürpinar landslide region in October 1997 and in March 1998 were processed. The deformations that took place in the region were then analysed by both LS and TLS methods and the results were interpreted.

Key Words
Deformation analysis, Landslide, Transformation, Least squares, GPS/GNSS, Total least squares

1. Giriş

Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliğinde, deformasyon analizi çalışmalarında yaygın olarak, parametre kestirimi, koordinat dönüşümleri ve çoğunlukla ikisi birden iç içe kullanılır. Ayrıca deformasyon analizinin bir diğer olmazsa olmazı matematik istatistik testlerdir (ACAR 2009).

Jeodezide en eski ve en yaygın bir biçimde kullanılmakta olan En Küçük Kareler (EKK) kestirimi, deformasyon analizinde de kullanılmaktadır. EKK, bilinmeyen parametreler ve gözlemler arasındaki fonksiyonel ilişkiyi gösteren fonksiyonel model ve gözlemler arasındaki bağıl doğrulukları temsil eden stokastik modelden meydana gelmektedir. Bazı durumlarda, örneğin koordinat dönüşümünde, hem gözlem vektörü hem de dizayn matrisinin bazı elemanları stokastik özellikler taşır. Klasik EKK yaklaşımında bu genellikle göz ardı edilir ve bu durum çözüm sonuçları içinde bir belirsizlik olarak kalır. 1980'li yıllarda, EKK kestirim yönteminin bir eksiğini gidermek üzere ortaya atılan ve Toplam En Küçük Kareler (TEKK) adı verilen kestirim yöntemi ile hem gözlemler hem de katsayılar matrisinin tamamı ya da bir parçası stokastik bileşen olarak alınabilir. TEKK yöntemi, ölçülerin yanında dizayn matrisi elemanlarının tümünün ya da bir bölümünün hata içerdiği problemlerin çözümü için önerilmiş yeni bir yöntemdir (ACAR 2009, AKYILMAZ vd. 2007).

Bu çalışmada, TEKK yönteminin deformasyon analizinde uygulanması ve EKK ile karşılaştırılması amaçlanmıştır. Büyükçekmece-Gürpınar heyelan bölgesinde Ekim 1997 ve Mart 1998'de gerçekleştirilen GPS gözlemleri değerlendirilmiş, bölgede meydana gelen deformasyonlar hem EKK hem de TEKK yöntemi ile analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar yorumlanmıştır.

2. Dönüşüm

2.1 Üç boyutlu Helmert (benzerlik) dönüşümü

Bir A koordinat sistemi x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai} de koordinatları bilinen bir noktanın ya da noktalar kümesinin, bir başka B koordinat sistemindeki koordinatları X_{Bi}, Y_{Bi}, Z_{Bi} hesaplanmasını sağlayan parametrelerin bulunması ve bunlarla yeni sistemdeki koordinatların hesaplanması jeodezide koordinat dönüşümü olarak bilinir. Bir koordinat sistemindeki noktaların oluşturduğu şeklin geometrisinin benzerlik ilkelerine uygun olarak, diğer sisteme aktarılması Benzerlik dönüşümü veya Helmert dönüşümü olarak anılır. Üç Boyutlu (3B) koordinat dönüşümü, yedi parametreli benzerlik dönüşümü olarak da bilinir. Benzerlik dönüşümünde dönüştürülmüş koordinatların hesabı

$$\begin{bmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} + (1+k)\boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \qquad (1)$$

ile verilir (LEICK 1995). Burada, $(1+k)$ ölçek faktörü, (t_x, t_y, t_z) öteleme parametreleri, $\boldsymbol{R}$ ise x, y, z eksenleri doğrultusundaki ortogonal dönüklük matrisidir.

$\boldsymbol{x} = [\,t_x \quad t_y \quad t_z \quad (1+k) \quad R_x \quad R_y \quad R_z\,]$ ile gösterilen dönüşüm parametreleri vektörünün EKK ve TEKK yöntemleri ile nasıl hesaplandığı sonraki bölümlerde ayrıntılı bir şekilde anlatılacaktır.

2.2 Üç boyutlu dönüşümde hata yayılması

Deformasyon ölçülerinin değerlendirilmesinde her periyot ölçüleri birbirinden bağımsız olarak kendi içinde serbest ağ

[1] Aksaray Üniversitesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Bölümü, Aksaray
[2] İstanbul Teknik Üniversitesi, Geomatik Müh. Bölümü, İstanbul

olarak dengelenir. Her periyot ölçülerinde ağın datum parametreleri dengeleme hesabı içinde belirlendiğinden datum parametreleride hem ölçülerin hem de yaklaşık koordinatların bir fonksiyonu olur. Bu nedenle iki farklı periyot ölçüsünden elde edilen koordinatlar doğrudan doğruya birbiri ile karşılaştırılamaz. Periyotlar arasındaki datum birliği koordinat dönüşümü ile sağlanır. Koordinat dönüşümü ile deformasyon analizinin yapılabilmesi için serbest ağ dengelemesi sonunda elde edilen noktalara ait koordinat bilgileri yanında varyans-kovaryans matrisleri arasında da datum birliğinin sağlanması gerekir.

Bilindiği gibi, üç boyutlu dönüşüm kartezyen koordinatlar üzerinden gerçekleştirilir. Koordinatlar, Bursa-Wolf ya da Molodensky-Badekas modellerinden herhangi biriyle ikinci bir koordinat sistemine dönüştürülmek istenirse (1) denkleminin fonksiyonel modeli

$$\boldsymbol{l_B} = \boldsymbol{t} + \overline{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{l_A} \tag{2}$$

olacaktır. Burada $\overline{\boldsymbol{R}}$, $\boldsymbol{R}$ rotasyon matrisini ve $(1+k)$ ölçek faktörünü göstermek üzere $\overline{\boldsymbol{R}} = (1+k)\boldsymbol{R}$ anlamındadır. Ayrıca, (2) eşitliğindeki $\boldsymbol{l_B}$ ve $\boldsymbol{l_A}$ sırasıyla B ve A kartezyen koordinat sistemindeki konum vektörleridir. Hata analizi için eğer dönüşüm parametrelerinin doğruluğu hakkında herhangi bir bilgi yoksa, sadece koordinat bilinmeyenleri değişken olarak alınır, dönüşüm parametreleri sabit kabul edilir. Buna göre (2) eşitliğine $1+k \cong 1$ kabul edilerek hata yayılma yasası uygulanırsa;

$$\boldsymbol{dl_B} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{dl_A} \tag{3}$$

ve,

$$\boldsymbol{K_{l_B l_B}} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{K_{l_A l_A}}\,\boldsymbol{R^T} \tag{4}$$

elde edilir. Dönüşüm parametreleri, $\boldsymbol{x} = [\,t_x \;\; t_y \;\; t_z \;\; (1+k) \;\; R_x \;\; R_y \;\; R_z\,]$ varyans-kovaryans matrisine de yansıtılmak istenirse

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A_{oA}^T A_{oA}})^{-1}\boldsymbol{A_{oA}^T l'} \tag{5}$$

ile, hata yayılma yasası uygulanarak, bilinmeyenlerin varyans-kovaryans matrisi

$$\boldsymbol{dx} = (\boldsymbol{A_{oA}^T A_{oA}})^{-1}\boldsymbol{A_{oA}^T}\,\boldsymbol{dl_{oA}} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{K_{xx}} = \boldsymbol{Q_{xx} A_{oA}^T K_{l_{oA} l_{oA}} A_{oA} Q_{xx}} \tag{7}$$

elde edilir. (3) eşitliğinde hem koordinatlar hem de dönüşüm parametreleri değişken olarak kabul edilip hata yayılma yasası uygulanarak;

$$\boldsymbol{dl_B} = \begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{B_A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{dl_A}\\ \boldsymbol{dx}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K_{l_B l_B}} = \begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{R}} & \boldsymbol{B_A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K_{l_A l_A}} & \\ & \boldsymbol{K_{xx}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{R}}^T\\ \boldsymbol{B_A^T}\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{K_{l_B l_B}} = \overline{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{K_{l_A l_A}}\,\overline{\boldsymbol{R}}^T + \boldsymbol{B_A}\,\boldsymbol{K_{xx}}\,\boldsymbol{B_A^T} \tag{10}$$

eşitlikleri ile dönüştürülmüş varyans kovaryans matrisi elde edilir (KUTOĞLU 2004, KUTOĞLU 2001).

3. En Küçük Kareler Kestirimi İle Deformasyon Analizi

3.1 Gauss-Markoff Modeli

Rastlantısal büyüklükler olan ölçü değerlerinden, ölçülerin ve bilinmeyen parametrelerin ümit değere sadık kestirimlerinin elde edilmesi Gauss-Markoff modeli uygulamasıyla elde edilir. Bu modelde ölçülerle bilinmeyenler arasındaki lineer model, sadeleştirilmiş şekliyle,

$$\tilde{\ell} = \boldsymbol{A}\,\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\ell\ell} = \boldsymbol{\sigma}_0^2\,\boldsymbol{Q}_{\ell\ell} \tag{12}$$

ile ifade edilir. $\tilde{\ell}$ n sayıda ölçünün ümit değeri vektörünü, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ u sayıda bilinmeyenlerin ümit değer vektörü, $\boldsymbol{A}$ da katsayılar matrisidir. ℓ ölçülerinin varyans-kovaryans matrisi $\Sigma_{\ell\ell}$ ise $\tilde{\ell} = \ell + \boldsymbol{\varepsilon}$ ile tanımlanan raslantısal hataları ile

$$\Sigma_{\ell\ell} = E(\varepsilon\varepsilon^T) \tag{13}$$

olarak tanımlanmaktadır. σ_0^2 birim ölçünün varyansı, $Q_{\ell\ell}$

$$\boldsymbol{Q}_{\ell\ell} = \boldsymbol{P}^{-1} \tag{14}$$

ile ölçülerin ağırlık matrisinin tersi olan kofaktörler matrisidir. Gauss- Markoff modelinden ümit değere sadık kestirimler $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\ell}$ ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ gerçek hatalar yerine $\boldsymbol{v}$ düzeltmeleri konularak

$$\ell + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{x}} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_{xx}} = \hat{\sigma}_0^2\,\boldsymbol{Q}_{\ell\ell} \tag{16}$$

ile EKK yöntemiyle

$$\boldsymbol{v^T Q_{\ell\ell}^{-1} v} = min \tag{17}$$

ilkesiyle

$$\boldsymbol{A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A}\,\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{A^T Q_{\ell\ell}^{-1}}\,\ell = 0 \tag{18}$$

denkleminin çözümüyle

$$\hat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A^T Q_{\ell\ell}^{-1} A})^{-1}\,\boldsymbol{A^T Q_{\ell\ell}^{-1}}\,\ell \tag{19}$$

ile elde edilir. Buradan gözlemlerin düzeltmeleri,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \ell \tag{20}$$

bulunur (MIKHAIL ve ACKERMANN 1976).

3.2 Global uygunluk testi

Kontrol ağı t_1 ve t_2 zamanında yapılan ölçülerle ayrı ayrı serbest olarak dengelenirler. Jeodezik ağ noktalarının kampanyalar arasında hareket edip etmedikleri ve varsa hareket vektörlerinin belirlenmesi için koordinat bilinmeyenleri arasındaki farkların sıfır kabul edilip edilmeyeceğinin test edilmesi gerekir. Eğer kontrol ağı referans noktaları ve obje noktalarını kapsıyorsa, $\boldsymbol{x}$ parametreler vektörü referans noktaları $\boldsymbol{x}_r$, obje noktaları $\boldsymbol{x}_o$, olarak ikiye ayrılır. Referans noktalarının sabitliğinin araştırılması problemi sıfır hipotezinin test edilmesi ile çözülür. Ortaya konan bu hipotezle her iki kampanyada referans noktalarının sabit ve konumlarının değişmediği varsayılmaktadır. Referans noktalarının t_1 zamandaki koordinatları $\boldsymbol{x}_1^r$ ve t_2 zamandaki koordinatları $\boldsymbol{x}_2^r$ olmak üzere sıfır hipotezi

$$H_0 : E(\boldsymbol{x}_1^r) = E(\boldsymbol{x}_2^r) \qquad (21)$$

olur. Referans noktaları ile benzerlik dönüşümü gerçekleştirildikten sonra her iki ayrı serbest dengeleme sonuçlarından

$$\boldsymbol{d}_r = \boldsymbol{x}_1^r - \boldsymbol{x}_2^r \qquad (22)$$

$$(\boldsymbol{Q}_{dd})_r = (\boldsymbol{Q}_{rr})_1 + (\boldsymbol{Q}_{rr})_2 \qquad (23)$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{d}_r^T (\boldsymbol{Q}_{dd})_r^+ \boldsymbol{d}_r \qquad (24)$$

hesaplanır. Her bir serbest dengelemenin serbestlik dereceleri f_1 ve f_2 ve kestirilmiş birim ölçü varyansları s_{01} ve s_{02} ile

$$s_0^2 = \frac{f_1 s_{01}^2 + f_2 s_{02}^2}{f_1 + f_2} \qquad (25)$$

eşitliğinden hesaplanan bir ortak varyans değeri ile test büyüklüğü

$$T = \frac{R}{s_0^2 h_r} \qquad (26)$$

hesaplanır. T test büyüklüğü Fischer Dağılım tablosundan, F ile karşılaştırıldığında $T > F_{h_r, f, 1-\alpha}$ ise ağın referans noktaları bölümünde deformasyon vardır sonucuna varılır ve sıfır hipotezi reddedilir (DENLİ 2008). Bu durumda deformasyonların lokalizasyonu ve karesel formun ayrıştırılması adımına geçilir.

3.3 Deformasyon vektörlerinin bulunması ve lokalizasyon

Global uygunluk testi sonucu sıfır hipotezi reddedilir ve ağda Δt süresi içinde bir şekil değiştirme olduğu sonucuna varılırsa, hangi noktalardaki hareketlerin anlamlı olup olmadıkları test edilmesi gerekir. Bu işlem her nokta için ayrı ayrı (27) eşitliğindeki formüller yardımı ile gerçekleştiririlir. (27) eşitliğine göre her nokta için hesaplanan T test büyüklüğü, Fischer dağılımından, h_r, f ve s = 1-α =0.95 parametrelerine bağlı olarak alınan eşik değer ile karşılaştırılır.

$$\boldsymbol{d}_r = \boldsymbol{x}_1^i - \boldsymbol{x}_2^i \,;\; s_0^2 = \frac{f_1 s_{01}^2 + f_2 s_{02}^2}{f = f_1 + f_2}$$
$$T = \frac{\boldsymbol{d}_r^T (\boldsymbol{Q}_{dd})_r^+ \boldsymbol{d}_r}{s_0^2 h_r} \,;\; (\boldsymbol{Q}_{dd})_r = (\boldsymbol{Q}_{rr}^i)_1 + (\boldsymbol{Q}_{rr}^i)_2 \qquad (27)$$

Karşılaştırma bütün ağ noktaları için yapılır. Eğer $T > F_{h_r, f, 1-\alpha}$ ise bu noktadaki hareketin anlamlı olduğu sonucuna varılır. En büyük R(R=max.) değerine sahip olan nokta, global test sonucunda ortaya çıkan ağ deformasyonundan sorumlu tutulur ve bu nokta obje noktası kabul edilerek dengeleme hesabı, kalan noktaların datuma katkı vermesiyle kısmi iz *minimum* ilkesiyle yeniden gerçekleştirilerek global test tekrarlanır. Teste deformasyon noktası kalmayıncaya kadar devam edilerek ağın deformasyona uğrayan ve uğramayan noktaları belirlenir.

Global test sonucu ağdaki hareketsiz datum noktaları belirlendikten sonra, bu datum noktaları yardımıyla her iki ölçme kampanyası tekrar aynı datuma getirilir ve ağdaki her nokta için aşağıdaki deformasyon vektörü oluşturulur (EROL 2008).

Bir p noktası için hareket vektörü ve bu vektörün boyu,

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} x_i^1 - x_i^2 \\ y_i^1 - y_i^2 \\ z_i^1 - z_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \;;\; d = \sqrt{d^T d} \qquad (28)$$

ile belirlenir. Bu eşitliklerde hesaplanan hareket vektörlerinin anlamlı olup olmadıklarını test etmek için H_0 hipotezi aşağıdaki eşitliklikteki gibi kurulur.

$$H_0 : \boldsymbol{d} = 0 \qquad (29)$$

Test büyüklüğü,

$$T = \frac{\boldsymbol{d}^T \boldsymbol{Q}_{dd}^{-1} \boldsymbol{d}}{3 s_0^2} \qquad (30)$$

eşitliği ile hesaplanır. Bu test büyüklüğü Fischer dağılımından alınan $F_{3,\, f\,;1-\alpha}$ eşik değeri ile karşılaştırılır. Eğer $T > F_{3,\, f;\, 1-\alpha}$, ise p noktasının üç boyutlu konumundaki hareketin anlamlı olduğu sonucuna varılır, aksi durumda hareketin anlamlı olmadığı ve rastlantısal ölçü hatalarından kaynaklandığı kabul edilir (ACAR vd. 2008, EROL 2008, DENLİ 1998).

4. Toplam En Küçük Kareler Kestimi İle Deformasyon Analizi

4.1 Toplam en küçük kareler kestirimi ile 3B koordinat dönüşümü

TEKK kestirim yöntemi, Golub ve Van Loan tarafından ilk olarak 1980 yılında ortaya atılmış, hem gözlemlerin hem de katsayılar matrisinin elemanlarının hatalı olması durumundaki problemler için EKK yaklaşımına bir tamamlayıcı olarak sunulmuştur. Katsayılar matrisi elemanlarının hataları da raslantısal niteliktedir. Başka bir deyişle bunların ümit değerleri de sıfıra eşittir. Katsayılar matrisi elemanları ile ölçülerin varyansı aynı kabul edilir. TEKK'in fonksiyonel modeli aşağıdaki gibidir.

$$\ell + \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{V})\,\boldsymbol{x} \qquad \ell + \boldsymbol{v} = \tilde{\ell} \qquad (31)$$

$$\Sigma_{\ell\ell} = \Sigma_{AA} = \sigma_0^2 [I] \qquad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{V} = \tilde{\boldsymbol{A}} \qquad (32)$$

$\boldsymbol{V}$: katsayılar matrisi $\boldsymbol{A}$'nın elemanlarının nxm boyutlu hata matrisi

$\boldsymbol{v}$: gözlemlere ait nx1 boyutlu hata vektörüdür.

Bu konuya ait ayrıntılı bilgi (ACAR 2009, AKYILMAZ vd. 2007, ACAR vd. 2006, FELUS 2004, VAN HUFFEL 1991, VAN HUFFEL ve VANDEWALLE 1991)'den elde edilebilir.

TEKK yönteminde, $\boldsymbol{A}$ matrisinin bütün bileşenlerinin hatalı olduğu düşünülmesine rağmen, bazı durumda kimi sütunlar için hesabı gerekmeyen skaler katsayılar olabilir. Bu nedenle bu skaler değerlerin TEKK dengelemesi sonrasında değişmeden korunması gerekir. Geometrik koordinat dönüşümlerinde öteleme parametrelerine karşılık olan bilinmeyenlerin katsayıları bu durumun jeodezik uygulamalardaki örneklerinden biridir. Bu durumun hesaplara yansıtılması, $\boldsymbol{A}$ matrisinin ve bilinmeyen vektörü $\boldsymbol{x}$'in alt matrislere ayrılmasını gerektirir. Ayrıca dönüşüm hesabında, gözlemlerin ve katsayılar matrisinin sütun elemanlarının varyansları arasındaki farklar ihmal edilebilir, öyle ki onların aynı olduğu varsayılır. Genellikle gözlem vektörlerinin ve katsayılar matrisi bileşenlerinin varyans değerleri farklıdır. Aşağıda her iki durumunda göz önünde tutulduğu özel durum Genelleştirilmiş Toplam En Küçük Kareler (GTEKK) yönteminin modeli aşağıdaki şekilde yazılır.

$$\ell + \boldsymbol{v} = \left[\boldsymbol{A}_1;\ \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{V}_{A_2}\right]\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \hat{\boldsymbol{x}}_2\end{bmatrix} \quad (33)$$

$$iz\left(\left(\boldsymbol{D}\left[\boldsymbol{V}_{A_2}\,\middle|\,\boldsymbol{v}\right]\boldsymbol{C}\right)^T\left(\boldsymbol{D}\left[\boldsymbol{V}_{A_2}\,\middle|\,\boldsymbol{v}\right]\boldsymbol{C}\right)\right) = min \quad (34)$$

$$\boldsymbol{v} \approx N(0,\sigma_0^2,\boldsymbol{P}_1^{-1});\ \boldsymbol{V} \approx N(0,\sigma_0^2,\boldsymbol{P}_2^{-1}) \quad (35)$$

Burada $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}_1$ gözlemlerin ağırlıkları olmasına karşın, $\boldsymbol{P_2}$, $\boldsymbol{A_2}$ matrisinin yani dönüştürülen sistemdeki ortak noktaların koordinatlarının ağırlıklarıdır. $\boldsymbol{C}$ ise $\boldsymbol{A_2}$'nin sütunlarının ve de gözlem vektörünün birbirlerine göre olan bağıl doğruluklarını yansıtan köşegen ağırlık matrisidir ve eşitlik (36) ile hesaplanır.

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix}\frac{tr(P_2^{xyz})}{tr(D)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ & \frac{tr(P_2^{yz})}{tr(D)} & 0 & 0 & 0\\ & & \frac{tr(P_2^{xz})}{tr(D)} & 0 & 0\\ & & & \frac{tr(P_2^{xy})}{tr(D)} & 0\\ & & & & 1\end{bmatrix} \quad (36)$$

eşitlikte verilen ($\boldsymbol{P}_2^{xyz},\boldsymbol{P}_2^{yz},\boldsymbol{P}_2^{xz},\boldsymbol{P}_2^{xy}$) $\boldsymbol{P_2}$ matrisinin üst indisle belirtililen elemanlarına ilişkin alt matrislerdir. Ayrıca, (33) eşitliğinde verilen $\boldsymbol{A_1}$ ve $\boldsymbol{A_2}$ matrisleri $\boldsymbol{A}$ katsayılar matrisinin sabit ve sabit olmayan sütunlarından oluşan alt matrislerini, $\boldsymbol{x_1}$ ve $\boldsymbol{x_2}$ ise $\boldsymbol{A_1}$ ve $\boldsymbol{A_2}$ matrislerince kontrol edilen bilinmeyen vektörü $\boldsymbol{x}$'in bileşenleri olup (37) ve (38) nolu eşitliklerde görülmektedir.

$$\boldsymbol{A} = \left[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2\right];\ \boldsymbol{A}_1 \in R^{nxm_1}\ ve\ \boldsymbol{A}_2 \in R^{nxm_2} \quad (37)$$

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T];\ \boldsymbol{x}_1 \in R^{m_1x1}\ \boldsymbol{ve}\ \boldsymbol{x}_2 \in R^{m_2x1} \quad (38)$$

GTEKK çözümü ile bilinmeyenler vektörünün çözümü üç adımda gerçekleştirilir.

1-) $\boldsymbol{D}\left[\boldsymbol{A}_1; \boldsymbol{A}_2;\ \ell\right]$ genişletilmiş matrisi *QR* çarpanlarına ayrılarak;

$$\boldsymbol{Q}^T\ \boldsymbol{D}\left[\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \ell\right] = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} & \boldsymbol{R}_{1b}\\ 0 & \boldsymbol{R}_{22} & \boldsymbol{R}_{2b}\end{bmatrix} \quad (39)$$

$\boldsymbol{R}_{11}= m_1 x m_1$, $\boldsymbol{R}_{12}=m_1 x m_2$, $\boldsymbol{R}_{22}=(n-m_1) x m_2$, $\boldsymbol{R}_{1b}=m_1 x1$, $R_{2b}=(n-m_1)x1$ boyutlu eşitlik değerleri elde edilir.

2-) $\boldsymbol{x_2}$ değerini hesaplamak için (39) denkleminin $\boldsymbol{R}_{22}$, $\boldsymbol{R}_{2b}$ matrislerinden oluşan ikinci satırı kullanıldığında TEKK çözümü

$$\left[\boldsymbol{R}_{22}; \boldsymbol{R}_{2b}\right]\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_2\\ -1\end{bmatrix}\right) \approx 0 \quad (40)$$

olarak elde edilir. Bu denklem sistemini çözmek için $\boldsymbol{R}_{22}$, $\boldsymbol{R}_{2b}$ matrisleri ile $\boldsymbol{A_2}$'nin sütunlarının ve de gözlem vektörünün birbirlerine göre olan bağıl doğruluklarını gösteren $\boldsymbol{C}$ matrisinin çarpımı ile oluşan $\left[\boldsymbol{R}_{22}; \boldsymbol{R}_{2b}\right]\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}\,\boldsymbol{\Sigma}\,\boldsymbol{V}^T$ denkleminin tekil değer ayrıştırması hesaplanır ve

$$\hat{\boldsymbol{x}}_2 = -\frac{1}{c_{m_2+1}\cdot v_{m_2+1,m_2+1}} C_{1\ldots m_2}^T\left[v_{1,m+1}, v_{2,m+1}, \cdots, v_{m,m+1}\right]^T \quad (41)$$

eşitliği ile de eksenler etrafındaki dönüklükleri ve ölçek faktörünü içeren $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ değeri hesaplanılır.

3-) Öteleme parametrelerine karşılık gelen $\hat{\boldsymbol{x}}_1$ parametresi, ikinci adımda hesaplanan $\hat{\boldsymbol{x}}_2$ parametresinin (39) denkleminin ilk satırında yerine konularak ya da aşağıda verilen eşitliklerden biri kullanılarak hesaplanır:

$$\boldsymbol{R}_{11}\,\hat{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{R}_{1b} - \boldsymbol{R}_{12}\,\hat{\boldsymbol{x}}_2;\quad \hat{\boldsymbol{x}}_1 = \boldsymbol{R}_{11}^{-1}(\boldsymbol{R}_{1b} - \boldsymbol{R}_{12}\,\hat{\boldsymbol{x}}_2) \quad (42)$$

Hesaplanan $\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{x}_1^T, \boldsymbol{x}_2^T]$ dönüşüm parametresi değerleri ($\boldsymbol{x}$) kullanılarak x_A, y_A, z_A sistemindeki obje noktalarının koordinatları X_B, Y_B, Z_B koordinat sistemine transforme edilerek obje noktalarının koordinatları elde edilir (ACAR 2009, AKYILMAZ vd. 2007).

4.2 Deformasyon büyüklüklerinin belirlenmesi

Global test sonucunda ağda hareketsiz sabit noktaların belirlenmesinden sonra, bu sabit noktalar yardımıyla koordinat sistemleri arasında GTEKK yöntemi ile dönüşüm parametresi bilinmeyenleri $\boldsymbol{x}$ hesaplanır. Hesaplanan dönüşüm parametresi değerleri yardımı ile her iki ölçme kampanyası aynı datuma getirilir. Datum birliği sağlanan kontrol noktalarının, ağdaki herbir nokta için deformasyon vektörü oluşturulur. Aynı zamanda, dönüşüme hata yayılması uygulanması ile de dönüştürülmüş koordinatlara ait dönüştürülmüş varyans-kovaryans matrisi elde edilir. Son adım olarak ortak varyans değeri hesaplanır ve hipotez $H_0 : d = 0$ olarak kurulur ve (27) eşitliği ile her bir nokta analiz edilir.

5. Sayısal Uygulama

Bu çalışmanın konusu olan Büyükçekmece Gürpınar Köyü heyelan bölgesi, jeolojik süreçlerin hızla devam ettiği ve birçok araştırmaya konu olmuş bir bölgedir. Söz konusu alan Marmara Denizine hakim ve denizde biten bir yamaç olması nedeniyle hızla yapılaşmış ve yazlık evler inşa edilmiştir.

Bu çalışmada, bölgede heyelan nedeniyle meydana gelen zemin hareketlerini belirleyebilmek için gerçekleştirilen “GPS gözlemleri İle Zemin Hareketlerinin Saptanması” projesi kapsamındaki Ekim 1997 (I. Kampanya) ve Mart 1998 (II. Kampanya) GPS ölçme kampanyalarının verileri kullanılmıştır.

Teorik esasları bölüm 3’te verilen EKK kestirimi ile deformasyon analizi için öncelikle, kampanya değerlendirmeleri sonucunda elde edilen, II. kampanya koordinatları, I. kampanya koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Üç boyutlu koordinat dönüşümü Molodensky-Badekas yöntemiyle gerçekleştirilmiştir. Hesapta 102, 107, 109, 117, 120 ve 125 nolu noktalar özdeş noktalar olarak alınmıştır. Çünkü global test sonucu ağda deformasyon olduğu görülmüş ve bu altı nokta hareketsiz (stabil) nokta olarak öne çıkmıştır. Dönüşüm sonuçları, dönüşüm parametreleri Tablo1’de ve çakışma artıkları Tablo2’de verilmiştir.

Bölüm 3.3’te verilen (28)-(30) eşitliklerinin uygulanmasıyla elde edilen 3B deformasyon analizi sonuçları da Tablo 3’te verilmektedir. Burada birinci kampanyadan, ikinci ölçme kampanyasına kadar geçen süre içinde önemli, anlamlı (signifikant) zemin hareketleri görülmektedir.

Tablo 1: I. ve II. Kampanyalar arasında Benzerlik dönüşümü modelinin EKK çözümü ile belirlenen dönüşüm parametreleri

Parametre	Dönüşüm Parametresi Değerleri	Ort. Hata
t_x (m)	-0.0073	0.0015
t_y (m)	0.0043	0.0015
t_z (m)	-0.0054	0.0015
R_x (”)	-0.46276	1.27135
R_y (”)	1.78995	0.97181
R_z (”)	2.17190	1.57931
k (ppm)	4.0523	3.8138
s_o (m)	0.0036	

Tablo 2: I. ve II. Kampanyalar arasında dönüşüm sonucu elde edilen çakışma artıkları

Nokta No	d_X [m]	d_Y [m]	d_Z [m]
102	0.0002	-0.0004	0.0026
107	0.0029	-0.0037	-0.0021
109	-0.0011	-0.0017	0.0025
117	-0.0040	0.0049	0.0048
120	0.0013	0.0019	-0.0039
125	0.0007	-0.0010	-0.0039

Tablo 3’teki deformasyon analiz sonuçları irdelendiğinde deformasyon kanıtlanamayan 103, 119 nolu noktalardaki 1.70 ve 2.26 cm büyüklüğündeki koordinat farkları deformasyon olarak kanıtlanabilir olmamakla birlikte, dönüşümün çakışma artıklarıyla karşılaştırıldığında yine de büyük farklar olsa da bu noktalar stabil noktalar arasına katılarak analiz tekrarlanmamıştır.

Bu uygulamada TEKK ve EKK çözümü ile gerçekleştirilen deformasyon analiz sonuçlarının bir karşılaştırmasını yapabilmek için EKK yöntemi ile gerçekleştirilen global test sonucunda sabit olarak öne çıkan noktalar GTEKK çözümünde de sabit nokta olarak alınmıştır.

Deformasyon analizi teorik esasları bölüm 4’te verilen TEKK yöntemi ile deformasyon analizi için öncelikle, II. kampanya koordinatları, I. kampanya koordinat sistemine dönüştürülmüştür. Dönüşüm sonuçları, dönüşüm parametreleri Tablo 4’de ve çakışma artıkları Tablo 5’de verilmiştir. Elde edilen dönüşüm parametresi değerleri ve çakışma artıkları EKK yöntemi ile elde edilen değerlerden farklılık göstermektedir. Bu dönüşüm parametrelerine göre yapılan deformasyon analizi Tablo 6’da verilmektedir.

Tablo 3: I. ve II. Kampanyalar arasında Benzerlik dönüşümü modelinin EKK çözümü ile dönüştürülen obje noktalarının deformasyon analizi

Nokta No	d_X (cm)	d_Y (cm)	d_Z (cm)	d (cm)	Test Büyüklüğü	Fischer (0.95, 3, f)	Hipotez (d=0)
101	2.47	3.50	2.06	4.75	14.52	2.62	Geçersiz
103	0.68	0.17	1.55	1.70	0.73	2.62	***Geçerli***
105	4.10	-9.01	3.15	10.39	44.88	2.62	Geçersiz
108	-3.30	-7.78	-13.22	15.69	100.24	2.62	Geçersiz
110	2.71	-5.76	-7.41	9.77	82.55	2.62	Geçersiz
111	92.02	-87.08	-88.37	154.47	21361.87	2.62	Geçersiz
112	0.28	0.70	3.60	3.68	3.69	2.62	Geçersiz
113	316.87	-319.23	-175.62	482.86	173715.50	2.62	Geçersiz
114	121.48	-119.30	-114.03	204.92	29420.35	2.62	Geçersiz
116	62.29	-44.79	-21.97	79.81	3265.79	2.62	Geçersiz
119	0.58	0.39	2.15	2.26	1.09	2.62	***Geçerli***
121	5.05	-7.28	-6.55	11.02	84.38	2.62	Geçersiz
130	2.08	-9.28	-6.92	11.76	80.64	2.62	Geçersiz

Tablo 4: I. ve II. Kampanyalar arasında Benzerlik dönüşümü modelinin TEKK çözümü ile belirlenen dönüşüm parametreleri

Parametre	Dönüşüm Parametresi Değerleri
t_x (m)	-0.0074
t_y (m)	0.0049
t_z (m)	-0.0066
R_x (")	-0.21096
R_y (")	2.00675
R_z (")	2.71273
k (ppm)	0.2411
s_o (m)	0.0040

Tablo 5: I. ve II. Kampanyalar arasında dönüşüm sonucu elde edilen çakışma artıkları

Nokta No	d_X [m]	d_Y [m]	d_Z [m]
102	0.0006	-0.0005	0.0015
107	0.0034	-0.0034	-0.0037
109	-0.0010	0.0001	0.0001
117	-0.0052	0.0066	0.0039
120	0.0006	0.0003	-0.0028
125	0.0009	0.0008	-0.0064

Tablo 6'daki analiz sonuçları ile Tablo 3'teki analiz sonuçları karşılaştırıldığında, analizin sonucunu değiştirecek büyüklükte deformasyon büyüklüğü yoktur. EKK yöntemi ile gerçekleştirilen deformasyon analizi sonucunda deformasyon kanıtlanamayan 103 ve 119 numaralı noktalar bu analiz sonucunda da dayanak noktası olarak belirlenmiştir

Tablo 6: I. ve II. Kampanyalar arasında Benzerlik dönüşümü modelinin TEKK çözümü ile dönüştürülen obje noktalarının deformasyon analizi

Nokta No	d_X (cm)	d_Y (cm)	d_Z (cm)	d (cm)	Test Büyüklüğü	Fischer (0.95, 3, f)	Hipotez (d=0)
101	2.52	3.61	1.84	4.77	14.81	2.62	Geçersiz
103	0.82	0.16	1.35	1.59	0.53	2.62	***Geçerli***
105	4.01	-8.74	2.93	10.05	42.10	2.62	Geçersiz
108	-3.25	-7.70	-13.41	15.80	101.78	2.62	Geçersiz
110	2.72	-5.70	-7.55	9.84	83.56	2.62	Geçersiz
111	91.98	-86.98	-88.49	154.45	21354.31	2.62	Geçersiz
112	0.23	0.99	3.34	3.49	3.31	2.62	Geçersiz
113	316.79	-319.11	-175.70	482.76	173639.18	2.62	Geçersiz
114	121.41	-119.12	-114.18	204.86	29398.76	2.62	Geçersiz
116	62.20	-44.56	-22.15	79.66	3253.88	2.62	Geçersiz
119	0.46	0.70	1.97	2.14	1.00	2.62	***Geçerli***

121	5.06	-7.14	-6.74	11.05	84.39	2.62	Geçersiz
130	2.11	-9.14	-7.13	11.78	80.52	2.62	Geçersiz

6. Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada, GPS ölçmelerinin değerlendirilmesi, zemin hareketlerinin 3 Boyutlu (3B) deformasyon analizi ile saptanması, deformasyon analizinde, dönüşüm parametrelerinin EKK ve TEKK kestirimlerini kullanarak, TEKK'in etkinliğinin sınanması çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Benzerlik dönüşümü olarak isimlendirilen geleneksel yaklaşımla karşılaştırma yapmak için aynı veri kümesi üzerinde uygulama yapılmış ve her iki yöntemle de benzer sonuçlar elde edilmiştir. TEKK kestirim yönteminin avantajı her iki sistemdeki koordinatların stokastik olarak ele alınması ve böylelikle daha gerçekçi bir matematiksel modelin tanımlanmasıdır. 3B deformasyon analizinin gerçekleştirilmesinde dönüşüm parametrelerinin belirlenmesi için kullanılan EKK ve TEKK çözümü arasında dönüşümle elde edilen obje noktalarının koordinat farkları küçüktür (0.5cm). Bu farklar, büyük deplasmanların olduğu çalışma alanlarında çok önemli olmamasına rağmen, bu seviyedeki farklar küçük değişimlerin kritik öneme sahip olduğu köprü, baraj, viyadük, gökdelen gibi büyük mühendislik yapılarının izlenmesi çalışmalarında önemli bir role sahiptir. Bu nedenle, bu türdeki jeodezik deformasyon analiz çalışmalarında uygulanmak üzere TEKK kestirimi tekniğinin kullanımı önerilebilir.

Kaynaklar

ACAR, M.: **Heyelanların İzlenmesinde Esnek Hesaplama Yöntemleri,** Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2009.

ACAR, M.: ÖZLÜDEMİR, M.T., EROL, S., ÇELİK, R.N. ve AYAN, T., **Kinematic Landslide Monitoring with Kalman Filtering**, Natural Hazards and Earth System Sciences, 8-2 (2008), s. 213-221.

ACAR, M., ÖZLÜDEMİR, M.T., EROL, S., ÇELİK, R.N. ve AYAN, T.: **Deformation Analysis with Total Least Squares**, Natural Hazards and Earth System Sciences, 6-4 (2006), s. 663–670.

AKYILMAZ, O., ACAR, M. ve ÖZLÜDEMİR, M.T.: **Koordinat Dönüşümünde En Küçük Kareler Ve Toplam En Küçük Kareler Yöntemleri**, HKM Jeodezi, Jeoinformasyon ve Arazi Yönetimi Dergisi, 97 (2007), 15- 22, Ankara.

AYAN, T.: **Matematik İstatistik Ve Hipotez Testleri**, Lisansüstü ders notları, İstanbul Teknik Üniversitesi, 1981.

DENLİ, H.H.: **GPS İle Marmara Bölgesindeki Yerkabuğu Hareketlerinin Belirlenmesi**, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 1998.

EROL, S.: **GPS Ve Nivelman Ölçüleriyle Deformasyonların Belirlenmesi**, Doktora Tezi, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2008.

FELUS, Y.: **Application of Total Least Squares for Spatial Point Process Analysis**, Journal of Surveying Engineering, 130-3 (2004), s. 126-133.

GOLUB, H.G. ve LOAN, F.C.: **An Analysis of the Total Least Squares Problem**, SIAM Journal of Numerical Analysis, 17-6 (1980), s. 883-893.

KUTOĞLU, Ş.H.: **GPS Ağlarının Ülke Nirengi Ağlarına Entegrasyonu**, Doktora Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 2001.

KUTOĞLU, Ş.H. : **Figure Condition in Datum Transformation**, Journal of Surveying Engineering, 130-3 (2004), s.138-141.

LEICK, A.: **GPS Satellite Surveying**, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.

MIKHAIL, E.M. ve ACKERMANN, F.: **Observation and least squares**., Harper & Row, New York, 1976.

VAN HUFFEL, S.: **The Generalized Total Least Squares problem: formulation, algorithm and properties**, Numerical Linear Algebra, Digital Signal Processing and Parallel Algorithms, NATO ATI Series, Vol. F70, Springer, Berlin, 1990.

VAN HUFFEL S. ve VANDEWALLE J.: **The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1991.