

Tablo Değerleri ile Tanımlı Polikonik Projeksiyonların Matematiksel Modeli ve Bir Uygulama: Ginzburg VI Projeksiyonu

Cengizhan İPBÜKER¹, İ. Öztuğ BİLDİRİCİ², Mustafa YANALAK³

Özet

Harita projeksiyonları, bazen projeksiyon eşitlikleri ile değil, belirli enlem ve/veya boylam aralıkları için verilen tablo değerleri ile tanımlanırlar. Sovyetler Birliği döneminde geliştirilerek kullanılmış Ginzburg projeksiyonları, tablo koordinatları ile tanımlanmışlardır. Bu çalışmada Ginzburg'un tablo tanımlı projeksiyonlarından polikonik olanların matematiksel modeli ortaya konmuştur. Bu bağlamda tablo değerlerine bağlı olarak orta meridyene (0°) ve dış meridyene (180°) fonksiyon uydurmak için polinom ve radyal bazlı fonksiyonlardan yararlanılmıştır. Önerilen yaklaşım Ginzburg'un polikonik projeksiyonlarından Ginzburg VI üzerinde test edilmiştir.

Anahtar Sözcükler

Tablo değerleriyle tanımlı harita projeksiyonları, Değiştirilmiş polikonik Projeksiyonlar, Ginzburg VI Projeksiyonu, Radyal bazlı fonksiyonlar

Abstract

Mathematical Model of Table-based Polyconic Map Projections: A Case Study for the Ginzburg VI Projection

Some map projections are defined by tabular coordinates computed for certain latitude/longitude values rather than mathematical equations. The Ginzburg projections, which were developed and used in the former Soviet Union, are among those of table-based world projections. In this paper, polynomials and radial basis functions, such as multiquadric and thin-plate spline functions, are applied to derive an analytical expression based on the tabular coordinates given for the Ginzburg VI projection. An extensive distortion analysis is also given.

Keywords

Table-based projections, modified polyconic projections, The Ginzburg VI projection, radial basis functions

1. Giriş

Harita projeksiyonu, fiziksel yeryüzü üzerindeki nesnelerin geometrisi ve topolojisini bir harita düzlemine aktarma işleminin teorisi ve yöntemleri olarak tanımlanır. (CANTERS ve DECLAIR 1989, BUGAYEVSKIY ve SNYDER 1995). Harita projeksiyonu aynı zamanda dünyanın küresel görüntüsünü temsil eden meridyen ve paralel ağının (coğrafi

koordinat ağının) belirli bir matematik kural ile harita düzlemine izdüşümüdür. (RICHARDUS ve ADLER 1972, MALING 1992).

Harita düzlemi üzerindeki bir noktanın x , y dik koordinatları,

$$x = f_x(\phi, \lambda) \quad y = f_y(\phi, \lambda)$$

şeklinde ϕ , λ coğrafi koordinatlarının birer fonksiyonu olarak ifade edilirler. Harita projeksiyonları ile ilgili kaynaklarda yer alan bazı harita projeksiyonları, matematiksel bağıntılar yerine tablo değerleri verilerek tanımlanmışlardır. Robinson projeksiyonu bu tanıma uyan projeksiyonlardan en çok bilinenidir. (ROBINSON 1974, İPBÜKER 2005). Prof. Dr. Arthur H. Robinson (1915-2004) 1963 yılında kendi adı ile anılan pseudosilindirik (gerçek anlamda olmayan silindirik) projeksiyonu 5'er derece enlem aralıklarına karşılık iki tablo halinde düzenlenmiş katsayılar ile deneysel olarak tasarlamıştır.

Sovyetler Birliği döneminde G.A. Ginzburg tarafından geliştirilen ve kendi adı ile anılan Ginzburg projeksiyonları da tablo değerleri ile tanımlı harita projeksiyonları arasında yer alır. Yeryüzünün tamamının gösterildiği diğer harita projeksiyonları ile karşılaştırıldığında Ginzburg projeksiyonlarının, deformasyonları kabul edilebilir sınırlar içerisinde tutan az sayıda projeksiyon içinde yer aldığı görülür.

Yakın tarihli çalışmalardan biri, Karlova Üniversitesi'nden (Çekoslovakya) Prof. Richard Capek yeryüzünü planisfer olarak gösteren 100 projeksiyonu, ki Planisfer kavramı, dünyanın tek parça halinde gösterilmesini ifade eder, Q ile gösterdiği bir global alan deformasyonu kriteri altında inceleyerek, en uygun harita projeksiyonunu bulmaya çalışmıştır. Ginzburg V projeksiyonu Capek'in listesinde birinci sıradadır. (CAPEK 2001a, CAPEK 2001b).

Ginzburg, 10 derece aralıklı coğrafi koordinat ağına ait noktaların projeksiyon koordinatlarını tablolar halinde sunmuştur. Coğrafi koordinatları ile belirli herhangi bir noktanın projeksiyon koordinatları, bu tablo koordinatları kullanılarak uygun bir enterpolasyon yöntemi ile belirlenecektir. Deformasyon büyüklüklerinin analizi ise ayrı bir tablo halinde verilen değerlerden yararlanılarak yapılacaktır. Ginzburg'un sunduğu ve Maling tarafından yapılan numaralandırmaya göre IV, V ve VI ile BSE 1966 olarak anılan projeksiyonlar,

¹Doç.Dr., buker@itu.edu.tr, Kartografya A.B.D.;

²Doç.Dr.,SÜ, Mühendislik Fakültesi, Jeodezi ve Fotogrametri Müh.Böl., Kartografya A.B.D. Konya, iobildirici@yahoo.com;

³Doç.Dr., yanalak@itu.edu.tr, Ölçme Tekniği A.B.D.; İTÜ, İnşaat Fak., Jeodezi ve Fotogrametri Müh. Böl., 34469 Maslak-İstanbul

$$\begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= f(\phi) \\ x_B &= g(\phi) \\ y_B &= h(\phi) \end{aligned} \quad (3)$$

Bu tür projeksiyonlardan bazılarında orta meridyende ölçek korunduğundan $y_A = \phi$ olur ve yalnızca $g(\phi)$ ve $h(\phi)$ fonksiyonlarının, başka bir deyişle dış meridyenin projeksiyondaki izdüşümü olan eğrinin belirlenmesi gereklidir. Bu fonksiyonların bilindiği varsayılırsa, P noktasının (Şekil-1) projeksiyon koordinatları (C noktası P den geçen paralelin merkezi olmak üzere) aşağıdaki gibi elde edilebilir.³

$$\begin{aligned} (y_C - y_B)^2 + x_B^2 &= (y_C - y_A)^2 \\ y_C &= \frac{y_B^2 + x_B^2 - y_A^2}{2(y_B - y_A)} \\ m = y_C - y_A &= \frac{y_B^2 + x_B^2 - y_A^2}{2(y_B - y_A)} - y_A \\ m &= \frac{x_B^2 + (y_B - y_A)^2}{2(y_B - y_A)} \\ \alpha_{180^\circ} &= \arcsin\left(\frac{x_B}{m}\right) \\ \alpha &= \frac{\arcsin\left(\frac{x_B}{m}\right)}{\pi} \lambda \\ x &= m \sin \alpha \\ y &= y_A + m - m \cos \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

Orta meridyenin ölçek koruması halinde $y_A = \phi$ olacağından, projeksiyon eşitlikleri yalnızca dış meridyenin tanımına bağlı olmaktadır.

Projeksiyon düzleminde ekvatorun izdüşümü doğru parçası olduğundan, ekvator üzerindeki noktaların projeksiyon düzlemindeki koordinatları aşağıdaki gibi hesaplanmalıdır.

$$\begin{aligned} x &= \frac{(x_B)_{\phi=0}}{\pi} \lambda \\ y &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Ginzburg projeksiyonlarında çeyrek küreyi oluşturan 10° aralıklı enlem ve boylam değerlerine karşılık gelen düzlem koordinatları verilmiştir. Ancak Ginzburg'un polikonik projeksiyonları için matematiksel model belli olduğundan bu değerlerden yalnızca orta ve dış meridyeni tanımlayan değerler dikkate alınmalıdır. Sonuç olarak bu tablolarda orta ve dış meridyen 10° ar nokta ile tanımlıdır.

2.1 Dış ve orta meridyen için polinom yaklaşımı

SNYDER (1993) Ginzburg polikonik projeksiyonları için aşağıdaki polinom eşitliklerini bazı projeksiyonlar için katsayıları ile birlikte vermiştir:

$$\begin{aligned} x_A &= 0 \\ y_A &= c_1 \phi + c_2 \phi^3 \\ x_B &= c_3 + c_4 \phi^2 + c_5 \phi^4 \\ y_B &= c_6 \phi + c_7 \phi^3 \end{aligned} \quad (7)$$

Orta meridyen üzerinde ölçek koruma durumunda $y_A = \phi$ olacağından (7) eşitliğindeki polinomun kullanılması gereği ortadan kalkar.

BİLDİRİCİ vd. (2006) Ginzburg IV, V ve VI için bu polinom katsayılarını en küçük kareler dengelemesiyle tablo değerlerinden yeniden elde etmiş ve SNYDER (1993) tarafından verilen katsayıların tutarlı olduğunu belirlemiştir. Bu çalışmada katsayıları ait karesel ortalama hataların çok düşük olduğu, dolayısıyla Snyder tarafından verilen polinomların orta meridyen ve dış meridyene oldukça iyi uyduğu görülmüştür.

Deformasyon analizi için gerekli kısmi türevler ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_A}{\partial \phi} &= 0 & \frac{\partial y_A}{\partial \phi} &= c_1 + 3c_2 \phi^2 \\ \frac{\partial x_B}{\partial \phi} &= 2c_4 \phi + 4c_5 \phi^3 & \frac{\partial y_B}{\partial \phi} &= c_6 + 3c_7 \phi^2 \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 Radyal bazlı fonksiyonlar ile nümerik yaklaşım

Yakın geçmişte radyal bazlı fonksiyonlar teorisi (Radial Basis Functions-RBFs) birçok araştırmada uygulama alanı bulmuştur. Özellikle rasgele dağılmış verilerin veya çok değişkenli rastlantısal fonksiyonların enterpolasyonu için başarılı bir teknik olarak nitelendirilmektedir. (HARDY 1971, HARDY 1990, YANALAK ve BAYKAL 2001, YANALAK 2003, YANALAK ve BAYKAL 2003, YANALAK 2004, İPBÜKER 2005, YANALAK 2005). İlgili kaynaklarda çeşitli radyal bazlı fonksiyonlar tanımlanmaktadır. Bunlardan yaygın kullanılanlar, ince levha spline (Thin Plate Spline-TPS), düzgün spline, kübik spline, Gaussian ve multikvadrik (Multiquadric-MQ) fonksiyonlarıdır. (FOGEL ve TINNEY 1996, AMIDROR 2002).

RBF ailesinde yumuşak yüzey ya da eğri olma özelliği olan MQ ve TPS fonksiyonları, polikonik projeksiyonlarda dış meridyene eğri uydurma problemine kolaylıkla uygulanabilir. Burada orta meridyen için (7) eşitliğinde verilen polinomun yeterli olduğu kabul edilerek, yalnızca dış meridyen için alternatif eğri uydurma yaklaşımları ele alınacaktır. MQ fonksiyonu, dış meridyen eğrisi için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

³Matematiksel eşitliklerde açı birimi radyan olup, birim küre esas alınmıştır.

$$x_B = \sum_{i=1}^n c_{x_i} \sqrt{(\phi - \phi_i)^2 + \Delta^2}$$

$$y_B = \sum_{i=1}^n c_{y_i} \sqrt{(\phi - \phi_i)^2 + \Delta^2}$$

Burada ϕ_i değerleri, tabloda 180° meridyeni için onar derece aralıkla verilmiş enlem değerleridir. Açık birimi istenildiği gibi alınabilir, ancak bu çalışmada radyan olarak alınmaktadır. (10) eşitliklerindeki Δ^2 ise sabit bir değer olup, eğrinin yumuşaklığını belirler. Δ^2 sıfır olduğunda eğri en sert halini alır. Değer büyüdükçe yüzey yumuşar, ancak bu değer istenildiği gibi büyütülemez, belli bir değerden sonra eğri tanımsız hale gelir. BİLDİRİCİ vd. (2006), polikonik projeksiyon problemi için bu değer enlemin değişme aralığında ortalama bir değer

alınmasını önermektedir. Buna göre enlem $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ aralığında değiştiğinden $\Delta^2 = 1$ olarak alınabilir. Şüphesiz Δ^2 nin seçiminde MQ fonksiyonunun tüm uygulamaları için kesin bir değer bulunmamaktadır. Çeşitli uzmanlar çeşitli yaklaşımlar önermektedirler (HARDY 1990, AMIDROR 2002).

(10) eşitliğindeki katsayıların (c_{x_i} , c_{y_i}) bulunması için eşitlik bilinen bütün noktalar için yazılmaya çalışıldığında iki ayrı formda lineer denklem takımları elde edilir.

$$d_{i,j} = \sqrt{(\phi_i - \phi_j)^2 + \Delta^2}$$

$$x_{B_1} = c_{x_1} d_{1,1} + c_{x_2} d_{1,2} + \dots + c_{x_{10}} d_{1,10}$$

$$x_{B_2} = c_{x_1} d_{2,1} + c_{x_2} d_{2,2} + \dots + c_{x_{10}} d_{2,10}$$

....

$$y_{B_1} = c_{y_1} d_{1,1} + c_{y_2} d_{1,2} + \dots + c_{y_{10}} d_{1,10}$$

$$y_{B_2} = c_{y_1} d_{2,1} + c_{y_2} d_{2,2} + \dots + c_{y_{10}} d_{2,10}$$

Lineer denklem takımı çözüldüğünde istenen katsayılar elde edilecektir.

$$d_{i,j} \in D$$

$$x_B = D c_x \Rightarrow c_x = D^{-1} x$$

$$y_B = D c_y \Rightarrow c_y = D^{-1} y$$

Deformasyon analizi için gerekli olan kısmi türevler ise aşağıdaki gibi çıkarılabilir:

$$\frac{\partial x_B}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n c_{x_i} \frac{\phi - \phi_i}{\sqrt{(\phi - \phi_i)^2 + \Delta^2}}$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n c_{y_i} \frac{\phi - \phi_i}{\sqrt{(\phi - \phi_i)^2 + \Delta^2}}$$

Dış meridyeni temsil eden TPS fonksiyonu:

$$x_B = \sum_{i=1}^n c_{x_i} (\phi - \phi_i)^2 \ln(\phi - \phi_i)$$

$$y_B = \sum_{i=1}^n c_{y_i} (\phi - \phi_i)^2 \ln(\phi - \phi_i)$$

MQ fonksiyonlarının katsayılarının çözümüne benzer şekilde iki lineer denklem takımı oluşturulur. Ancak bu durumda (11) ve (12) eşitliklerinde

$$d_{i,j} = (\phi_i - \phi_j)^2 \ln(\phi_i - \phi_j)$$

alınacaktır.

Kısmi türevler;

$$\frac{\partial x_B}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n c_{x_i} (\phi - \phi_i) (2 \ln(\phi - \phi_i) + 1)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \phi} = \sum_{i=1}^n c_{y_i} (\phi - \phi_i) (2 \ln(\phi - \phi_i) + 1)$$

şeklinde yazılabilir.

2.3 Deformasyon Analizi

Meridyen doğrultusundaki (h) ve paralel daireler doğrultusundaki (k) lokal ölçek bozulmaları aşağıdaki eşitlikler yardımıyla hesaplanır:

$$m = \frac{x_B^2 + (y_B - y_A)^2}{2(y_B - y_A)} = \frac{P}{Q}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = 2x_B \frac{\partial x_B}{\partial \phi} + 2(y_B - y_A) \frac{\partial y_B}{\partial \phi} - 2(y_B - y_A) \frac{\partial y_A}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \phi} = 2 \frac{\partial y_B}{\partial \phi} - 2 \frac{\partial y_A}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial m}{\partial \phi} = \frac{\frac{\partial P}{\partial \phi} Q - P \frac{\partial Q}{\partial \phi}}{Q^2}$$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{x_B}{m}\right)}{\pi} \lambda$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} = \frac{\arcsin\left(\frac{x_B}{m}\right)}{\pi}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \phi} = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_B^2}{m^2}}} \frac{\frac{\partial x_B}{\partial \phi} m - x_B \frac{\partial m}{\partial \phi}}{m^2}$$

$$x = m \sin \alpha$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \frac{\partial m}{\partial \phi} \sin \alpha + m \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \quad (22)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = m \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \quad (23)$$

$$y = y_A + m - m \cos \alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial y_A}{\partial \phi} + \frac{\partial m}{\partial \phi} - \left(\frac{\partial m}{\partial \phi} \cos \alpha - m \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} \right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = m \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \quad (25)$$

Orta meridyende ölçek korunuyorsa 17-25 eşitliklerinde $y_A = \phi$ alınmalıdır. Meridyen ve paraleller yönündeki deformasyonlar aşağıdaki gibidir.

$$h = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2} \quad (26)$$

$$k = \frac{1}{\cos \phi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2}$$

Ekvatorun izdüşümü yatay bir doğru parçası olduğundan h ve k deformasyon miktarları ekvator üzerindeki noktalar için yukarıdaki formüllerle hesaplanamaz. Ekvator üzerindeki noktalar için paraleller yönündeki deformasyon, ekvator üzerindeki uzunluğun küre üzerindeki uzunluğa oranı olarak kolayca bulunabilir.

$$k = \frac{2(x_A)_{\phi=0}}{2\pi} \quad (27)$$

Ekvator üzerindeki noktalarda meridyen yönünde deformasyonları bulmak için, orta meridyen ve dış meridyenin ekvatoru kestiği noktalardaki deformasyonlardan yararlanır. Orta meridyen üzerinde;

$$x_A = 0$$

$$y_A = f(\phi)$$

$$h_A = \left(\frac{\partial y_A}{\partial \phi} \right)_{\phi=0} \quad (28)$$

dış meridyende;

$$h_B = \left(\frac{\partial y_B}{\partial \phi} \right)_{\phi=0}$$

(5) eşitliğine benzer olarak;

$$m = \frac{x_B^2 + (h_B - h_A)^2}{2(h_B - h_A)} \quad (29)$$

$$\alpha = \frac{\arcsin\left(\frac{x_B}{m}\right)}{\pi} \lambda$$

$$h = h_A + m - m \cos \alpha$$

yazılabilir. Orta meridyende ölçek koruma durumunda (28) ve (29) eşitliklerinde alınmalıdır.

Gerçek anlamda olmayan projeksiyonlarda maksimum ve minimum deformasyon yönleri meridyen ve paraleller yönünde olmadığından herhangi bir noktadaki maksimum ve minimum uzunluk deformasyonları a ve b aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$(a+b)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2$$

$$(a-b)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} - \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 \quad (30)$$

Buradan alan deformasyonu;

$$p = ab \quad (31)$$

maksimum doğrultu deformasyonu;

$$\sin \omega = \frac{a-b}{a+b} \quad (32)$$

ve açı deformasyonu,

$$w = 2\omega \quad (33)$$

şeklinde elde edilir.

3. Uygulama: Ginzburg VI projeksiyonu

Ginzburg tarafından tablo değerleri ile tanımlanan polikonik projeksiyonlardan biri Ginzburg VI projeksiyonudur (GINZBURG ve SALMANOVA 1957). Diğer projeksiyonlar için verilen tablolarda olduğu gibi bu projeksiyonun tablosunda da x ve y (x sağa, y yukarı) koordinatları küre yarıçapı 6 371 116 m alınarak 1:10 000 000 ölçeğinde cm biriminde verilmiştir. Bu çalışmada birim kürede çalışmak tercih edildiğinden tabloda verilen koordinatlar 100000/6371116 katsayısı ile çarpılarak kullanılmıştır. Orta meridyen ve dış meridyen için orijinal ve normalize edilmiş (birim küre için) koordinatlar Tablo-1 ve Tablo-2 de verilmiştir.

Tablo-1: Ginzburg VI projeksiyonunda orta meridyen için tablo koordinatları

φ		orijinal tablo koordinatları (cm)		normalize edilmiş koordinatlar	
o	radyan	x	y	x	y
0	0.000000	0.000	0.000	0.000000	0.000000
10	0.174533	0.000	11.074	0.000000	0.173816
20	0.349066	0.000	22.240	0.000000	0.349075
30	0.523599	0.000	33.588	0.000000	0.527192
40	0.698132	0.000	45.208	0.000000	0.709577
50	0.872665	0.000	57.192	0.000000	0.897676
60	1.047198	0.000	69.630	0.000000	1.092901
70	1.221730	0.000	82.611	0.000000	1.296649
80	1.396263	0.000	96.231	0.000000	1.510426
90	1.570796	0.000	110.577	0.000000	1.735599

SNYDER (1993) tarafından verilen (7) eşitliğindeki polinom katsayıları, tablo değerlerinden en küçük kareler (EKK) dengelemesi ile hesaplanmıştır. Tablo-3’de dengeleme sonucu bulunan katsayılar, katsayılar ait karesel ortalama hata (KOH) ve Snyder tarafından verilen katsayılar verilmiştir.

Tablo-2: Dış meridyen (180°) için tablo koordinatları

φ		orijinal tablo koordinatları (cm)		normalize edilmiş koordinatlar	
o	radyan	x	y	x	y
0	0.000000	165.867	0.000	2.603421	0.000000
10	0.174533	164.648	14.904	2.584288	0.233931
20	0.349066	161.000	29.696	2.527030	0.466104
30	0.523599	154.824	44.265	2.430092	0.694776
40	0.698132	146.010	58.498	2.291749	0.918175
50	0.872665	134.386	72.285	2.109301	1.134574
60	1.047198	119.734	85.512	1.879325	1.342182
70	1.221730	101.785	98.068	1.597601	1.539259
80	1.396263	80.228	109.845	1.259246	1.724109
90	1.570796	54.693	120.726	0.858452	1.894896

Karesel ortalama hatanın neredeyse sıfır kabul edilebilecek kadar düşük çıkması polinomun tablo değerlerine çok iyi uyduğunu göstermektedir. Bu nedenle orta meridyen için başka bir fonksiyon uydurma denemesi yapılmamıştır. Tablo-3’de EKK ile bulunan katsayılar, Snyder tarafından verilenlerle karşılaştırıldığında c_1 in çok az farklı, c_2 nin ise yaklaşık aynı olduğu görülmektedir (BİLDİRİCİ vd 2006).

Tablo-3: Orta meridyen için katsayılar

	EKK	Snyder
c_1	0.994605	1.000
c_2	0.044707	0.045
KOH	0.000010	-

Deformasyonların belirlenmesi için gereken kısmi türev ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial y_A}{\partial \phi} = c_1 + 3c_2\phi^2 = 0.994605 + 0.044707\phi^2 \quad (34)$$

Snyder tarafından dış meridyen için verilen (8) eşitliğindeki polinom katsayıları da tablo değerlerine dayanarak EKK dengelemesi ile hesaplanmıştır. Burada da oldukça düşük karesel ortalama değerleri elde edilmiştir. EKK sonucu bulunan katsayılar ve karesel ortalama hataları ile Snyder tarafından verilen katsayı değerleri Tablo-4’de görülmektedir. Burada yalnızca c_3 Snyder tarafından verilen değerden çok az farklıdır (BİLDİRİCİ vd 2006).

Tablo-4: Dış meridyen için katsayılar

	EKK	Snyder
c_3	2.60337743	2.617994
c_4	-0.62271135	-0.62636
c_5	-0.03423867	-0.0344
KOHx	0.00004091	
c_6	1.34198504	13493
c_7	-0.05498080	-0.05524
KOHy	0.00000949	

Deformasyonların belirlenmesi için gereken kısmi türevler ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial x_B}{\partial \phi} = 2c_4\phi + 4c_5\phi^3 \quad (35)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \phi} = c_6 + 3c_7\phi^2$$

$\Delta^2 = 1$ alınarak dış meridyeni tanımlayan MQ fonksiyonu belirlenmiş ve elde edilen katsayılar Tablo-5’de verilmiştir.

Tablo-5: Ginzburg VI için MQ katsayıları

φ	x	y	c_x	c_y
0	2.60342144	0.00000000	0.01899141	0.02324946
10	2.58428822	0.23393076	-0.00297512	-0.00127830
20	2.52702980	0.46610358	-0.00194910	-0.00013502
30	2.43009231	0.69477624	-0.00207464	-0.00027011
40	2.29174920	0.91817509	-0.00220682	-0.00035154
50	2.10930079	1.13457360	-0.00237845	-0.00044076
60	1.87932538	1.34218244	-0.00259892	-0.00052816
70	1.59760080	1.53925937	-0.00275436	-0.00060689
80	1.25924563	1.72410925	-0.00540970	-0.00084693
90	0.85845243	1.89489565	0.04115826	0.00198274

Tablo-6: Ginzburg VI için TPS katsayıları

φ	x	y	c_x	c_y
0	2.60342144	0.00000000	0.00027405	0.00019866
10	2.58428822	0.23393076	-0.00024762	-0.00015752
20	2.52702980	0.46610358	-0.00003554	-0.00001568
30	2.43009231	0.69477624	-0.00004526	-0.00002115
40	2.29174920	0.91817509	-0.00003607	-0.00001473
50	2.10930079	1.13457360	-0.00003514	-0.00001299
60	1.87932538	1.34218244	-0.00004158	-0.00001373
70	1.59760080	1.53925937	-0.00003001	-0.00001081
80	1.25924563	1.72410925	-0.00024100	-0.00006149
90	0.85845243	1.89489565	0.00031262	0.00006820

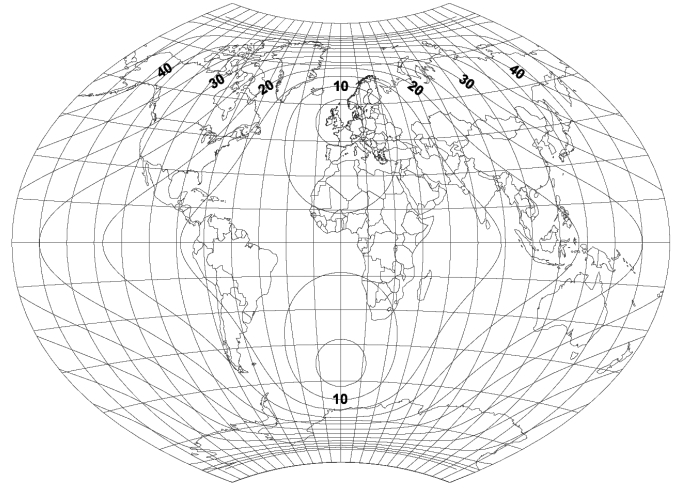
Üç değişik yolla elde edilen eğriler incelendiğinde, her üçünün de dış meridyeni yeterli düzeyde tanımladığı, ancak MQ fonksiyonunun ekvator ve kuzey kutbu civarında biraz salınım yaptığı görülmüştür (BİLDİRİCİ vd. 2006)

Projeksiyonun deformasyon özelliklerinin görselleştirilmesi için deformasyon eğrileri (alan ve açı deformasyonu için) oluşturulmuştur. Üç değişik yolla tanımlanan dış meridyen eğrisi için deformasyon analizinde polinomlar kullanılmıştır. Aynı şekilde orta meridyen için de (7) eşitliğinde verilen polinom kullanılmıştır. Sonuç olarak elde edilen eş deformasyon eğrileri Şekil-2 ve Şekil-3'de görülmektedir. Ek-A' da ise yirmişer derece aralıklarla deformasyon değerleri verilmektedir.

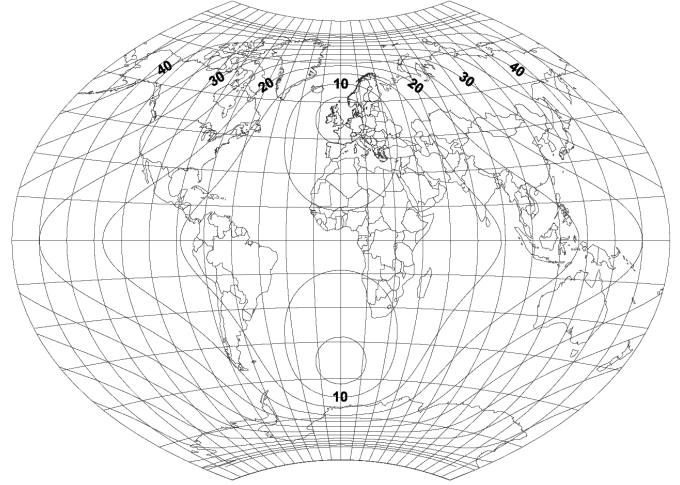
4. Sonuç

Bu çalışmada tablo değerleri ile tanımlanmış olan Ginzburg Projeksiyonlarında polikonik yapıda olanların matematiksel modeli ele alınmıştır. Bu projeksiyonlar herhangi bir elemanı (alan, açı, uzunluk) korumazlar, ancak oldukça dengeli deformasyon dağılımlarına sahiptirler. Bu avantajları nedeniyle dünya ölçeğinde kartografik çalışmalar ve CBS uygulamalarında kullanılabilirler. Ancak günümüzdeki teknoloji düzeyinde bu tür projeksiyonlar ancak matematiksel modelleri belli ise kullanılabilirler. Bu çalışma ile bu tür projeksiyonların matematiksel modelleri ortaya konmuştur. Bu bağlamda daha önceki çalışmalarda (örneğin CAPEK 2001a) ampirik olarak incelenmiş olan projeksiyon deformasyonları da analitik olarak tanımlanmış olmaktadır. Bu çalışmada hesaplanan deformasyon değerlerinin, önceden verilen ampirik değerlerle uyumlu olması da ortaya konulan modelin tutarlı olduğunu göstermektedir. Bu çalışmanın bir sonucu da burada ele alınan türde polikonik projeksiyonlarda deformasyon dağılımının dış meridyen eğrisine bağlı olduğu ve eğri değiştirilerek deformasyon dağılımının da değiştirilebileceğidir. Başka bir deyişle Dünyanın tamamının gösteriminde dış meridyen eğrisi değişime uğratılarak belli bir kuşakta deformasyonların azaltılması ya da dengeli dağılması sağlanabilir. Aslında Sovyetler Birliği döneminde bu tür projeksiyonların ortaya çıkış gerekçesi de dünya haritalarında kuzey kutbuna yakın çok büyük bir bölgeyi daha az deformasyonla gösterme çabası olarak düşünülebilir. Sonuç olarak dış meridyen eğrisi değiştirilerek burada verilen matematik modele dayanarak belli kuşaklarda deformasyonları azaltan projeksiyonlar türetmek mümkündür.

Şekil-2: Ginzburg VI projeksiyonunda eşalan deformasyonu eğrileri



Şekil-3: Ginzburg VI projeksiyonunda eşaçı deformasyonu eğrileri



Kaynaklar:

- AMIDROR, I.: **Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems**: A survey, *Journal of Electronic Imaging*, 11, pp. 157-176, 2002.
- BILDIRICI, İ.Ö., İPBÜKER, C., YANALAK, M.: **Function matching for Soviet-era table-based modified polyconic projections**, *International Journal of Geographical Information Science*, Taylor&Francis, Vol:20, No:7, August 2006, pp.769-795, 2006.
- BILDIRICI, I. O.: **Numerical inverse transformation for map projections**, *Computers & Geosciences*, 29, pp.1003-1011, 2003.
- BUGAYEVSKIY, L., SNYDER, J.P.: **Map Projections: A Reference Manual**. Taylor and Francis: London, 1995: 328 p.
- CANTERS, F, DECLAIR H.: **The World in Perspective: A Directory of World Map Projections**, John Wiley and Sons: Chichester, England: 1989
- CAPEK, R.: **Which is the Best Projection for the World Map**, *Proceedings of the 20th International Cartographic Conference*, Vol:5, pp.3084-3093, Beijing, China, 2001a
- CAPEK, R.: **Hodnoceni zobrazeni pro mapu sveta** (The assessment of projections for the World Map), *Monographie*, Univerzity Karlovy, Praha, 2001b, 101 p.
- FOGEL, D.N., TINNEY, L.R.: **Image Registration using Multiquadric Functions, the Finite Element Method, Bivariate Mapping Polynomials and Thin Plate Spline**, NCGIA, National Center For Geographic Information and Analysis, Technical Report 96/1 Available online: 1996 http://www.ncgia.ucsb.edu/Publications/Tech_Reports/96/96-1.PDF (accessed 25 November 2005)
- GINZBURG, G.A.: **Matematicheskoye obosnovanie kart kompleksnykh mirovykh geograficheskikh atlasov**, *Trudy TsNIIGAIK 91*, Geodezizdat Moskva:, 1952: 141p.
- GINZBURG, G.A., SALMANOVA, T.D.: **Atlas dlya vybora kartograficheskikh proyeksij**, *Trudy TsNIIGAIK 110*, Geodezizdat Moskva:, 1957:, 239p.
- HARDY, R. L.: **Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method: 20 Years of Discovery 1968-1988**, *Comp. Math. With Applications*, 19, pp.163-208, 1990.
- HARDY, R.L.: **Multiquadric Equations of Topography and Other Irregular Surfaces**, *J. Geophys. Res.*, 76, pp.1905-1915, 1971.
- İPBÜKER, C.: **A Computational Approach to the Robinson Projection**, *Survey Review*, Vol.38, No.297, pp.204-217, 2005.
- MALING, D.H., **A Review of some Russian Map Projections**, *Empire Survey Review* 15, pp.203-215, 15, pp.255-266, 15, pp.294-303, 1960.
- MALING, D.H.: **Coordinate Systems and Map Projections**, Oxford Pergamon, 1992, 476 p., 1992.
- RICHARDUS, P. ADLER, R.K.: **Map Projections: For Geodesists, Cartographers and Geographers**, North Holland Publishing Company, 1972, p.174
- ROBINSON, A.H.: **A new map projection: its development and characteristics**, *International Yearbook of Cartography* 14: 1974, pp.145-155
- SNYDER, J.P.: **Map Projections Used by the United States Geological Survey**, *Geological Survey Bulletin* 1532, 313p., 1982.
- SNYDER, J.P.: **Flattening the Earth, Two thousand years of map projections**, The University of Chicago Press, 1993, 363 p.
- YANALAK, M., BAYKAL, O.: **Transformation of Ellipsoid Heights to Local Leveling Heights**, *Journal of Surveying Engineering, ASCE*; 127, pp.90-103, 2001.
- YANALAK, M., BAYKAL, O.: **Digital Elevation Model (DEM) Based Volume Calculations Using Topographical Data**, *Journal of Surveying Engineering, ASCE*; 129, pp.56-64, 2003.
- YANALAK, M.: **Effect of Gridding Method on Digital Terrain Model Profile Data Based on Scattered Data**, *Journal of Computing in Civil Engineering, ASCE*; 17, pp.58-67, 2003.
- YANALAK, M.: **Sibson (Natural Neighbour) and non-Sibsonian Interpolation for Digital Elevation Model (DEM)**, *Survey Review*, 37, pp.360-376, 2004.
- YANALAK, M.: **Computing Pit Excavation Volume**, *Journal of Surveying Engineering, ASCE*; 131, pp.15-19, 2005.

Ek-A: Ginzburg VI Projeksiyonunda deformasyon büyüklükleri

φ	λ	x	y	h	k	a	b	p	w
0	0	0.000	0.000	0.99	0.83	0.99	0.83	0.82	10.44
0	20	0.289	0.000	1.00	0.83	1.00	0.83	0.83	10.69
0	40	0.579	0.000	1.01	0.83	1.01	0.83	0.84	11.42
0	60	0.868	0.000	1.03	0.83	1.03	0.83	0.86	12.62
0	80	1.157	0.000	1.06	0.83	1.06	0.83	0.88	14.26
0	100	1.446	0.000	1.10	0.83	1.10	0.83	0.91	16.29
0	120	1.736	0.000	1.15	0.83	1.15	0.83	0.95	18.67
0	140	2.025	0.000	1.21	0.83	1.21	0.83	1.00	21.34
0	160	2.314	0.000	1.27	0.83	1.27	0.83	1.05	24.25
0	180	2.603	0.000	1.34	0.83	1.34	0.83	1.11	27.36
20	0	0.000	0.349	1.01	0.86	1.01	0.86	0.87	9.44
20	20	0.281	0.351	1.02	0.86	1.02	0.86	0.87	9.93
20	40	0.562	0.355	1.03	0.86	1.04	0.85	0.88	11.29
20	60	0.843	0.362	1.06	0.86	1.07	0.84	0.90	13.28
20	80	1.124	0.372	1.09	0.86	1.10	0.84	0.93	15.68
20	100	1.405	0.385	1.13	0.86	1.15	0.83	0.96	18.38
20	120	1.686	0.401	1.18	0.86	1.20	0.83	1.00	21.27
20	140	1.967	0.420	1.25	0.86	1.27	0.83	1.05	24.31
20	160	2.247	0.442	1.32	0.86	1.34	0.82	1.10	27.45
20	180	2.527	0.466	1.39	0.86	1.41	0.82	1.16	30.67
40	0	0.000	0.710	1.06	0.96	1.06	0.96	1.02	5.82
40	20	0.256	0.712	1.07	0.96	1.08	0.95	1.02	7.46
40	40	0.512	0.720	1.09	0.96	1.12	0.92	1.03	10.97
40	60	0.768	0.733	1.12	0.96	1.17	0.90	1.05	15.02
40	80	1.023	0.751	1.17	0.96	1.23	0.88	1.08	19.17
40	100	1.278	0.774	1.23	0.96	1.30	0.86	1.12	23.29
40	120	1.533	0.802	1.30	0.96	1.37	0.85	1.16	27.30
40	140	1.786	0.836	1.38	0.96	1.45	0.84	1.22	31.17
40	160	2.040	0.875	1.46	0.96	1.54	0.83	1.28	34.89
40	180	2.292	0.918	1.56	0.96	1.63	0.82	1.35	38.44
60	0	0.000	1.093	1.14	1.21	1.21	1.14	1.38	3.35
60	20	0.211	1.096	1.15	1.21	1.25	1.11	1.39	6.90
60	40	0.422	1.105	1.19	1.21	1.32	1.06	1.40	12.43
60	60	0.633	1.121	1.24	1.21	1.40	1.02	1.43	18.05
60	80	0.843	1.142	1.31	1.21	1.49	0.99	1.47	23.49
60	100	1.053	1.170	1.40	1.21	1.59	0.96	1.52	28.66
60	120	1.261	1.204	1.50	1.21	1.69	0.93	1.58	33.52
60	140	1.468	1.244	1.62	1.21	1.80	0.91	1.65	38.03
60	160	1.675	1.290	1.74	1.21	1.92	0.90	1.73	42.21
60	180	1.879	1.342	1.87	1.21	2.04	0.89	1.82	46.05
80	0	0.000	1.510	1.26	2.35	2.35	1.26	2.95	35.37
80	20	0.143	1.513	1.28	2.35	2.36	1.26	2.97	35.65
80	40	0.285	1.521	1.33	2.35	2.39	1.25	3.00	36.44
80	60	0.427	1.534	1.42	2.35	2.45	1.25	3.06	37.67
80	80	0.568	1.553	1.53	2.35	2.51	1.25	3.14	39.24
80	100	0.709	1.577	1.67	2.35	2.60	1.25	3.25	41.05
80	120	0.848	1.606	1.82	2.35	2.70	1.25	3.38	42.99
80	140	0.987	1.640	1.99	2.35	2.81	1.26	3.53	44.98
80	160	1.124	1.680	2.16	2.35	2.94	1.26	3.71	46.95
80	180	1.259	1.724	2.35	2.35	3.07	1.27	3.90	48.87