

Jeodezik Ağlarda Uyuşumsuz Ölçülerin Klasik Yaklaşım ve Robust Yöntemlerle Belirlenmesi

Şerif HEKİMOĞLU¹, R. Cüneyt ERENOĞLU²

Özet

Günümüzde uyumsuz ölçülerin belirlenmesinde iki temel yaklaşım vardır: Klasik uyumsuz ölçü testleri ve robust kestirim yöntemleri. Bilindiği gibi En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY), uyumsuz ölçülerin bozucu etkilerini uyumlu ölçüler üzerine yayar. Bu nedenle uyumsuz EKKY ile kestirilen tüm bilinmeyenler ve standart sapmaları bozar. Aynı şekilde temeli EKKY'ye dayanan BAARDA ve POPE klasik uyumsuz ölçü test sonuçlarını da olumsuz etkiler. Bunlar yerine uyumsuz ölçülerden etkilenmeyen robust yöntemlerin kullanılması önerilmektedir.

Bu çalışmada, klasik test yöntemleri ve robust yöntemlerin jeodezik ağlardaki uyumsuz ölçüleri belirlemedeki başarıları incelenmiştir. Bu amaçla jeodezik temel ağlar yapay olarak oluşturulmuştur. Bu ağlardaki ölçüleri elde etmek için hatasız ölçülere, yapay olarak üretilmiş normal dağılmış rasgele ölçü hataları eklenmiştir. Daha sonra hatasız ölçülere kaba hatalar eklenerek uyumsuz ölçüler üretilmiştir. Hangi ölçünün uyumsuz olacağı da rasgele belirlenmiştir. Çeşitli yöntemlerin sonuçlarını birbiriyle karşılaştırmak için ortalama başarı oranı kullanılmıştır. Ortalama başarı oranlarının kaba hatanın genliğine, sayısına, ölçülerin redundans paylarına, ölçü sayısına ve bilinmeyen sayısına bağlı olarak değiştiği görülmüştür.

Bu ağlarda robust yöntemler kullanılarak yapılan uyumsuz ölçü belirlemede özellikle küçük uyumsuz ölçüler için daha başarılı sonuçlar alınmıştır.

Anahtar Sözcükler

Robust İstatistik, Uyuşumsuz Ölçüler, Jeodezik Ağlar, Güvenirlilik, Ortalama Başarı Oranı, Kaba Hatalar, BAARDA Testi

Abstract

Detecting Outliers Using Conventional Approach and Robust Methods in Geodetic Networks

Today there are two basic approaches to detect outliers: Outlier detection tests and robust estimation methods. As it is well known, the least squares estimation (LSE) spreads the disturbing effects of bad observations on to the good observations. Therefore, this method is sensitive to outliers. Since the BAARDA's and POPE's Tests based on the LSE, are inadequate to detect outliers, robust methods should be preferred instead.

This study investigates how successful the conventional outlier tests and robust methods are to detect outliers in geodetic networks. Basic geodetic networks are simulated for this purpose. In order to obtain ordinary observations in this network, random errors are artificially added to the observations without errors. Then, the observations are produced by contaminating with outliers on the

basis that the selection of which observation is contaminated with outlier is carried out randomly. Mean success rate (MSR) is used to compare the results obtained from the methods. It is observed that the MSRs change depending on the magnitude and number of the outliers, the redundancy numbers of the observations, the number of observations and unknowns.

It is found that better results are achievable in detection of outliers with especially small magnitude using robust methods in these networks.

Key Words

Robust Statistics, Outliers, Geodetic Networks, Reliability, Mean Success Rate, Gross Error, the BAARDA's Test

1. Giriş

Günümüzde yeryuvarının dinamiğini daha iyi anlamak, yerkabuğu hareketlerini (plaka hareketleri, yerkabuğundaki deformasyonlar vb.) belirlemek için kalitesi yüksek jeodezik ağlara gereksinim duyulmaktadır. Yüksek kalitede ağ denildiğinde ölçü aletlerinin kalibre edildiği, ölçü inceliklerinin (precision) yüksek olduğu, ölçü kümesindeki uyumsuz ölçülerin yüksek güvenilirlikte belirlenebildiği bir ağ anlaşılmaktadır. Bu çalışmada yalnızca uyumsuz ölçülerin yüksek güvenilirlikle nasıl belirlenebileceği üzerinde durulacaktır.

Elde olmayan nedenlerle ölçü kümesi kirletilmiş olabilir. Ölçme sırasında yanlış okuma, bilgisayar ortamına aktarılan kopyalama hataları, nokta numarasının hatalı girilmesi, bazı ölçüler için indirgemelerin unutulması vb. kaba hatalar yanında, ölçü kümesinin özelliklerine uymayan uyumsuz ölçülerle de karşılaşılabilir.

Bir uyumsuz ölçünün meydana gelmesi olasılığı sıfır olsa bile, yüksek kalite için uyumsuz ölçü testleri uygulanmalıdır. Bilindiği gibi rasgele ölçü hataları normal dağılmış ise bilinmeyenler ve bunların standart sapmaları En Küçük Kareler Yöntemi (EKKY) kullanılarak, olasılığı en yüksek ve en optimal biçimde kestirilir. Ancak ölçü kümesinde tek bir uyumsuz ölçü olsa bile EKKY ile kestirilen tüm bilinmeyenler ve standart sapmaları bozulmaktadır. EKKY bu uyumsuz ölçünün bozucu etkisini tüm geri kalan iyi ölçülerin düzeltmeleri üzerine yaymaktadır. Tek bir uyumsuz ölçü bile EKKY'den elde edilen tüm kestirim değerlerini anlamsız kılmaya yetmektedir. EKKY uyumsuz ölçülere karşı çok duyarlıdır (HUBER 1981, HAMPEL vd. 1986). Kestirim sonuçlarının güvenilir olması için uyumsuz ölçülerin

¹Prof. Dr., ²Arş. Gör., YTÜ İnşaat Fakültesi, Jeodezi Anabilim Dalı, Beşiktaş/İstanbul

saptanması ve ölçü kümesinde etkisiz hale getirilmesi gerekmektedir.

Uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesi amacıyla EKKY'ye dayalı olarak geliştirilen klasik uyuşumsuz ölçü testleri (Data Snooping, Tau testi ve t-testi) yıllardan beri kullanılmaktadır (AKSOY 1984; BAARDA 1968; POPE 1976; DEMİREL 1987; AYAN 1992). Ancak bu yöntemlerle, aynı anda tek uyuşumsuz ölçü belirlenebilmektedir. Uyuşumsuz ölçü atılarak geriye kalan ölçülere yeniden uyuşumsuz ölçü testi uygulanır. Bu yineleme işlemine, uyuşumsuz ölçü kalmayınca kadar devam edilir. Sonuçta kaba hatalı ölçü sayısı kadar bir iterasyon gerekmektedir (GAO vd. 1992). Ancak ölçü kümesinin birden fazla kaba hata içerdiği durumlarda, bu testler başarılı olmamaktadır (KRARUP vd. 1983; HEKİMOĞLU 1997). Genel olarak klasik uyuşumsuz ölçü testleri kullanılarak az sayıda kaba hata güvenilir olarak belirlenebilmektedir (KOCH 1996). Klasik uyuşumsuz ölçü test yöntemleri ile ancak bir uyuşumsuz ölçü güvenilir olarak belirlenebilir (HEKİMOĞLU 1995).

HUBER 1964 yılında yayınlanan makalesiyle robust istatistik yaklaşımını ortaya koymuştur. En büyük olasılık kestiriminden (Maximum Likelihood Estimation) yola çıkarak robust M-kestirimini ileri sürmüştür. Robust kestirimin en büyük katkısı, uyuşumsuz ölçülerin kestirilenler üzerindeki etkisini yerelleştirmesi, dolayısıyla bilinmeyenler üzerindeki olumsuz etkilerin azaltılması hatta yok edilmesidir. Bu yöntem varsayılan dağılımdan sapmalara yani uyuşumsuz ölçülere karşı duyarsızdır. M-kestirim kullanılarak, bilinmeyenlerin yinelemeli ve yeniden ağırlıklandırılmalı çözümünde, önsel P ağırlık matrisinin uyuşumsuz ölçülere ait olan değerleri yineleme aşamasında giderek küçülür, hatta sifıra yakınsar. Bu özellik uyuşumsuz ölçülerin tanınmasını sağlar.

Robust kestirim yöntemleri jeodezi'de son 25 yıldan beri özellikle uyuşumsuz ölçüleri belirlemede kullanılmaktadır (FUCHS 1982; KRARUP vd. 1983; KAMPMANN 1989; XU 1989; GAO vd. 1992; YAŞAYAN 1992; HARVEY 1993; BENNING 1995; YOUCAI 1995; KOCH 1996).

Bir kestirim veya test yönteminin global genel güvenilirliğini ölçmek için kırılma noktası kavramı geliştirilmiştir. Bir kestirim yönteminin kırılma noktası diğerinden büyükse bu yöntem daha güvenilir denmektedir. Aritmetik ortalamanın kırılma noktası sıfır, medyanın ki 0.5 biçimindedir. EKKY'nin kırılma noktası sıfırdır ve buna dayalı olan test yöntemlerinin de kırılma noktası sıfırdır. İşte bu nedenle tek bir uyuşumsuz ölçü EKKY'den elde edilen sonuçları anlamsız hale getirmeye yeter. Buna karşın regresyon analizi için yüksek kırılma noktalı bazı yöntemler geliştirilmiştir (LMS, SST, LTS). (ROUSSEUW ve LEROY 1987). Fakat bu yöntemlerde, bilinmeyen sayısı artınca hesaplamaların zorlaştığı ve regresyon analizinde y-yönündeki (ölçülerin) uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde başarılı olmadığı görülmüştür.

Kırılma noktası kavramı, kestiricinin büyük kaba hatalı ölçüleri belirleme yeteneği hakkında genel bir fikir vermektedir. Küçük genlikli kaba hataların belirlemede bu kavram kestiricinin yeteneğini yeterince ölçmemektedir. İşte bu nedenle kestiricilerin ve test yöntemlerinin küçük kaba hatalı

ölçüleri belirleme yeteneğini ölçmek için ortalama başarı oranı kavramı ortaya atılmıştır (HEKİMOĞLU ve KOCH 1999). Bu kavram özellikle jeodezik ağlarda da başarıyla uygulanmıştır (BERBER ve HEKİMOĞLU 2001; HEKİMOĞLU ve ERENOĞLU 2007).

Bu çalışmada ikinci bölümde uyuşumsuz ölçü kavramına değinilmektedir. Üçüncü bölümde kullanılan jeodezik ağların doğrusal modellerinden söz edilmektedir. Daha sonra uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde klasik yaklaşım ve robust kestirim yöntemleri anlatılacaktır. Ortalama başarı oranı kavramına değinildikten sonra sözü edilen bu yöntemler jeodezik ağlara uygulanmıştır. Son bölümde ise elde edilen sonuçlar ve yorumlara yer verilecektir.

2. Uyuşumsuz Ölçü Kavramı

Merkezi limit teoremine göre, normal dağılmış bir örnek kümeden çıkan ölçülerin dağılımı, ölçü sayısı arttıkça normal dağılıma yaklaşmaktadır. İstatistiksel olarak normal dağılımdan sapmalar incelenebilir. Sonuçta kestirilen dağılımın parametreleri için bulunan sınır değerler güven aralıklarıdır (Şekil 1). Sınır değerleri aşan ölçüler, kaba hatalı ölçüler olarak düşünülerek ölçü kümesinden atılır, mümkünse ölçme işlemi yinelenir.

HUBER (1964) uyuşumsuz ölçüleri ayrı bir kümeden çıkmış ölçü grubu olarak görmektedir:

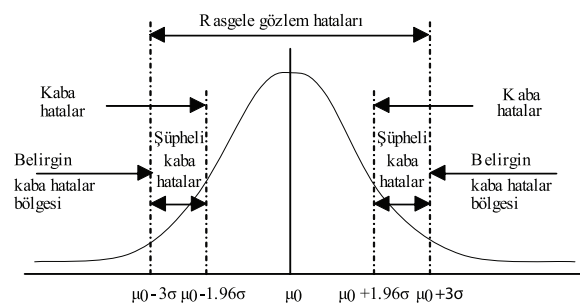
$$F(x) = (1 - \epsilon) F_0(x) + \epsilon H(x) \quad (1)$$

Burada $F(x)$, ölçü kümesinin dağılım fonksiyonu $H(x)$, uyuşumsuz ölçülerin dağılım fonksiyonu, $F_0(x)$, uyumlu ölçülerin dağılım fonksiyonu, ϵ ise bozulma derecesidir. Örneğin $F_0(x)$ ve $H(x)$; $F_0(x) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ve $H(x) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ olmak üzere ayrı ayrı normal dağılımlı ise,

$$F(x) = (1 - \epsilon) N(\mu_1, \sigma_1^2) + \epsilon N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad (2)$$

biçiminde yazılabilir (KUBIK ve WANG 1991). Burada μ normal dağılımın ortalama değeri, σ^2 ise varyansdır. (2) eşitliğinden anlaşılacağı gibi, uyuşumsuz ölçülerin farklı bir dağılımdan geldiği düşünülür.

Robust istatistikte $N(\mu, \sigma^2)$, aynı normal dağılımdan gelen tüm ölçülere iyi (uyuşumlu) ölçüler adı verilir. Uyuşumsuz ölçülerin $(-\infty, \mu - z_{1-\alpha/2})$ ve $(\mu + z_{1-\alpha/2}, +\infty)$ aralığında olduğu varsayılmaktadır. Eşitliklerde geçen $z_{1-\alpha/2}$, normlandırılmış normal dağılım fraktil değeri, α ise yanılma olasılığıdır. Bu çalışmada, $z_{1-\alpha/2}$ değeri 3 alınmıştır.



Şekil 1: Rasgele gözlem hataları ve kaba hatalar

Jeodezide ölçüler deterministik ve stokastik kesimden oluşur:

$$l_i = l_{d_i} + l_{s_i} \quad (3)$$

Burada l_i ölçüyü, l_{d_i} ölçünün deterministik kesimini ve l_{s_i} ölçünün stokastik kesimini belirtmektedir. Stokastik kesime rasgele gözlem hatası adı da verilmektedir. Uyuşumsuz ölçü şöyle tanımlanmaktadır:

$$\bar{l}_i = l_{d_i} + \delta l_i \quad (4)$$

Burada \bar{l}_i uyuşumsuz ölçüyü ve δl_i ise ilgili ölçüdeki uyuşumsuzluğa neden olan kaba hatayı belirtir. Şekil 1'de görüldüğü gibi bu hatalar, rasgele gözlem hataları bölgesi dışında kalan her değeri alabilir. Sözcülemi $-\infty < \delta l_i < -s_d$ veya $s_d < \delta l_i < \infty$ olabilir. Burada s_d sınır değeri göstermektedir ve bu çalışmada 3σ olarak alınmıştır.

Büyük kaba hatalar ölçü uzayında olabileceği gibi tasarım uzayında da (koordinat uzayında) olabilir. Örneğin basit doğrusal regresyonda büyük kaba hatalar y-yönünde olabildiği gibi x-yönünde de olabilir. x-yönündeki kaba hatalı ölçülere kaldıraç noktaları denir. Tek bir kaldıraç noktası bile EKKY ile kestirilen tüm büyüklükleri anlamsız kılar, yani EKKY kınılır.

Kaba hatalar, rasgele kaba hatalar ve ortak etkilenmiş kaba hatalar olarak iki ana gruba ayrılırlar (HEKİMOĞLU 1997).

Ölçülerdeki kaba hatalar gelişigüzel ortaya çıkıyorsa bunlara rasgele kaba hatalar denir. Kaba hataların işaretleri ve genlikleri rasgele değişebilir. Ortak etkilenmiş kaba hataların genlikleri rasgele değişmesine karşın aynı işaretli (hepsi artı veya hepsi eksi) olur. Ölçme süresince aynı hata kaynağından doğan hatalar ortak etkilenmiş hatalardır. Ayrıca büyük kaba hatalı ölçülere etkileyici ölçüler adı verilir (CHATTERJEE ve HADI 1988).

Jeodezik Ağlar İçin Doğrusal Modeller

Jeodezik ağlarda uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için önce ölçüler serbest ağ olarak dengelenir. Dolaylı ölçüler dengelemesi ilkesine (Gauss-Markoff Modeli'ne) göre kurulan düzeltme denklemleri aşağıdaki gibidir (WOLF 1979; ÖZTÜRK ve ŞERBETÇİ 1992; KOCH 1999):

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{e} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l} \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_{ll} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (8)$$

Burada geçen \mathbf{l} , $n \times 1$ boyutlu ölçü vektörü; \mathbf{A} , $n \times u$ boyutlu katsayılar matrisi; $\hat{\mathbf{x}}$, $u \times 1$ boyutlu kestirilen bilinmeyenler vektörü; \mathbf{e} , $n \times 1$ boyutlu rasgele hata vektörü; σ_0^2 , birim ağırlıklı ölçünün varyansı; \mathbf{v} , $n \times 1$ boyutlu düzeltmeler vektörü; \mathbf{C}_{ll} , $n \times n$ boyutlu ölçülerin kovaryans matrisi; \mathbf{P} , $n \times n$ boyutlu ölçülerin ağırlık matrisi; n , ölçü sayısı ve u , bilinmeyen sayısıdır. Uyuşumsuz ölçü analizi sürecinin her aşamasında ağ serbest dengelenmektedir.

4. Uyuşumsuz Ölçü Testleri

Jeodezide uyuşumsuz ölçüleri belirlemek için, eğer önsel varyans biliniyorsa BAARDA testi (1968), bilinmiyorsa POPE testi (1976) uygulanır (KOCH 1999). Örnek kümedeki bir \bar{l}_i ölçüsü uyuşumsuz olsun. Bu ölçüdeki kaba hata δl_i için H_0 hipotezi ve H_1 seçenek hipotezi aşağıdaki gibi kurulur:

$$H_0 : \delta l_i = 0 \quad (9)$$

$$H_1 : \delta l_i \neq 0 \quad (10)$$

Eğer önsel varyans biliniyorsa ve ölçüler arasında korelasyon yoksa v_i düzeltmesi standartlaştırılır:

$$b_i = \frac{|v_i|}{\sigma_0 \sqrt{(Q_{vv})_{ii}}} \quad (11)$$

Burada (Q_{vv}) düzeltmelerin Q_{vv} ağırlık katsayıları matrislerinin i. köşegen elemanıdır. Eğer $b_i > z_{1-\alpha/2}$ ise, \bar{l}_i ölçüsü uyuşumsuz ölçü olarak değerlendirilir. Burada, $z_{1-\alpha/2}$ normal dağılımın çizelge değeridir ve α için 0.001 seçilir. Bu durumda $z_{1-\alpha/2} = 3.29$ olur. Bilindiği gibi bu yöntem BAARDA yöntemi denir. Eğer örnek kümede birden fazla uyuşumsuz ölçü varsa, bu yöntem yinelenmeli olarak uygulanır.

Uyuşumsuz ölçü testleri genellikle bir uygulamada tek bir uyuşumsuz (standartlaştırılmış düzeltmesi en büyük olan) ölçüyü belirlemeye yatkındır. Ölçü kümesi bir uyuşumsuz ölçü içeriyorsa bu ölçüdeki (l_i) kaba hatanın r_i katı v_i düzeltmesine yansır ve bu uyuşumsuz ölçü kolayca belirlenir. Ancak örnek kümede ikinci bir uyuşumsuz ölçü varsa (l_j) bu ölçüdeki kaba hatanın h_{ij} katı birinci uyuşumsuz ölçüdeki ($-r_i \delta l_i$) kaba hatayı da etkiler. Yani:

$$v_i = -r_i l_i + \sum_{j=1}^n h_{ij} l_j, \quad i \neq j, \quad i \text{ ve } j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

olur. Bu eşitlikteki üçüncü terimi yaklaşık olarak sıfır kabul edelim. Eğer h_{ij} (-) işaretli ise ikinci terim birinci terime eklenip v_i 'yi büyütecektir. Aksine h_{ij} (+) işaretli ise v_i küçülecektir (Gizleme etkisi). Dolayısıyla l_i uyuşumsuz ölçüyü belirlemek olanaksız hale gelecektir. Ayrıca δl_i ve δl_j terimlerinin bu karşılıklı etkileşimi sonucunda iyi bir ölçünün düzeltmesi (mutlak değerce) büyüyebilir ve bu ölçü sanki uyuşumsuz ölçüymüş gibi belirlenebilir (Batma etkisi). İşte bu nedenlerle klasik uyuşumsuz ölçüler testi ile örnek kümedeki birden çok sayıdaki uyuşumsuz ölçüyü belirlemek zorlaşmaktadır (HEKİMOĞLU 2005).

Uyuşumsuz ölçü belirlenir ve ölçü kümesinden çıkartılır. Eğer ölçü atmak ağda şekil bozukluğuna yol açacaksa, yalnızca ilgili ölçünün ağırlığı küçültülerek işlemler sürdürülür. Daha sonra EKKY geriye kalan ölçülere yeniden uygulanır. Yeniden uyuşumsuz ölçü testi yapılır ve bu işlem böyle sürer. Uyuşumsuz ölçüler, test yöntemleri ile belirlendikten sonra atılıp ölçüler bunlardan arındırılır ve daha sonra bu ayıklanmış ölçülere EKKY yeniden uygulanır. Ölçüler tek bir uyuşumsuz ölçü içerseler bile, EKKY ile kestirilen tüm değerler bu

uyuşumsuz ölçü tarafından bozulmuşlardır. Bu bozulmuş hatta kaymış (bias) değerlerle doğru bir test yapılamayacağı açıktır. Ayrıca EKKY uyuşumsuz ölçünün etkisini diğer uyumlu ölçüler üzerine yaymakta yani bozucu etkiyi diğer iyi ölçülere dağıtmaktadır. Bu nedenle uyuşumsuz ölçü testleri, uyuşumsuz ölçü belirlemede beklenildiği kadar keskin, ayırıcı ve yeterli değildir (GAO vd. 1992). Hatta test sonucunda, uyumlu bir ölçü uyuşumsuz çıkabilmektedir (HEKİMOĞLU ve KOCH 2001).

5. En Küçük Karelerin Yayma Etkisi

EKKY yardımıyla kestirilen bilinmeyenler ve standart sapmaları, ölçüler normal dağılımlı ise en doğru ve en optimal biçimde elde edilirler. Aksi halde ölçü kümesi tek bir uyuşumsuz ölçü içerse bile kestirilen büyüklükler bundan olumsuz etkilenirler. Örneğin ölçülen bir kenara ilişkin değerler şöyle verilsin: {120.15, 120.16, 120.17, 120.14 m}. Bunların aritmetik ortalaması 120.155 m olur. Eğer sonuncu ölçü kaldırılıp yerine 1200.14 m konursa ortalama değer saparak 390.155 m'ye çıkar. Bir kaba hata kaynağı nedeniyle oluşan bu sonuç öncekiyle karşılaştırıldığında ne kadar anlamsız olduğu açıkça görülmektedir. Halbuki bu iki farklı durumun medyanları (ortanca değerleri) alınırsa sırasıyla 120.155 m ve 120.165 m değerleri bulunur. Aritmetik ortalama yani EKKY uyuşumsuz ölçülere karşı oldukça duyarlıdır. Buna karşılık medyan yöntemi uyuşumsuz ölçülere karşı duyarsızdır yani robusttur. Medyan kestiricisi bilinen en yüksek kırılma noktasına sahiptir (%50).

EKKY, kaba hataları tüm iyi ölçülerin düzeltmeleri üzerine yayar. Bu durum şöyle açıklanabilir: EKKY ile elde edilen düzeltmeler vektörü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{H} - \mathbf{I})\mathbf{l} \quad (13)$$

Burada \mathbf{I} birim matristir. \mathbf{H} matrisi ise:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \quad (14)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

EKKY'nin yayılma etkisini açıkça ortaya koyabilmek için (12) eşitliği incelenmelidir. Burada r_i , l_i ölçüsünün redundans payı, h_{ij} ise \mathbf{H} matrisinin bir elemanıdır. Bu eşitlik incelendiğinde şu sonuçlar çıkarılabilir:

- l_i ölçüsündeki bir kaba hata (δl_i), r_i değerine bağlı olarak ancak eşitlik (12)'teki ikinci terim sıfırda v_i düzeltmesine yansımaktadır. Genel olarak $0 < r_i < 1$ olduğundan, ikinci terim sıfır olsa bile, v_i düzeltmesi δl_i kaba hatasından daima daha küçüktür ($|v_i| < |\delta l_i|$). Bununla birlikte jeodezide ikinci terim genellikle göz ardı edilir (DEMİREL 1987).
- Bir l_j ölçüsündeki kaba hata tüm ölçülerin düzeltmelerini h_{ij} çarpanı kadar etkiler. Bunun sonucunda gizleme

(masking) ve batma (swamping) etkileri ortaya çıkmaktadır (HEKİMOĞLU 2005).

6. Robust Kestirim İlkesi ve Yinelemeli Yeniden Ağırlıklandırılmalı EKK Algoritması

HUBER'in öncülüğünü ettiği (HUBER 1964) ve HAMPEL ve ANDREWS gibi birçok araştırmacının katkılarıyla (ANDREWS 1974, HAMPEL 1986), günümüzde de gelişen robust istatistik, bilinmeyen parametreleri ve standart sapmalarını uyuşumsuz ölçülerden etkilenmeden belirlemeyi amaçlamaktadır. Robust kestirimin yararı, uyuşumsuz ölçülerin kestirilen bilinmeyenler üzerindeki etkisini azaltması hatta yok etmesidir (GAO vd. 1992). Robust kestirim uyuşumsuz ölçülerin etkilerini sınırlandırır. Model varsayımlarından küçük sapmalara karşı duyarlı değildir. Uyuşumsuz ölçüler tüm düzeltmeleri bozamaz, yalnızca ilgili düzeltmeleri büyütür (CASPARY ve BORUTTA 1987). Robust M-Kestiriminde önemli bir özellik, yinelemeli yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY'ne göre bilinmeyenlerin çözümü sırasında, başlangıçta verilen a priori (önsel) \mathbf{P} ağırlık matrisinin yineleme aşamasında uyuşumsuz ölçülere ait olan yalancı ağırlıklarının küçülmesi hatta hızla sıfıra yakınsamasıdır. Bu özellik uyuşumsuz ölçülerin tanınmasını, saptanmasını sağlar.

HUBER (1964), bir dağılımın konum parametresi için Maksimum Likelihood Kestiricisini genelleştiren M-kestiricisini aşağıdaki gibi ortaya atmıştır.

$$M = \sum_{i=1}^n \rho \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - l_j \right) = \sum_{i=1}^n \rho(v_i) = \min \quad (15)$$

Burada $\rho(v_i)$ herhangi bir konveks fonksiyon olabilir. Buna kayıp fonksiyonu da denir. $\rho(v_i)$ 'nin v_i 'ye göre türevi

$$\frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i} = \psi(v_i) \quad (16)$$

olarak gösterilen fonksiyona etki fonksiyonu denir. v_i 'lerin bilinmeyenlerin bir fonksiyonu olduğu göz önüne alınarak M 'nin bilinmeyenlere göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial M}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(v_i)}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \psi(v_i) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0 \quad (17)$$

veya

$$\sum_{i=1}^n \psi(v_i) a_{ij} = 0 \quad (18)$$

ve matris gösterimi ile,

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}) = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}) = 0 \quad (19)$$

yazılır. Bu denklem genellikle doğrusal değildir, ancak düzeltmeler normal dağılımda ise doğrusal olur ve bu durumda yöntem EKKY ile özdeşleşir (CASPARY ve BORUTTA 1987).

(19) eşitliğindeki toplam terimleri ile çarpılıp bölünür ve

$$W = W(v) = \frac{\psi(v_i)}{v} = \frac{\psi(A \hat{x} - l)}{A \hat{x} - l} \quad (20)$$

dönüşümü yapılırsa, EKKY'nin normal denklemlerine benzer olan

$$A^T W(v) = A^T W(A \hat{x} - l) = 0 \quad (21)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\hat{x} = (A^T W A)^+ A^T W l \quad (22)$$

yazılabilir. Bu denklemden \hat{x} ; $W(v)$ ağırlık fonksiyonu, henüz v_i 'ler bilinmediğinden doğrudan çözülemez. Ancak gerçek değerli bir fonksiyon seçilip yinelemeli yeniden ağırlıklandırılmalı EKKY ile

$$\hat{x}^{(k)} = (A^T W^{(k)} A)^+ A^T W^{(k)} l, \quad (23)$$

$$W^{(k)} = P W(v^{(k)}), \quad k=1,2,\dots,k_1, \quad (24)$$

$$W(v^{(0)}) = I, \quad (25)$$

kolayca çözülebilir. Yukarıdaki eşitliklerde geçen (k) ifadesi yinelemeli dengelemedeki k. iterasyonu göstermektedir. Burada P önsel ağırlık matrisi, k iterasyon sayısı, $W=W(v)$ ise seçilen ağırlık fonksiyonudur. Başlangıçta $k=1$ $W(v^{(0)})=I$ için ve dolayısıyla $W^{(1)}=P$ alınır. Özetle, önce EKKY ile ölçüler serbest dengelenerek düzeltmeler bulunur ve sonra W yeni ağırlık matrisi belirlenip, yeniden serbest dengeleme yapılır. Bu yinelemeli ardışık çözüm sonuçları ($\hat{x}^{(k)}$) arasındaki farklar belirli bir sayıdan küçük oluncaya kadar sürdürülür. Bu yinelemeli çözümde W yeni ağırlık matrisleri her aşamada yeniden belirlenir.

Uyuşumlu ölçülerin düzeltmeleri uyuşumsuz ölçülere göre daha küçük olduğu için, bunların ağırlıkları ($W^{(k)}$), x bilinmeyenleri (25) ve (26) eşitliklerinden yinelemeli EKKY ile çözümü süresince neredeyse hiç değişmemesine karşın, uyuşumsuz ölçülerin yeni ağırlıkları ($W^{(k)}$) giderek küçülmekte ve hatta sıfıra yaklaşmaktadır. Bu robust kestirimin en önemli özelliklerinden birisidir. Böylece kuşkulanan uyuşumsuz ölçüleri saptamak ve tanımak olanaklı olmaktadır (HEKİMOĞLU 1994).

Robust kestirim adı altında yetmiş dolayında fonksiyon olduğundan söz edilmektedir (YAŞAYAN 1992). Ancak belli bir bölümü jeodezik amaçlar için uygulanabilmektedir. Bu bölümde sadece en çok kullanılan ağırlık fonksiyonları üzerinde durulacaktır.

HUBER (1964) 'in robust kestiricisinin ağırlık fonksiyonu ($W(v_i)$) şöyle verilir:

$$W(v_i) = \begin{cases} 1 & |v_i| \leq c \\ \frac{c}{v_i} & |v_i| > c \end{cases} \quad (26)$$

HUBER kestiricisi, ortada normal yani Gauss çan eğrisi ve kenarlarda Laplace eğrisi olan bir yoğunluk fonksiyonuna

dayanır. c katsayısı genellikle 1.5 seçilen sabit bir sayıdır ve gerçek hata modellerine göre değiştirilebilir (JORGENSEN vd. 1984, SOMOGI 1988).

ANDREWS (1974) doğrusal regresyon problemlerinin çözümü için aşağıda verilen sinüs kestirimini geliştirmiştir:

$$W(v_i) = \begin{cases} \left(\frac{|v_i|}{c}\right)^{-1} \sin\left(\frac{|v_i|}{c}\right) & |v_i| \leq c\pi \\ 0 & |v_i| > c\pi \end{cases} \quad (27)$$

Burada c değeri için çeşitli araştırmalara dayanarak 2.1 değerinin alınması önerilmiştir.

Danimarka yöntemi aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$W(v_i) = \begin{cases} 1 & |v_i| < c \\ \exp\left(\frac{|v_i|}{c}\right) & |v_i| \geq c \end{cases} \quad (28)$$

Burada c sabiti için 1.5, 2 ve 2.5 değerleri seçilir. Yöntem KRAUP tarafından 1973 yılında sunulmuştur (KRARUP vd. 1980).

Uyuşumsuz ölçülerin etkisini azaltmak için HAMPEL (1974) 4 bölgeli bir ağırlık fonksiyonu ileri sürmüştür:

$$W(v_i) = \begin{cases} 1 & 0 < |v_i| \leq a \\ \frac{a}{|v_i|} & a < |v_i| \leq b \\ \frac{a(c - |v_i|)}{|v_i|(c - b)} & b < |v_i| \leq c \\ 0 & |v_i| > c \end{cases} \quad (29)$$

Burada a, b ve c sabitlerinin seçimi için HAMPEL 2, 4 ve 8 değerlerini ileri sürmüştür. Deneylerimize göre jeodezik ağlarda bu değerlerin sırasıyla 1.5, 3 ve 6 olarak belirlenmesi daha uygundur.

Bu noktaya kadar yinelemeli ve yeniden ağırlıklandırılmalı robust M-kestirim yöntemleri anlatılmıştır. Bunların dışında bazı robust kestiriciler mevcuttur. Örneğin L_1 -norm yöntemi EDGEWORTH (1987) tarafından bir robust kestirici olarak ortaya konmuştur. Huber bu yöntemi, yinelemeli ve yeniden ağırlıklandırılmalı M-kestirim için bilinmeyenlerin ilk başlangıç değerlerinin bulunmasında da kullanmıştır. L_1 -norm yönteminin en önemli özelliği, bazı şartlarda klasik EKK dengelemesinin yerini alacak olan yöntem değil, ek bir robust yöntem olmasıdır (HARVEY 1993). Yakın geleceğe kadar uygulamalı bilimlerde L_1 -norm'un kullanılmamasının sebebi etkin bir algoritmanın ve ilgili istatistiksel kuramların yeterince geliştirilememiş olmasıydı. 1950'li yıllarda simpleks yönteminin ve daha sonra BARRADOLE ve ROBERTS (1974)'de verilen düzenlenmiş simpleks yönteminin geliştirilmesi ile bilgisayar ortamında çalışılabilen bir algoritma bulunmuştur. Son 20 yıldır jeodezi biliminde uygulanan L_1 -norm genellikle iki ana amaca yönelik kullanılmaktadır: Kestirim ve uyuşumsuz ölçü saptama (AYHAN vd. 1987). L_1 -norm yöntemine ait kestirim fonksiyonu,

$$\rho(v_i) = \sum_{i=1}^n |v_i| = \min \quad (30)$$

eşitliği ile gösterilmektedir.

7. Ortalama Başarı Oranı Kavramı

Jeodezik bir kontrol ağında uyumlu ölçüler vektörü **I** olsun. Bu örnek kümeden rasgele olarak belirlenen m tane ölçü uyuşumsuz ölçülerle yer değiştirilirse \bar{I} kirletilmiş ölçü kümesi elde edilir. Kirletilmiş \bar{I} ölçü vektörüne T robust kestiricisi uygulanarak uyuşumsuz ölçüler belirlenir. Bunun sonucunda elde edilen kirletilmiş düzeltmeler vektörü \bar{v} olsun. Eğer kirletilmiş ölçülerden her birisinin \bar{v}_i düzeltmesi $3\sigma_i$ değerinden büyükse, T robust kestiricisi başarılı olarak kabul edilir:

$$|\bar{v}_i| > 3\sigma_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (31)$$

Uyuşumsuz ölçü için uyuşumsuzluk miktar aralığı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$3\sigma_i < \delta l_i < \infty, \quad i=1,2,\dots, m. \quad (32)$$

Bir uyuşumsuz ölçünün genliği şöyle verilir:

$$\text{int}(\sigma_i)_{kl} = l \sigma_i - k \sigma_i, \quad k>3, \quad l>k, \quad (33)$$

Burada geçen “int” ifadesi genlik (interval) anlamındadır. k ve l ifadeleri ise uyuşumsuz ölçünün genlik sınırlarının belirtilmesi amacıyla kullanılmıştır. Söz gelimi k=3 ve l=6 alınır ise ilgili uyuşumsuz ölçü 3σ - 6σ arasındadır.

I ölçü kümesindeki iyi ölçülerden rasgele seçilen bazılarının yerine gelişigüzel değerler almış uyuşumsuz (kirletilmiş) ölçüler yerleştirilerek birçok kirletilmiş ölçü kümeleri elde edilebilir. \bar{I} kirletilmiş örnek kümelerinden her biri m tane uyuşumsuz ölçü içersin. Bir T robust kestiricisi veya uyuşumsuz ölçü testi ancak kirletilmiş örnek kümedeki uyuşumsuz ölçülerin tümünü belirlediğinde başarılı olarak kabul edilecektir. Bu kirletilmiş örnek kümelere uygulanan T kestiricisinin kısmi güvenilirliği ortalama başarı oranı yardımıyla tanımlanır. Ortalama başarı oranı; başarılı deney sayısının toplam deney sayısına oranıyla elde edilir. Böylelikle ortalama başarı oranı kaba hatanın türüne ve genliğine bağlı olarak aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\gamma_j^i(T, \bar{I}, \text{int}(\sigma), m, n) = \frac{q}{t}, \quad i=1,2,\dots,k. \quad (34)$$

Burada q kestiricinin başarılı olduğu örnek küme sayısı, i kaba hatanın türünü, j rasgele hata vektörünü ve t kirletilmiş örnek küme sayısının toplamını ifade etmektedir. Burada uyuşumsuz ölçülerin örnek küme içindeki konumları ve genlikleri rasgele belirlenir.

Kirletilmemiş bir örnek kümedeki ölçüler rasgele hataları (rasgele hata vektörünü) içerir. Bu rasgele hatalar vektörünün yerine farklı bir rasgele hatalar vektörü getirilerek kolaylıkla

yeni bir iyi örnek küme elde edilebilir. Böylece birbirinden farklı çok sayıda iyi örnek küme bulunur. Bunlardan her biri de ayrı ayrı kirletilmek suretiyle uyuşumsuz ölçü içeren çok sayıda kirletilmiş örnek kümeler \bar{I} oluşturulabilir. Bu yüzden bir kestiricinin güvenilirliği tüm örnek kümeler için aşağıdaki gibi genelleştirilebilir. Böylece bir rasgele hata vektörü ile elde edilen bir örnek kümeden bir tane γ_j^i kısmi ortalama başarı oranı elde edilebilir. Çok sayıda rasgele hata vektörüne göre elde edilen örnek kümelerin her biri için γ_j^i elde edilen kısmi ortalama başarı oranlarının ortalaması alınarak bir kestiricinin ortalama başarı oranı bulunur :

$$\gamma_{\text{ort}}^i(T, \bar{I}, \text{int}(\sigma), m, n) = \left\{ \sum_{j=1}^p \gamma_j^i(T, \bar{I}, \text{int}(\sigma), m, n) \right\} / p \quad (35)$$

Burada p, I örnek küme sayısını göstermektedir. Bu ortalama başarı oranı her bir kaba hata türü için ayrı ayrı bulunur. Bu γ_{ort}^i (i=1,2,...) büyüklüklerinin en küçük değerine ise bir kestiricinin güvenilirliği denir (HEKİMOĞLU ve KOCH 1999). BAARDA'nın klasik yaklaşımının kullanılması halinde de aynı kavramlar geçerlidir. Sadece (31) eşitliği aşağıdaki gibi uygulanır:

$$|\bar{v}_i| > z_{1-\alpha/2} \sigma_i \sqrt{(Q_{vv})_{ii}}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (36)$$

8. Uygulamalar

8. 1. Uyuşumlu Ölçüler

BAARDA'nın klasik yaklaşımı ve robust yöntemler kullanılarak jeodezik ağlarda yapılan uyuşumsuz ölçü analizinin güvenilirliğini araştırmak amacıyla Şekil 2 deki nivelman ağı ve Şekil 3’de görülen nirengi ağı bilgisayar ortamında yapay olarak oluşturulmuştur.

Söz konusu jeodezik ağlarda sabit noktaların konum bilgileri kullanılarak hatasız ölçüler bulunmuştur. MATLAB versiyon 6.5’te yer alan normal dağılmış rasgele sayı üretici yardımıyla ölçülerdeki rasgele hatalar elde edilmiştir. Bu amaçla, doğrultu ağları için $e_{o_{1i}} \sim N(\mu = 0, \sigma_1^2)$, $\sigma_1 = \pm 3^{cc}$; kenar ağları için $e_{o_{2j}} \sim N(\mu = 0, \sigma_{o_{2j}}^2)$, $\sigma_{o_{2j}} = \pm (5mm+5ppm)$ ve nivelman ağları için $e_{\Delta h_k} \sim N(\mu = 0, \sigma_{\Delta h_k}^2)$, $\sigma_{\Delta h_k} = \pm(\sigma_0 \sqrt{S_k (km)})$, σ_0 değerleri kullanılmıştır. Söz edilen doğrultu ağı ve kenar ağı Şekil 3’te verilen aynı sabit noktalarda birleştirilerek doğrultu-kenar ağı elde edilmiştir.

Uyuşumlu ölçüleri yapay olarak üretmek için; hatasız doğrultu ölçüleri o_{1i}' , hatasız kenar ölçüleri o_{2j}' ve hatasız yükseklik farkı ölçülerine $\Delta h_k'$, türetilen normal dağılmış rasgele hatalar ($e_{o_{1i}}$, $e_{o_{2j}}$ ve $e_{\Delta h_k}$) eklenmiştir:

$$o'_{1i} = o_{1i} + e_{o_{1i}}, \quad i=1, 2, \dots, n_1, \quad (37)$$

$$o'_{2j} = o_{2j} + e_{o_{2j}}, \quad j=1, 2, \dots, n_2, \quad (38)$$

$$\Delta h_k' = \Delta h_k + e_{\Delta h_k}, \quad k=1, 2, \dots, n_3. \quad (39)$$

Uyuşumsuzluk miktarları (δl_i) rasgele veya ortak etkilenmiş yapıda olabilirler.

Tablolardaki kısıtlamalar nedeniyle sadece 0 ve 1 kaba hata analiz sonuçları sunulmuştur.

Ölçülerin fazla ölçü paylarının (redundans paylarının) kestiriciler üzerindeki etkilerini belirlemek amacıyla 100×100 adet kirletilmiş örnek kümede sadece fazla ölçü payları küçük olan ölçülere (mesela $r_i < 0.4$) kaba hatalar eklenmiştir. Bu durumda bulunan sonuçlarda, kaba hataların hatasız ölçülere rasgele verildiği genel duruma göre ortalama başarı oranlarında büyük azalma olduğu görülmüştür. Buradan ölçülerin redundans paylarının uyumsuz ölçüleri belirlemede ne kadar etkin olduğu görülmektedir.

9.1 Nivelman Ağı

Kullanılan nivelman ağında ölçü sayısı $n=15$, bilinmeyen sayısı $u=8$ ve serbestlik derecesi $f=8$ 'dir. Robust yöntemler ve BAARDA'nın yöntemine ilişkin başarı oranları Tablo 1'in (A) sütununda verilmektedir. Bundan sonraki bölümlerde sonuçlar tablolarda harflendirilen sütunlarla sunulacaktır. Örneğin "Tablo 1 (A)" biçiminde. Kaba hataların genlikleri arttıkça Andrews yöntemi dışındaki tüm kestiricilerin ortalama başarı oranları artmıştır. Ancak kaba hata sayısı arttıkça ortalama başarı oranlarının azaldığı görülmüştür.

Nivelman ağlarında serbestlik derecesindeki değişimin robust yöntemlerin başarılarına olan etkilerini ortaya çıkarabilmek amacıyla mevcut nivelman ağına 4 yeni yükseklik farkı ölçüsü eklenerek yeni bir ağ oluşturuldu. Ölçü sayısı $n=19$ ve bilinmeyen sayısı $u=8$ 'dir. Bu yeni ağda bilinmeyen sayısı ($u=8$) aynı kalmış, ancak ölçü sayısı ($n=19$) artırılmıştır. Böylece serbestlik derecesi 8'den 12'ye çıkarılmıştır. Bu ağa ilişkin Tablo 1 (B)'de görülen ortalama başarı oranları, Tablo 1 (A)'da verilmiş ortalama başarı oranları ile karşılaştırılırsa, serbestlik derecesi artırıldığında yöntemlerin güvenilirliklerinin beklenildiği gibi arttığı sonucuna varılmıştır.

Tablo 1: Nivelman ağına ilişkin ortalama başarı oranları

Kestirim Yöntemi	Kaba Hata Genliği	Kaba Hata Sayısı	(A) (%)	(B) (%)	(C) (%)
Baarda			00	00	00
Andrews			21	21	13
Danimarka	$>3\sigma$	0	15	12	04
Hampel			04	04	02
Huber			03	03	00
L_1 -norm			15	13	05
Baarda			06	12	07
Andrews			51	58	58
Danimarka	$3\sigma-6\sigma$	1	56	67	66
Hampel			47	71	65
Huber			44	62	54
L_1 -norm			51	63	61
Baarda			88	92	90
Andrews			42	57	48
Danimarka	$6\sigma-12\sigma$	1	87	87	91
Hampel			94	95	97
Huber			92	95	95
L_1 -norm			86	87	88

Diğer bir uygulama olarak, ilk nivelman ağından serbestlik derecesini değiştirilmeden bir nokta atılarak başka bir nivelman ağı oluşturulmuştur. Ölçü sayısı $n=14$ ve serbestlik derecesi $f=8$ olduğu yeni ağda bilinmeyen sayısı 8'den 7'ye düşürülmüştür. Kestiricilerin Tablo 1 (C)'de verilen ortalama başarı oranları Tablo 1 (A)'da verilenlerle karşılaştırıldığında, bilinmeyen sayısındaki azalmanın ortalama başarı oranlarını belirgin şekilde arttırdığı görülmektedir.

Bu incelemeye göre nivelman ağlarında en başarılı kestiriciler Danimarka, Hampel ve L_1 -norm yöntemleridir. Robust yöntemler genel olarak BAARDA'nın Data Snooping testinden daha başarılıdır. BAARDA testinin özellikle 36 arasındaki uyumsuz ölçüleri belirlemede çok yetersiz kaldığı görülmüştür. Buna karşın robust yöntemler ölçü kümesinde uyumsuz ölçü olmadığı durumda iyi ölçülerden bazılarını uyumsuz ölçüymüş gibi belirlemektedir.

9.2 Doğrultu Ağı

Şekil 3'teki doğrultu ağında ölçü sayısı (n) 26, bilinmeyen sayısı (u) 18 ve serbestlik derecesi (f) 12'dir. Bilindiği gibi yöneltme bilinmeyenlerinin bulunmasında genellikle aritmetik ortalama kullanılmaktadır. Özellikle BAARDA yönteminde; doğrultu ölçerlerin kurulduğu her noktada farklı doğrultu değerlerinden bulunan değerlerin aritmetik ortalaması alınarak, ilgili sabit noktadaki yöneltme bilinmeyenini kestirilir. Ancak robust yöntemler kullanılarak yapılan uyumsuz ölçü incelemesinde yöneltme bilinmeyenlerinin yaklaşık değerlerini hesaplarken aritmetik ortalama kullanılması durumunda oldukça başarısız sonuçlar ortaya çıkmaktadır. WICKI, 1999 yılında bu sakıncanın giderilmesi için aritmetik ortalamasının yerine medyan kestiricisinin kullanılmasını önermiştir. Bu durumda robust yöntemler başarılı olmaktadır. Bu nedenle robust yöntemler uygulanmadan önce yöneltme bilinmeyenlerinin yaklaşık değeri medyan kestiricisi kullanılarak bulunmalıdır.

Uyuşumsuz ölçülerle kirletilmiş doğrultu ağında robust yöntemler ve BAARDA testi kullanılarak bulunan ortalama başarı oranları Tablo 2 (A)'da verilmektedir. Doğrultu ağlarında bilinmeyen sayısındaki değişimin uyumsuz ölçü analizine etkisini ortaya çıkarmak amacıyla serbestlik derecesi değiştirilmeksizin Şekil 3'te verilen doğrultu ağına iki yeni nokta daha eklenerek bilinmeyen sayısı (u) 18'den 24'e çıkarılmıştır. Bu yeni ağa ilişkin ortalama başarı oranları Tablo 2 (B)'de verilmektedir. Görüldüğü gibi bilinmeyen sayısının artması durumunda bu yöntemlerin uyumsuz ölçüleri belirlemedeki başarı oranları azalmaktadır.

Ayrıca serbestlik derecesinin uyumsuz ölçülerin belirlenmesine olan etkisini araştırmak amacıyla Şekil 3'teki doğrultu ağındaki bazı ölçüler dikkate alınmayarak serbestlik derecesi 12'den 6'ya düşürülmüştür. Tablo 2 (C)'de verilen bu yeni doğrultu ağına ait ortalama başarı oranları Tablo 2 (A) ile karşılaştırıldığında, doğrultu ağlarında serbestlik derecelerinin azalması halinde yöntemlerin başarılarının düştüğü açıkça görülmektedir.

Doğrultu ağlarında Danimarka, Hampel, Huber ve L_1 -norm yöntemleri uyumsuz ölçülerin ortaya çıkarılmasında en başarılı yöntemlerdir. Özellikle örnek kümenin çok sayıda kaba hata ile kirletilmesi halinde robust yöntemler BAARDA testine göre oldukça etkindir. Ancak doğrultu ağları uyumsuz ölçü içermiyorsa, robust yöntemler bazı durumlarda iyi ölçüleri uyumsuz ölçüymüş gibi belirlemektedir.

Tablo 2: Doğrultu ağına ilişkin ortalama başarı oranları

Kestirim Yöntemi	Kaba Hata Genliği	Kaba Hata Sayısı	(A) (%)	(B) (%)	(C) (%)
Baarda			00	00	00
Andrews			12	14	09
Danimarka	$>3\sigma$	0	11	06	04
Hampel			14	10	06
Huber			02	02	00
L_1 -norm			09	06	02
Baarda			46	21	39
Andrews			58	40	47
Danimarka	$3\sigma-6\sigma$	1	59	41	44
Hampel			59	44	47
Huber			51	24	31
L_1 -norm			58	37	42
Baarda			89	71	77
Andrews			76	57	68
Danimarka	$6\sigma-12\sigma$	1	86	78	81
Hampel			82	76	79
Huber			94	79	81
L_1 -norm			88	74	79

9.3 Kenar Ağı

BAARDA testinin ve robust yöntemlerin kenar ağlarındaki uyumsuz ölçülerin belirlenmesindeki başarılarını ortaya koymak amacıyla Şekil 3'teki 6 noktalı bir kenar ağı oluşturulmuştur. Bu ağda ölçü sayısı $n=12$, bilinmeyen sayısı $u=12$ ve serbestlik derecesi (f) 3'tür. Kenarların herhangi bir ölçü için standart sapması $\sigma_s = \pm (5\text{mm} + 5\text{ppm})$ olan bir elektronik aletle ölçüldüğü öngörülmüştür. Kullanılan yöntemlerin ortalama başarı oranları Tablo 3 (A)'da görülmektedir.

Kenar ağına iki kenar ölçüsü eklenmek suretiyle serbestlik derecesi 3'ten 5'e çıkarılmıştır. Tablo 3 (B)'de verilen bu yeni ağa ilişkin sonuçlar Tablo 3 (A) ile karşılaştırıldığında, ortalama başarı oranlarının arttığı görülmektedir. Böylece serbestlik derecesindeki artışın yöntemlerin başarı oranlarına olumlu yansıdığı sonucuna varılır.

Bunun dışında, yapay olarak üretilen ilk kenar ağından serbestlik derecesi korunarak bir nokta dışlanmış ve yeni bir kenar ağı elde edilmiştir. Tablo 3 (C)'de verilen sonuçlar Tablo 3 (A) ile karşılaştırılırsa, bilinmeyen sayısı azaldığında bu yöntemlerin ortalama başarı oranlarının arttığı görülmüştür. Kenar ağlarındaki kaba hataların belirlenmesinde Danimarka ve L_1 -norm en başarılı yöntemlerdir. Bunun yanı sıra, 612 büyüklüğündeki bir kaba hata olması durumu dışındaki durumlarda robust kestiriciler BAARDA yönteminden daha başarılıdır. Ölçülerin uyumsuz ölçü içermediği durumlarda robust yöntemler, iyi bir ölçüyü uyumsuzmuş gibi belirleyebilmektedir.

Tablo 3: Kenar ağına ilişkin ortalama başarı oranları

Kestirim Yöntemi	Kaba Hata Genliği	Kaba Hata Sayısı	(A) (%)	(B) (%)	(C) (%)
Baarda			00	02	00
Andrews			28	30	27
Danimarka	$>3\sigma$	0	06	11	06
Hampel			00	03	00
Huber			00	01	00
L_1 -norm			22	15	20
Baarda			12	26	18
Andrews			24	38	36
Danimarka	$3\sigma-6\sigma$	1	22	39	33
Hampel			15	33	23
Huber			09	24	14
L_1 -norm			24	37	37
Baarda			48	80	62
Andrews			19	36	28
Danimarka	$6\sigma-12\sigma$	1	46	72	61
Hampel			48	77	63
Huber			39	65	58
L_1 -norm			40	61	61

9.4 Doğrultu-Kenar Ağı

Önceki bölümlerde kullanılan doğrultu ağı ve kenar ağı birleştirilerek Şekil 3'te verilen doğrultu-kenar ağı elde edilmiştir. Bu ağ ölçü sayısı $n=38$, bilinmeyen sayısı $u=18$ ve serbestlik derecesi $f=23$ 'tür. Robust yöntemlerle uyumsuz ölçü analizinden önce yönelme bilinmeyenleri bölüm 9.2'de anlatıldığı gibi medyan kestiricisi kullanılarak kestirilmiştir. Doğrultu-kenar ağına ilişkin bu yöntemlerin ortalama başarı oranları Tablo 4 (A)'da verilmiştir.

Tablo 4: Doğrultu- Kenar ağına ilişkin ortalama başarı oranları

Kestirim Yöntemi	Kaba Hata Genliği	Kaba Hata Sayısı	(A) (%)	(B) (%)	(C) (%)
Baarda			02	00	02
Andrews			20	18	34
Danimarka	$>3\sigma$	0	19	13	19
Hampel			06	03	03
Huber			12	03	04
L_1 -norm			14	16	14
Baarda			36	21	20
Andrews			60	52	52
Danimarka	$3\sigma-6\sigma$	1	61	55	54
Hampel			55	44	44
Huber			60	48	48
L_1 -norm			63	54	53
Baarda			72	52	52
Andrews			73	68	67
Danimarka	$6\sigma-12\sigma$	1	80	78	74
Hampel			91	88	84
Huber			89	87	83
L_1 -norm			83	76	76

Daha önceki uygulamalarda serbestlik derecesinin uyuşumsuz ölçü analizinde oldukça etkin olduğu görülmüştü. Bu etkiyi doğrultu-kenar ağlarında da ortaya koyabilmek amacıyla ölçü sayısı 38'den 30'a düşürülerek serbestlik derecesi azaltılmıştır. Ağdaki nokta sayısının değişmediği bu yeni duruma ilişkin ortalama başarı oranları Tablo 4 (B)'dedir.

Tablo 4 incelendiğinde, ağ planından çıkarılan ölçülerin serbestlik derecesinde bir azalmaya neden olduğu ve bunun sonucunda bu yöntemlerin başarı oranlarının Tablo 4 (A)'daki ortalama başarı oranlarına göre azaldığı görülmüştür. Jeodezik ağlarda bilinmeyen sayıları diğer bir ifadeyle ağdaki nokta sayıları uyuşumsuz ölçülerin belirlenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu amaçla, türetilen ilk doğrultu-kenar ağına iki yeni nokta eklenerek bilinmeyen sayısı 18'den 24'e çıkartılmalıdır. Serbestlik derecesinin aynı kalması için ölçü sayısı da 38'den 44'e çıkarılmıştır. Tablo 4 (C)'de verilen son doğrultu ağına ilişkin ortalama başarı oranları incelenip Tablo 4 (A)'dakilerle karşılaştırıldığında, bilinmeyen sayısındaki artış durumunda bu yöntemlerin başarılarının azaldıkları görülmektedir.

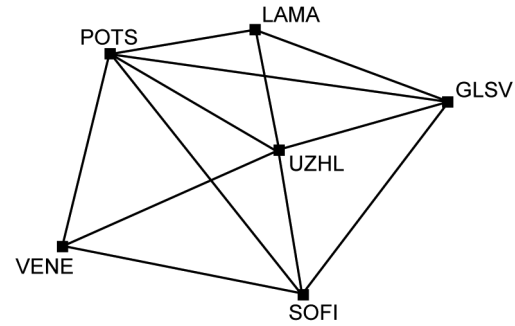
Elde edilen sonuçlara göre Danimarka, Hampel, Huber ve L_1 -norm yöntemleri doğrultu-kenar ağlarında oldukça başarılıdır. Ölçü kümesi uyuşumsuz ölçü içermiyorsa bu robust yöntemler iyi bir ölçüyü sanki uyuşumsuzmuş gibi belirleyebilmektedir. Buna karşın BAARDA yöntemi bunu daha az sayıda belirleyebilmektedir. Doğrultu-kenar ağlarında tüm durumlarda robust yöntemler BAARDA testinden daha başarılıdır.

9.5 GPS Ağı

Bu bölümde GPS taşıyıcı faz ölçülerinin değerlendirilmesiyle elde edilen baz vektörleri aslında noktalar arasındaki koordinat bileşenlerinin farkları biçimindedirler. GPS tekniğiyle bulunan bu büyüklükler üç boyutlu bir referans dik koordinat sisteminde belirlenmektedirler. Robust yöntemleri kullanarak GPS ağlarında uyuşumsuz ölçü analizi gerçekleştirebilmek için, Uluslararası GPS Servisi (IGS) noktalarına dayalı bir GPS ağı oluşturulmuştur (Şekil 4). Bu amaçla 6 IGS noktası seçilerek 24 saatlik veri dosyaları SOPAC (Scripps Orbit and Permanent Array Center) servisi veri tabanından alınmıştır.

Toplam 36 baz bileşeninden oluşan GPS ağına bilinmeyen sayısı 18, serbestlik derecesi 18, en uzun baz vektörü yaklaşık 1023 km, en kısa baz vektörü ise 595 km civarındadır. GPS verileri BERNESE v. 4.2 akademik yazılımı ile uzun bazlar ve uzun oturum süreleri için önerilen strateji kullanılarak değerlendirilmiştir. Sonuçta elde edilen baz vektörleri ($\dot{A}X$, $\dot{A}Y$, $\dot{A}Z$) hatasız ölçüler olarak kabul edilmiştir. İyi baz bileşenlerini elde etmek için hatasız baz bileşenlerine normal dağılmış rasgele sayılar eklemiştir. Daha sonra örnek küme içinden rasgele olarak seçilen baz bileşenlerindeki rasgele hata kaldırılarak yerine kaba hata eklenmiştir. Bu şekilde, uyuşumsuz ölçü içeren birbirinden farklı 100×100 tane farklı GPS ağı elde edilmiştir. Hesaplamalar MATLAB teknik programlama yazılımında gerçekleştirilmiştir. Baz

bileşenlerine ilişkin kovaryans matrisi serbest ağ dengelenmesinde dikkate alınmamıştır.



Şekil 4: Kullanılan GPS ağı

BAARDA testi ve robust yöntemler kullanılarak kirletilmiş GPS ağına uyuşumsuz ölçü analizi yapılmıştır ve elde edilen ortalama başarı oranları Tablo 5 (A)'da görüldüğü gibidir.

Önceki sayısal uygulamalarda serbestlik derecesinin uyuşumsuz ölçü analizinde çok önemli olduğu görülmüştü. Aynı etkiyi GPS ağlarında da ortaya koyabilmek için Şekil 4'te görülen ağa yeni bir baz ölçüsü eklenerek ölçü sayısı 39'a çıkarılmış ve dolayısıyla ağın serbestlik derecesi 21'e çıkmıştır. Bu yeni GPS ağından elde edilen ve Tablo 5 (B)'de verilen ortalama başarı oranları incelenerek, bir önceki ağın Tablo 5 (A)'da verilen sonuçlarıyla karşılaştırıldığında serbestlik derecesi arttıkça yöntemlerin ortalama başarı oranlarının yükseldiği açıkça görülmektedir.

Tablo 5: GPS ağına ilişkin ortalama başarı oranları

Kestirim Yöntemi	Kaba Hata Genliği	Kaba Hata Sayısı	(A) (%)	(B) (%)	(C) (%)
Baarda			00	02	00
Andrews			28	30	27
Danimarka	$>3\sigma$	0	06	11	06
Hampel			00	03	00
Huber			00	01	00
L_1 -norm			22	15	20
Baarda			07	14	08
Andrews			59	67	67
Danimarka	$3\sigma-6\sigma$	1	64	77	76
Hampel			54	82	75
Huber			51	71	62
L_1 -norm			59	72	70
Baarda			89	93	91
Andrews			42	58	48
Danimarka	$6\sigma-12\sigma$	1	88	88	92
Hampel			95	96	98
Huber			93	96	96
L_1 -norm			87	88	89

Ayrıca bilinmeyen sayısındaki değişimin bu yöntemlerin ortalama başarı oranlarına olan etkisini araştırmak amacıyla Şekil 4'teki GPS ağından LAMA noktası atılmıştır. Ancak bu noktayla bağlantılı olan bazın iptal olması nedeniyle serbestlik derecesinde bir azalma ortaya çıkacaktır. Bunun ortalama başarı oranlarına olan etkisini görmek için ağa yeni baz

eklenmiş ve serbestlik derecesi korunmuştur. Oluşturulan son GPS ağına ilişkin ortalama başarı oranları Tablo 5 (C)'deki gibidir. Bu sonuçlar Tablo 5 (A)'daki ortalama başarı oranlarıyla karşılaştırıldığında, bilinmeyen sayısı azalınca yöntemlerin ortalama başarı oranlarının arttığı görülmektedir. Tablo 5 incelendiğinde, kaba hatanın genliği büyüdükçe Andrews yöntemi dışındakilerin ortalama başarı oranları yükselmektedir. Bunun yanında, uyumsuz ölçü sayısı arttıkça kullanılan kestiricilerin ortalama başarı oranları azalmaktadır. Kısıtlı yer olması nedeniyle ikili uyumsuz ölçüye ilişkin sonuçlar verilememiştir.

Sonuçlar ve Öneriler

Bu çalışmada, jeodezik ağlarda uyumsuz ölçülerin belirlenmesi amacıyla kullanılan BAARDA yaklaşımının ve robust yöntemlerin güvenilirlikleri, ortalama başarı oranı kavramıyla ölçülmüştür. Yapılan araştırmalara göre, bu yöntemlerin ortalama başarı oranları; ölçülerin redundans paylarına, bilinmeyen sayısına, serbestlik derecesine, kaba hatanın türüne, sayısına ve genliğine göre değişim göstermektedir. Jeodezik ağlarda bilinmeyen sayısının artması halinde ortalama başarı oranları azalmakta, serbestlik derecesinin artması durumunda ise ortalama başarı oranları artmaktadır. Kaba hatanın türüne göre inceleme yapıldığında ise ortak etkilenmiş türdeki uyumsuz ölçülere ilişkin ortalama başarı oranlarının, rasgele türe göre daha küçük oldukları görülmüştür. Ağlarda birden fazla uyumsuz ölçü olması durumunda robust yöntemler daha başarılıdır.

Özetlenecek olursa, çok sayıda örnek kümeye dayanan uygulama sonuçlarına göre en başarılı robust yöntemler şöyle sıralanabilir: Doğrultu ağlarında Danimarka, Hampel, Huber ve L_1 -norm yöntemleri; kenar ağlarında Danimarka ve L_1 -norm yöntemleri; Doğrultu-kenar ağlarında Danimarka, Hampel, Huber ve L_1 -norm yöntemleri; Nivelman ağlarında Danimarka, Hampel ve L_1 -norm yöntemleri; GPS ağlarında Danimarka, Hampel ve L_1 -norm yöntemleri. Özellikle kenar ağlarında serbestlik derecelerinin oldukça düşük olması sebebiyle, elde edilen ortalama başarı oranları da oldukça küçüktür. Ayrıca doğrultu ve doğrultu-kenar ağlarında yöneltme bilinmeyenlerinin yaklaşık değerlerinin kestirilmesinde medyan kullanılmalıdır.

Gerçekleştirilen uygulamalara göre, jeodezik ağlarda uyumsuz ölçülerin belirlenmesinde robust yöntemler kullanılmalıdır. Bununla birlikte, örnek kümede uyumsuz ölçü olmamasına karşın robust kestiricilerin bazı durumlarda iyi bir ölçüyü uyumsuzmuş gibi belirleyebildiğine de dikkat edilmelidir.

Kaynaklar

- AKSOY A.: **Uyuşumsuz ölçüler testi**, Harita Dergisi, Sayı 93, 1984, s. 15 – 24, Ankara.
- ANDREWS D.: **A robust method for multiple linear regression**, Technometrics, Vol. 16, 1974, s. 523 – 531.

- AWANGE J. L., ADUOL F. W. O.: **An evaluation of some robust estimation techniques in the estimation of geodetic parameters**, Survey Review, Vol. 35, Sayı 273, 1999, s. 146 – 162.
- AYAN T.: **Uyuşumsuz ölçüler testi**, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, Sayı 72, 1992, s. 38 – 46.
- AYHAN M. E., AKSOY Z. N.: **Robust kestirim ve kaba hatalı ölçülerin belirlenmesi**, Harita Dergisi, Sayı 106, 1992, s.22 – 39, Ankara.
- BAARDA W.: **A testing procedure for use in geodetic networks**, Publication on Geodesy, New series 2, Sayı 5, Netherlands Geodetic Commission, 1968, Delft.
- BARRADOLE I., ROBERTS F. D. K.: **Solution of an over determined system of equations in L_1 norm**, Comm ACM, Sayı: 17, 1974, s. 319 – 320.
- BENNING W.: **Vergleich dreier Ip-schaetzer zur fehlersuche in hybriden lagenetzen**, Z Vermessungswesen, Sayı 12, 1995, s. 606 – 617.
- BERBER M., HEKİMOĞLU Ş.: **What is the reliability of robust estimators in networks?**, Proceedings. 1st International Symposium on Robust Statistics and Fuzzy Techniques in Geodesy and GIS March 12-16 2001, ETH, Zurich, s. 61 – 66.
- CASPARY W., BORUTTA H.: **Robust estimation in deformation models**, Survey Review, Vol. 29, Sayı 223, 1987, s. 29 – 45.
- CHATTERJEE S., HADI A. S.: **Sensitivity analysis in linear regression**, John Wiley and Sons Inc., ISBN: 978-0-471-82216-5, New York, N.Y., 336 pages, 1988.
- FUCHS H.: **Contribution to the adjustment by minimizing the sum of absolute residuals**, Manusc. Geod., Vol. 7, 1982, s. 151 – 207.
- DEMİREL H.: **Nirengi ağlarının dengelenmesi ve sonuçların test edilmesi**, Harita Dergisi, Sayı 98, 1987, s. 1 – 18, Ankara.
- DEMİREL H.: **Dengeleme hesabı**, YTÜ İnşaat Fakültesi, ISBN: 975-461-375-3, İstanbul, 244 sayfa, 2005.
- EDGEWORTH F. Y.: **A new method of reducing observations relating to several quantities**, Philosophical Magazine (Fifth Series), Vol: 24, 1987, s. 222 – 223.
- GAO Y., KRAKINWSKY E. J., CZOMPO J.: **Robust testing procedure for detection of multiple blunders**, J Surv Engrg, ASCE, Vol. 118, Sayı 1, 1992, s. 11 – 23.
- HAMPEL F.: **The influence curve and its role in robust estimation**, J. Am. Statist. Assoc., Vol. 69, 1974, s. 383–393.
- HAMPEL F., RONCHETTI E., ROUSSEEUW P., STAHEL W.: **Robust statistics: the approach based on influence functions**, John Wiley and Sons Inc., ISBN: 978-0-471-73577-9, New York, N.Y., 536 pages, 1986.
- HARVEY P. R.: **Survey network adjustments by the L_1 method**, Aust J Geod Photogram Surv, Vol. 59, 1993, s. 39 52.
- HEKİMOĞLU Ş., AYAN T. AKTAŞ A. O.: **Birden fazla uyumsuz ölçünün robust kestirim yöntemleriyle belirlenmesi**, Prof. Dr. Wolf Jeodezi Sempozyumu, İstanbul, 1994.
- HEKİMOĞLU Ş.: **The finite sample breakdown points of the conventional iterative outlier detection procedures**, J. Surv Engrg, ASCE, Vol. 123, Sayı 1, 1997, 15 – 31.
- HEKİMOĞLU Ş., KOCH K. R.: **How can reliability of the robust methods be measured?**, Proceedings, In: Altan MO, Gründig L (eds), Third Turkish-German Joint Geodetic Days, Istanbul, 1-4 June, 1, 179 196, 1999.
- HEKİMOĞLU Ş., KOCH K. R.: **How can reliability of tests for outliers be measured?**, Allg. Vermessungs-Nachr, Vol. 107, Sayı 7, 2000, s. 247 254.
- HEKİMOĞLU Ş., BERBER M.: **Reliability of robust methods in heteroscedastic linear models**, Proceedings, IAG 2001, Scientific Assembly, Budapest, Abstract book: 53, 2001.
- HEKİMOĞLU Ş., BERBER M.: **Effectiveness of robust methods in heterogeneous linear models**, Journal of Geodesy, Vol. 76, Sayı 11-12, 2003, s. 706 – 713.
- HEKİMOĞLU Ş.: **Do robust methods identify outliers more reliably than conventional tests for outliers?**, Z Vermessungswesen, Vol. 05/03, 2005, s. 174 – 180.

- HEKİMOĞLU Ş.: **Kaba hataların belirlenmesindeki sorunlar**, Harita Dergisi, Sayı 05/03, 2005, s. 174 – 180.
- HEKİMOĞLU Ş., ERENOĞLU R. C.: **Nivelman Ağlarında Robust Yöntemlerle Kaba Hata Analizi ve Sonuçların Klasik Yöntemle Karşılaştırılması, 2. Ulusal Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu**, İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul, 23-25 Kasım 2005, s. 481 – 490.
- HEKİMOĞLU Ş., ERENOĞLU R. C.: **Effect of heteroscedasticity and heterogeneousness on outlier detection for geodetic networks**, Journal of Geodesy, Vol. 81, Sayı 2, 2007, s. 137 – 148.
- HUBER P. J.: **Robust estimation of a location parameter**, Ann. Math. Statist., Vol. 36, 1964, s. 73-101.
- HUBER P. J.: **Robust statistical procedures**, Society for Industrial and Applied Mathematics, ISBN: 978-0-898-71024-3, 56 pages, Pittsburgh, Philadelphia, 1977.
- HUBER P. J.: **Robust statistics**, John Wiley and Sons, Inc., ISBN: 978-0-471-41805-4, New York, N.Y., 320 pages, 1981.
- JORGENSEN P. C., POUL F., KUBIK K., WILLY, W.: **Ah, Robust Estimation!**, XV Congress of the International Society for the Photogrammetry and Remote Sensing, Rio de Janeiro, 1984.
- KAMPMANN G.: **Zur ausgleichung freier netze mit der II norm-methode**, Allg. Vermessungs-Nachr, Vol. 96, 1989, s. 110 – 118.
- KOCH K. R.: **Robuste parameterschaetzung**, Allg. Vermessungs-Nachr, Vol. 103, 1996, s. 1 – 18.
- KOCH K. R.: **Parameter estimation and hypothesis testing in linear models**, 2nd Ed., Springer-Verlag, ISBN: 978-3-540-65257-1, Berlin Heidelberg, New York, N.Y., 333 pages, 1999.
- KRARUP T., JUHL J., KUBIK K.: **Götterdaemmerung over least squares adjustment**, Proceedings, 14th Congress of Int. Soc. Photogr., Hamburg, 1980.
- KUBIK K., WANG Y.: **Comparison of different principle for outlier detection**, Australian Journal of Geodesy, Photogrammetry and Surveying, Vol. 54, 1991, s. 67 – 80.
- MARCHALL J.: **L₁ norm pre-analysis measures for geodetic networks**, Journal of Geodesy, Vol. 76, 2002, s. 345 – 352.
- ÖZTÜRK E., ŞERBETÇİ M.: **Dengeleme hesabı**, Cilt III, KTÜ Yayınları, Trabzon, 1992.
- ROUSSEUW P. J., LEROY A. M.: **Robust regression and outlier detection**, John Wiley and Sons, Inc., ISBN: 978-0-471-85233-9, New York, N.Y., 352 pages, 1987.
- POPE A. J.: **The statistics of residuals and the outlier detection of outliers**, NOAA, Technical Report, NOS 65, NGS 1, Rockville, MD, 1976.
- WICKI F.: **Robuste schätzverfahren für die parameterschätzung in geodätischen netzen**, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der ETH, Zürich, Mitt. Nr. 67, 1999.
- WILCOX R. R.: **Introduction to robust estimation and hypothesis testing**, Academic Press, ISBN: 978-0-127-51542-7, New York, N.Y., 608 pages, 1997.
- WOLF H.: **Ausgleichsrechnung I - Aufgaben und beispiele zur praktischen Anwendung**, Dümmlers Verlag, Bonn, 1979.
- YAŞAYAN A.: **Robust kestirim kavramı, ilkesi ve uygulamaları üzerine irdelemeler**, Harita ve Kadastro Mühendisliği Dergisi, Sayı 72, 1992, s. 56 – 66.
- YOUCAI H.: **On the design of estimators with high breakdown points for outlier identification in triangulation networks**, Bull. Geo., Vol. 69, 1995, s. 292 – 299.
- XU P. L.: **Statistical criteria for robust methods**, ITC Journal, Vol 1, 1989, s. 37 – 40.