Journal of Naval Science and Engineering
2009, Vol. 5, No.2, pp. 55-74

PARÇALI LİNEER ÜYELİK FONKSİYONLARINI KULLANARAK ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEM (ÇALKTP) ÇÖZÜMÜNE BULANIK PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI

Dr. Öğ. Kd. Yzb.Nurdan ÇETİN
Deniz Harp Okulu Komutanlığı, Fen Dersleri Bölüm Başkanlığı, Matematik Bölümü**,**Tuzla, İstanbul, Türkiye, ncetin@dho.edu.tr

Prof. Dr.Fatma TİRYAKİ
Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü,Davutpaşa, İstanbul, Türkiye, ftiryaki@yildiz.edu.tr

Özetçe

Bilindiği gibi, taşıma problemleri ve geliştirilen çözüm yöntemleri lojistikte, tedarik zinciri yönetiminde maliyetlerin azaltılması ve servis hizmetlerini iyileştirmede önemli bir rol oynamaktadır. Üretim merkezlerinden talep merkezlerine taşıma yapılırken aynı anda birden fazla kriter optimize edilmeye çalışılabilir. Örneğin, maliyetin minimizasyonu, öncelikli müşterilere ortalama dağıtım zamanının minimizasyonu, yakıt tüketiminin minimizasyonu gibi. Bu kriterlerden bazıları da karlılık oranının maksimizasyonu gibi kesirli yapıda olabilir. Böyle taşıma problemlerini Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problemi (ÇALKTP) olarak adlandırmaktayız. ÇALKTP özel yapıda bir vektör-minimum (veya maksimum) problemidir. Genel olarak vektör maksimizasyon problemlerinde bütün metotlar, basılamaz (pareto-optimal) çözümler kümesini ya da bir uzlaşık çözümü üretmektedir. Bu çalışmamızda non-lineer üyelik fonksiyonlarından biri olan parçalı lineer üyelik fonksiyonları kullanılarak ÇALKTP için Pareto-optimal uzlaşık çözüm elde edilmektedir. Bulanık yaklaşımımızı açıklamak üzere bir sayısal örnek verilmektedir.

Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonlarını Kullanarak Çok Amaçlı Lineer Kesirli Taşıma Problem (ÇALKTP) Çözümüne Bulanık Programlama Yaklaşımı

A FUZZY APPROACH FOR MULTI-OBJECTIVE LINEAR FRACTIONAL TRANSPORTATION PROBLEM (MLFTP) *WITH PIECEWISE LINEAR MEMBERSHIP FUNCTIONS*

Abstract

As known, transportation problems and their solution techniques play an important role in logistics and supply chain management for reducing cost and improving service. In multiple- objective transportation problems, several criteria —the minimization of the cost, the minimization of average shipping time to priority customers, the maximization of production using a given process, the minimization of fuel consumption, etc. and sometimes fractional criteria such as the maximization of transport profitability, etc. — are considered. These problems are called multi-objective linear fractional transportation problem (MLFTP). This problem is special type of vector-minimum (vector maximum) problem. All methods generate either pareto-optimal solution or compromise solution in vector maximum problem. In this paper we obtain compromise pareto-optimal solution for MLFTP with piecewise membership function which is nonlinear membership function. An illustrative numerical example will be given to explain this approach.

Anahtar kelimeler: *Taşıma Problemi, Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama, Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonları, Bulanık Matematik Programlama*.

Keywords: *Transportation Problem, Multiobjective Linear Fractional Programming, Piecewise linear membership function, fuzzy mathematical programming*

1. GİRİŞ

Taşıma problemleri, kısıtlı kapasiteye sahip üretim merkezlerinden talepleri belli olan tüketim merkezlerine maliyeti minimum veya kârı maksimum yapacak şekilde mal dağıtımı yapma problemleridir. Gerçek yaşam problemlerinde genellikle birbiriyle çelişen, örneğin maliyetin minimizasyonu, öncelikli müşterilere ortalama dağıtım zamanının minimizasyonu ve yakıt tüketiminin minimizasyonu gibi birden fazla amaç optimize edilmeye çalışılmaktadır. Birden fazla amacın ele alındığı taşıma problemlerine çok amaçlı taşıma problemi (ÇATP) denir. Bit ve diğerleri [7,8], Das ve diğerleri [11], Abd El-Wahed [1,2], Li ve Lai [18], Ammar ve Youness [4] ÇATP'ne bulanık yaklaşım ile çözüm önerisi geliştirmişlerdir.

Kâr/maliyet, kazanç/sermaye, kâr/işgücü ihtiyacı gibi oranların optimize edilmeye çalışıldığı lineer kesirli programlama problemleri (LKP), taşıma, üretim, finans, oyun teorisi gibi pek çok alanda sıkça kullanılmaktadır [25]. LKP nonlineer programlama problemi olup ilk olarak Charnes-Cooper [10] tarafından geliştirilen dönüşümle lineer programlama problemine indirgenmiştir.

Amaç fonksiyonu, iki lineer fonksiyonun oranı, kısıtları da taşıma problemi kısıtları olan probleme ise Lineer Kesirli Taşıma Problemi (LKTP) denir [5].

Kornbluth ve Steuer [14,15], Nykowski ve Zolkiewski [20], Benson [6] ve Tiryaki [26] çok amaçlı lineer kesirli programlama problemini çözmek için farklı yaklaşımlar önermişlerdir. Luhandjula [19], Sakawa ve Yumine [22] ve Sakawa ve Yano [23] ve Chakraborty ve Gupta [9] ise bu problem için bulanık yaklaşım kullanan çözüm önerileri sunmuşlardır.

Zimmermann [28] lineer yapıdaki üyelik fonksiyonunu kullanan bulanık min operatör modelini geliştirmiştir. Daha sonra, Leberling [16] vektör maksimizasyon problemi için non-lineer (hiperbolik) yapılı üyelik fonksiyonunu, Lee ve Li [17] üstel üyelik fonksiyonunu, Dhingra ve Moskowitz [12] optimal dizayn probleminde üstel, kuadratik ve logaritmik üyelik fonksiyonlarını tanımlamışlardır. Ayrıca Hannnan [13] ve Yang ve diğerleri [27] parçalı lineer üyelik fonksiyonlarını kullanmışlardır.

Bu çalışmada ÇALKTP'ye bulanık matematik programlama yaklaşımı ile çözüm önerisi yapılmaktadır. Çözüm yöntemimizde

Zimmermann [28] nın min operatör modelinin bir uzantısı olan Hannan'ın yaklaşımı ele alınmaktadır. Parçalı lineer üyelik fonksiyonlarını kullanan bu yaklaşımdan faydalanarak ÇALKTP çözülmüştür. Nümerik bir örnek ile çözüm yöntemi açıklanmıştır.

2. ÇOK AMAÇLI LİNEER KESİRLİ TAŞIMA PROBLEMİ

Kapasiteleri $a_1, a_2, ..., a_m$ olan m tane kaynak noktası ve talepleri $b_1, b_2, ..., b_n$ olan n tane varış noktası olan ÇALKTP için; i. kaynak noktasından j. varış noktasına taşınan miktar x_{ij}; $q = 1,..,Q$ için z_q amacında i. kaynak noktasından j. varış noktasına taşınacak bir birim ürün için elde edilen kâr ve taşıma maliyeti sırasıyla p_{ij}^q ve d_{ij}^q; sabit kâr ve sabit maliyet sırasıyla p_0^q ve d_0^q olmak üzere, ÇALKTP formülasyonu aşağıdaki gibidir:

$$\max z_q(\mathbf{x}) = \frac{p_q(\mathbf{x})}{d_q(\mathbf{x})} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^q x_{ij} + p_0^q}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^q x_{ij} + d_0^q} \qquad q = 1,..,Q$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i,\ i = 1,2,\ldots,m;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j\ ,\ j = 1,2,\ldots,n; \tag{1}$$

$$x_{ij} \ge 0\,, i = 1,2,\ldots,m\,,\ j = 1,2,\ldots,n$$

Burada $\mathbf{z}_q(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}),..., z_Q(\mathbf{x}))$ kriter vektörü; $\varnothing \ne S$, kısıtların sağlandığı kapalı ve konveks bir küme; $d_q(\mathbf{x}), a_i, b_j, p_{ij}^q, d_{ij}^q, p_0^q, d_0^q > 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} a_i \ge \sum_{j=1}^{n} b_j$ kabulleri geçerlidir.

Tanım 2.1: $\forall q \in \{1,2,...,Q\}$ için $z_q(\mathbf{x}) \geq z_q(\bar{\mathbf{x}})$ ve $\exists q$ için $z_q(\mathbf{x}) > z_q(\bar{\mathbf{x}})$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{x} \in S$ noktası mevcut değilse $\bar{\mathbf{x}} \in S$ noktasına *Pareto-optimal çözüm;* $\forall q \in \{1,2,...,Q\}$ için $z_q(\mathbf{x}) > z_q(\bar{\mathbf{x}})$ olacak şekilde bir başka $\mathbf{x} \in S$ noktası mevcut değilse $\bar{\mathbf{x}} \in S$ noktasına *zayıf Pareto-optimal çözüm* denir.

E^W, zayıf Pareto-optimal çözümler kümesi, E^S Pareto-optimal çözümler kümesini göstermek üzere $E^S \subset E^W$ dır.

Tanım 2.2: $\bar{\mathbf{x}} \in S$ uygun çözümünün bir uzlaşık çözüm olması için gerek ve yeter şart $\bar{\mathbf{x}} \in E^w$ ve $\mathbf{Z}(\bar{\mathbf{x}}) \geq \wedge_{x \in S} \mathbf{Z}(\mathbf{x})$ olmasıdır. Burada $\mathbf{Z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), z_2(\mathbf{x}),..., z_Q(\mathbf{x}))$ dir ve $\wedge$, "min" operatöre karşılık gelir.

3. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

3.1. Parçalı Lineer Üyelik Fonksiyonu

Literatürde çeşitli tiplerde örneğin, lineer veya nonlineer (hiperbolik, ters hiperbolik, üstel ve parçalı lineer v.s.) üyelik fonksiyonları mevcuttur [24]. Çok genel non-lineer üyelik fonksiyonlarının kullanımında dönüştürme prosesi bir hayli karışıktır. Non-lineer üyelik fonksiyonlarına parça parça lineer fonksiyonlarla yaklaşarak, non-lineer programlama modelleri bir dizi lineer programlama modellerine indirgenebilir. Çok sayıda lineer yaklaşım yapmak yani çok sayıda doğru parçasıyla yaklaşmak kabul edilebilir bir hassaslık sağlar. Ancak buna karşılık dönüşmüş modelde kısıt sayısı, dolayısıyla problem çözümünde yapılan işlem hacmi artar.

Çalışmamızda Hannan'ın yaklaşımı ÇALKTP'ne uygulanacak ve yaklaşımımız nümerik örnek üzerinde açıklanacaktır.

3.2. Üyelik Fonksiyonlarının Oluşturulması

Hannan'ın parçalı lineer üyelik fonksiyonundan faydalanarak, ÇALKTP'nin q. lineer kesirli amaç fonksiyonuna karşılık $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunu:

$$\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{N_q} \alpha_{qj} \left| z_q(\mathbf{x}) - g_{qj} \right| + \beta_q z_q(\mathbf{x}) + \gamma_q$$

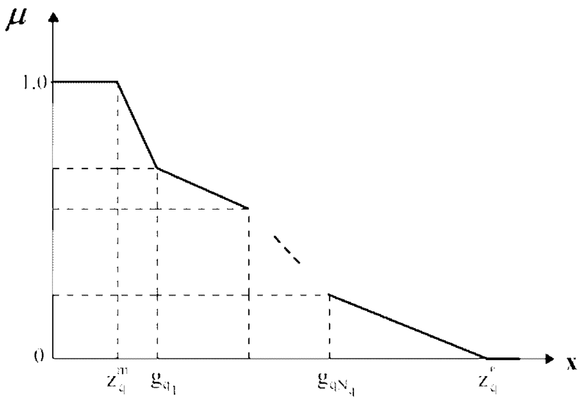
olarak tanımlayalım. Burada

$\alpha_{qj} = (t_{q,j+1} - t_{qj})/2$ **;**

$\beta_q = (t_{q,N_q+1} + t_{q1})/2$ **;**

$\gamma_q = (s_{q,N_q+1} + s_{q1})/2$, $q = 1,2,...,Q$; $j = 1,2,...,N_q$ (N_q, parçalanma noktalarının sayısı) dır.

Her bir $g_{qr-1} \le z_q(\mathbf{x}) \le g_{qr}$ doğru parçası için bu parçalı lineer üyelik fonksiyonunun $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = t_{qr}\, z_q(\mathbf{x}) + s_{qr}$ olduğunu kabul ediyoruz. Burada t_{qr} ve s_{qr} ler sırasıyla $\left[g_{qr-1,} g_{qr} \right]$ aralığında $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$'nun eğimini ve μ ekseninde kestiği noktayı göstermektedir. $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$'nin değerleri üyelik derecesini gösterdiğinden tüm $z_q(\mathbf{x})$, $q = 1,2,...,Q$ ler için $0 \le \mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) \le 1$ dir.



Şekil 1: $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu.

KV'nin bulanık hedeflerine göre kurulan parçalı lineer üyelik fonksiyonu kullanılarak ÇALKTP için Zimmermann'ın "min" operatör modeli:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) \geq \lambda \quad , \; q = 1, 2, ..., Q$ (2)

$\mathbf{x} \in S \, , \; \lambda \geq 0$

şeklindedir. Bu problemi hedef programlama problemi olarak ifade etmek üzere g_{qj} değerini, j. noktada q. lineer kesirli amaç fonksiyonu $z_q(\mathbf{x})$ için hedef değeri olarak; d_{qj}^{+} ve d_{qj}^{-} değişkenlerini de j. nokta için sapma değişkenleri olarak tanımlayalım. O halde problem için hedef kısıtlarını

$$z_q(\mathbf{x}) - d_{q1}^{+} + d_{q1}^{-} = g_{q1}$$

$$\vdots$$

$$z_q(\mathbf{x}) - d^+_{qN_q} + d^-_{qN_q} = g_{qN_q}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece Hannan'ın yaklaşımından faydalanarak $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonu,

$$\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{N_q} \alpha_{qj}\,(d^+_{qj} + d^-_{qj}) + \beta_q z_q(\mathbf{x}) + \gamma_q \;, \quad q = 1,2,...,Q$$

olur.

Böylece (2) problemi aşağıdaki hedef tipli kısıtlara sahip bir non-lineer programlama problemine dönüşür:

Amaç: $\max \lambda$

Kısıtlar: $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{N_q} \alpha_{qj}\,(d^+_{qj} + d^-_{qj}) + \beta_q z_q(\mathbf{x}) + \gamma_q \geq \lambda \;, \; q = 1,2,...,Q$ (3)

$$z_q(\mathbf{x}) - d^+_{qj} + d^-_{qj} = g_{qj}$$

$$q = 1,2,...,Q\,;\; j = 1,2,...,N_q$$

$$\mathbf{x} \in S \;,\; \lambda \geq 0$$

$$d^+_{qj} \geq 0 \,,\; d^-_{qj} \geq 0$$

$$q = 1,2,...,Q\,;\; j = 1,2,...,N_q$$

Ayrıca Hannan 1981'deki çalışmasında bulanık karar yerine, herbir parçalı lineer üyelik fonksiyonu için $\hat{\mu}_q$ $(0 < \hat{\mu}_q \leq 1)$, $q = 1,2,...,Q$ hedef değerlerini ve hedefler arasında P_l, $l = 1,...,L$ önceliklerini belirlemiştir [24]. Böylece çok amaçlı non-lineer kesirli taşıma problemimizi aşağıdaki genel bulanık non-lineer hedef programlama taşıma problemine dönüştürebiliriz:

Amaç: $\min \sum_{l=1}^{L} P_l (\sum_{q \in I_l} e_q^-)$,

Kısıtlar: $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x})) - e_q^+ + e_q^- = \hat{\mu}_q \quad , \; q = 1,2,...,Q$ (4)

$z_q(\mathbf{x}) - d_{qj}^+ + d_{qj}^- = g_{qj}$

$q = 1,2,...,Q \, ; \; j = 1,2,...,N_q$

$\mathbf{x} \in S \, , \; \lambda \geq 0$

$d_{qj}^+ \geq 0$, $d_{qj}^- \geq 0$, $q = 1,2,...,Q \, ; \; j = 1,2,...,N_q$

$e_i^+ \geq 0$, $e_i^- \geq 0$, $q = 1,2,...,Q$

Burada $I_l \neq \emptyset$, l. öncelik sınıfındaki amaç fonksiyonlarının indis kümesini ve e_q^+, e_q^- lerde sapma değişkenlerini göstermektedir.

Elde edilen $(\mathbf{x}^*, \lambda^*)$ çözümünün Pareto-optimalliği için Pareto-optimallik testi yapılır ve herbir amaç için $\mu_q(z_q(\mathbf{x}))$, $q = 1,2,...,Q$ tatmin seviyeleri bulunur.

3.3. Pareto-Optimallik Testi

Kuvvetli-etkin çözümü bulmak için (5) problemi çözülür [3].

$$\max \sum_{q=1}^{Q} \widehat{\varepsilon}_q \tag{5}$$

$$(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{q} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}^{q}\ z_q^{*}) \cdot \mathbf{x} - \widehat{\varepsilon}_q \geq d_0^q \cdot z_q^{*} - p_0^q\,, \qquad q = 1,...,Q\,, \quad \mathbf{x} \in S\,,$$

$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $\widehat{\varepsilon}_q \geq 0$ Eğer max $\sum_{q=1}^{Q} \widehat{\varepsilon}_q = 0$ ise x^* Pareto-optimal çözümdür. $\sum_{q=1}^{Q} \widehat{\varepsilon}_q > 0$ ise çözülen son lineer programlama probleminin çözümü $\bar{x}$, x^*'ın yerine konulur ve tekrar (5) problemi çözülür. Bu işlem max $\sum_{q=1}^{Q} \widehat{\varepsilon}_q = 0$ sağlananа kadar sürdürülür.

4. NÜMERİK ÖRNEK

$$\max\ z_1 = \frac{x_{11} + 2x_{12} + 8x_{21} + 6x_{22} + 4}{x_{11} + 3x_{12} + x_{21} + 2x_{22} + 2}$$

$$\max\ z_2 = \frac{2x_{11} + 4x_{12} + 10x_{21} + 8x_{22} + 6}{x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + x_{22} + 4} \tag{6}$$

$$\max\ z_3 = \frac{6x_{11} + x_{12} + 4x_{21} + 5x_{22} + 8}{2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + 5}$$

$$x_{11} + x_{12} \leq 150\ ,\quad x_{21} + x_{22} \leq 250\,,$$

$$x_{11} + x_{21} \geq 50\,,\quad x_{12} + x_{22} \geq 350\,,$$

$$\mathbf{x} = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) \geq \mathbf{0}$$

Üç tane lineer kesirli taşıma problemi nonlineer yapıdadır. Bu kesirli taşıma problemlerinin maksimum ve minimum çözümleri, GAMS [21], Gino gibi nonlineer problemleri direkt olarak çözebilen paket programlar yardımıyla bulunabilir. Tablo1'de üç tane lineer kesirli taşıma probleminin ayrı ayrı çözülmesiyle elde edilen maksimum ve minimum çözümler ve bu çözümlere karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri verilmektedir.

	z_1	z_2	z_3
z^*	2.111	4.972	1.736
z^m	2.059	4.138	1.687
$x_1^*(0,150,50,200)$	2.111	4.138	1.687
$x_1^m(50,100,0,250)$	2.059	4.972	1.736
$x_2^*(50,100,0,250)$	2.059	4.972	1.736
$x_2^m(0,150,50,200)$	2.111	4.138	1.687
$x_3^*(50,100,0,250)$	2.059	4.972	1.736
$x_3^m(0,150,50,200)$	2.111	4.138	1.687

Tablo 1: Herbir amaç için minimum ve maksimum çözümler ve karşılık gelen amaç değerleri

KV tarafından sağlanan $z_1(\mathbf{x})$, $z_2(\mathbf{x})$, $z_3(\mathbf{x})$ amaç fonksiyon değerleri ve karşılık gelen üyelik fonksiyon dereceleri sırasıyla Tablo 2, Tablo 3 ve Tablo 4'de verilmiştir.

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$	$z_1(\mathbf{x})$	$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = t_{1r}\, z_1(\mathbf{x}) + s_{1r}\,,\quad r = 1,2,3$
0	$g_{10} = z_1^m = 2.05$	$\left.\begin{array}{l} t_{11} = \dfrac{0.45-0}{2.08361-2.059} = 18.28822 \\ s_{11} = \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{11} z_1(\mathbf{x}) = -37.65544 \end{array}\right\} \Rightarrow$
0.45	$g_{11} = 2.08361$	$\mu_{11}(z_1(\mathbf{x})) = 18.28822 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 37.65544$
0.45	$g_{11} = 2.08361$	$\left.\begin{array}{l} t_{12} = \dfrac{0.80-0.45}{2.09572-2.08361} = 28.88265 \\ s_{12} = \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{12} z_1(\mathbf{x}) = -59.73017 \end{array}\right\} \Rightarrow$
0.80	$g_{12} = 2.09572$	$\mu_{12}(z_1(\mathbf{x})) = 28.88265 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 59.73017$
0.80	$g_{12} = 2.09572$	$\left.\begin{array}{l} t_{13} = \dfrac{1-0.80}{2.111-2.09572} = 13.09243 \\ s_{13} = \mu_1(z_1(\mathbf{x})) - t_{13} z_1(\mathbf{x}) = -26.63807 \end{array}\right\} \Rightarrow$
1	$g_{13} = z_1^* = 2.11$	$\mu_{13}(z_1(\mathbf{x})) = 13.09243 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63807$

Tablo 2: $\mu_1(z_1(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$	$z_2(\mathbf{x})$	$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = t_{2r}\, z_2(\mathbf{x}) + s_{2r}\,, \quad r = 1,2,3$
0 0.15	$g_{20} = z_2^m = 4.1$ $g_{21} = 4.34636$	$\left.\begin{array}{l} t_{21} = \dfrac{0.15-0}{4.34636-4.138} = 0.71992 \\ s_{21} = \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{21} z_2(\mathbf{x}) = -2.97903 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mu_{21}(z_2(\mathbf{x})) = 0.71992 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.97903$
0.15 0.65	$g_{21} = 4.34636$ $g_{22} = 4.52878$	$\left.\begin{array}{l} t_{22} = \dfrac{0.65-0.15}{4.52878-4.34636} = 2.7409 \\ s_{22} = \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{22} z_2(\mathbf{x}) = -11.76294 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mu_{22}(z_2(\mathbf{x})) = 2.7409 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 11.76294$
0.65 1	$g_{22} = 4.52878$ $g_{23} = z_2^* = 4.9$	$\left.\begin{array}{l} t_{23} = \dfrac{1-0.65}{4.972-4.52878} = 0.78967 \\ s_{23} = \mu_2(z_2(\mathbf{x})) - t_{23} z_2(\mathbf{x}) = -2.92624 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mu_{23}(z_2(\mathbf{x})) = 0.78967 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.92624$

Tablo 3 $\mu_2(z_2(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.

KV'den sağlanan bilgiler		Üyelik fonksiyonunun lineer parçalarının elde edilmesi
$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$	$z_3(\mathbf{x})$	$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = t_{3r}\, z_3(\mathbf{x}) + s_{3r}\,, \quad r = 1,2,3$

0	$g_{30} = z_3^m = 1.6$	$\left.\begin{array}{l} t_{31} = \dfrac{0.45-0}{1.71375-1.687} = 16.82432 \\ s_{31} = \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{11}z_1(\mathbf{x}) = -28.38263 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mu_{31}(z_3(\mathbf{x})) = 16.82432 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 28.38263$
0.45	$g_{31} = 1.71375$	
0.45	$g_{31} = 1.71375$	$\left.\begin{array}{l} t_{32} = \dfrac{0.60-0.45}{1.71541-1.71375} = 89.98201 \\ s_{32} = \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{32}z_3(\mathbf{x}) = -153.75667 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mu_{32}(z_3(\mathbf{x})) = 89.98201 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 153.75667$
0.60	$g_{32} = 1.71541$	
0.60	$g_{32} = 1.71541$	$\left.\begin{array}{l} t_{33} = \dfrac{1-0.60}{1.736-1.71541} = 19.43068 \\ s_{33} = \mu_3(z_3(\mathbf{x})) - t_{33}z_3(\mathbf{x}) = -32.73158 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\mu_{33}(z_3(\mathbf{x})) = 19.43068 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 32.73158$
1	$g_{33} = z_3^* = 1.73$	

Tablo 4 $\mu_3(z_3(\mathbf{x}))$ parçalı lineer üyelik fonksiyonunun elde edilmesi.

Yukarıdaki verilerden yararlanarak her bir amaca ait elde edilen parçalı lineer üyelik fonksiyonları sırasıyla:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0, \quad z_1(\mathbf{x}) \le 2.059 \\ \mu_{11}(z_1(\mathbf{x}) = 18.28822 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 37.65544, \quad 2.059 < z_1(\mathbf{x}) \le 2.08361 \\ \mu_{12}(z_1(\mathbf{x}) = 28.88265 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 59.73017, \quad 2.08361 < z_1(\mathbf{x}) \le 2.09572 \\ \mu_{13}(z_1(\mathbf{x}) = 13.09243 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 26.63807, \quad 2.09572 < z_1(\mathbf{x}) \le 2.111 \\ 1, \quad z_1(\mathbf{x}) > 2.111 \end{cases} \tag{7}$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))=\begin{cases}0, \quad z_2(x)\le 4.138\\ \mu_{21}(z_2(\mathbf{x})=0.71992\cdot z_2(\mathbf{x})-2.97903, \quad 4.138<z_2(\mathbf{x})\le 4.34636\\ \mu_{22}(z_2(\mathbf{x})=2.7409\cdot z_2(\mathbf{x})-11.76294, \quad 4.34636<z_2(\mathbf{x})\le 4.52878\\ \mu_{23}(z_2(\mathbf{x})=0.78967\cdot z_2(\mathbf{x})-2.92624, \quad 4.52878<z_2(\mathbf{x})\le 4.972\\ 1, \quad z_2(\mathbf{x})>4.972\end{cases} \tag{8}$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))=\begin{cases}0, \quad z_3(\mathbf{x})\le 1.687\\ \mu_{31}(z_3(\mathbf{x})=16.82432\cdot z_3(\mathbf{x})-28.38263, \quad 1.687<z_3(\mathbf{x})\le 1.71375\\ \mu_{32}(z_3(\mathbf{x})=89.98201\cdot z_3(\mathbf{x})-153.75667, \quad 1.71375<z_3(\mathbf{x})\le 1.71541\\ \mu_{33}(z_3(\mathbf{x})=19.43068\cdot z_3(\mathbf{x})-32.73158, \quad 1.71541<z_3(\mathbf{x})\le 1.736\\ 1, \quad z_3(\mathbf{x})>1.736\end{cases} \tag{9}$$

şeklinde yazılabilir.

Hannan'ın yaklaşımından ve Tablo 2, Tablo 3, Tablo 4'deki verilerden faydalanarak her bir amaca karşılık gelen $\mu_q^{PL}(z_q(\mathbf{x}))$, $q=1,2,3$ parçalı lineer üyelik fonksiyonları:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))=\alpha_{11}\,(d_{11}^{+}+d_{11}^{-})+\alpha_{12}\,(d_{12}^{+}+d_{12}^{-})+\beta_1 z_1(\mathbf{x})+\gamma_1$$

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x}))=58.297215(d_{11}^{+}+d_{11}^{-})-7.89511(d_{12}^{+}+d_{12}^{-})+15.69033z_1(\mathbf{x})-32.14676$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))=\alpha_{21}\cdot(d_{21}^{+}+d_{21}^{-})+\alpha_{22}\cdot(d_{22}^{+}+d_{22}^{-})+\beta_2\cdot z_2(\mathbf{x})+\gamma_2$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x}))=1.01049\cdot(d_{21}^{+}+d_{21}^{-})-0.97562\cdot(d_{22}^{+}+d_{22}^{-})+0.7548\cdot z_2(\mathbf{x})-2.95264$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))=\alpha_{31}\cdot(d_{31}^{+}+d_{31}^{-})+\alpha_{32}\cdot(d_{32}^{+}+d_{32}^{-})+\beta_3\cdot z_3(\mathbf{x})+\gamma_3$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x}))=36.57885\cdot(d_{31}^{+}+d_{31}^{-})-35.27567\cdot(d_{32}^{+}+d_{32}^{-})+18.1275\cdot z_3(\mathbf{x})-30.55711$$

ve hedef kısıtları:

$$z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^{+} + d_{11}^{-} = g_{11} \Rightarrow z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^{+} + d_{11}^{-} = 2.08361$$

$$z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^{+} + d_{12}^{-} = g_{12} \Rightarrow z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^{+} + d_{12}^{-} = 2.09572$$

$$z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^{+} + d_{21}^{-} = g_{21} \Rightarrow z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^{+} + d_{21}^{-} = 4.34636$$

$$z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^{+} + d_{22}^{-} = g_{22} \Rightarrow z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^{+} + d_{22}^{-} = 4.52878$$

$$z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^{+} + d_{31}^{-} = g_{31} \Rightarrow z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^{+} + d_{31}^{-} = 1.71375$$

$$z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^{+} + d_{32}^{-} = g_{32} \Rightarrow z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^{+} + d_{32}^{-} = 1.71541$$

yazılabilir. Böylece ÇALKTP için Zimmermann'ın "min" operatör modeli, aşağıdaki hedef tipli kısıtlara sahip bir non-lineer programlama problemine dönüşür:

Amaç: max λ

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 58.297215 \cdot (d_{11}^{+} + d_{11}^{-}) - 7.89511 \cdot (d_{12}^{+} + d_{12}^{-}) + 15.69033 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.14676 \geq \lambda$$

$$\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 1.01049 \cdot (d_{21}^{+} + d_{21}^{-}) - 0.97562 \cdot (d_{22}^{+} + d_{22}^{-}) + 0.7548 \cdot z_2(\mathbf{x}) - 2.95264 \geq \lambda$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 36.57885 \cdot (d_{31}^{+} + d_{31}^{-}) - 35.27567 \cdot (d_{32}^{+} + d_{32}^{-}) + 18.1275 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 30.55711 \geq \lambda$$

$$z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^{+} + d_{11}^{-} = 2.08361, \qquad z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^{+} + d_{12}^{-} = 2.09572,$$

$$z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^{+} + d_{21}^{-} = 4.34636, \qquad z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^{+} + d_{22}^{-} = 4.52878, \quad (10)$$

$z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^+ + d_{31}^- = 1.71375$, $\qquad z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^+ + d_{32}^- = 1.71541$,

$x_{11} + x_{12} \le 150$, $x_{21} + x_{22} \le 250$, $x_{11} + x_{21} \ge 50$, $x_{12} + x_{22} \ge 350$,

$\lambda \ge 0$, $d_{qj}^+ \ge 0$, $d_{qj}^- \ge 0$, $q = 1,2,3$; $j = 1,2$

Herbir parçalı lineer üyelik fonksiyonu için hedef değeri $\hat{\mu}_q = 1$; $q = 1,2,3$ ve hedefler arasında P_l, $l = 1,...,L$ öncelikleri kullanılarak da çok amaçlı non-lineer kesirli taşıma problemi aşağıdaki bulanık non-lineer hedef programlama problemine dönüştürülebilir:

Amaç: $\qquad \min\ (e_1^- + e_2^- + e_3^- + e_1^+ + e_2^+ + e_3^+)$

Kısıtlar:

$$\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 5.297215 \cdot (d_{11}^+ + d_{11}^-) - 7.89511 \cdot (d_{12}^+ + d_{12}^-) + 15.69033 \cdot z_1(\mathbf{x}) - 32.14676 - e_1^+ + e_1^- = \hat{\mu}_1 = 1$$

$$\mu_2(z_2(x)) = 1.01049 \cdot (d_{21}^+ + d_{21}^-) - 0.97562 \cdot (d_{22}^+ + d_{22}^-) + 0.7548 \cdot z_2(x) - 2.95264 - e_2^+ + e_2^- = \hat{\mu}_2 = 1$$

$$\mu_3(z_3(\mathbf{x}) = 36.57885 \cdot (d_{31}^+ + d_{31}^-) - 35.27567 \cdot (d_{32}^+ + d_{32}^-) + 18.1275 \cdot z_3(\mathbf{x}) - 30.55711 - e_3^+ + e_3^- = \hat{\mu}_3 = 1$$

$$\begin{aligned}
&z_1(\mathbf{x}) - d_{11}^+ + d_{11}^- = 2.08361, \qquad z_1(\mathbf{x}) - d_{12}^+ + d_{12}^- = 2.09572, \\
&z_2(\mathbf{x}) - d_{21}^+ + d_{21}^- = 4.34636, \qquad z_2(\mathbf{x}) - d_{22}^+ + d_{22}^- = 4.52878, \\
&z_3(\mathbf{x}) - d_{31}^+ + d_{31}^- = 1.71375, \qquad z_3(\mathbf{x}) - d_{32}^+ + d_{32}^- = 1.71541, \\
&x_{11} + x_{12} \le 150,\ x_{21} + x_{22} \le 250,\ x_{11} + x_{21} \ge 50,\ x_{12} + x_{22} \ge 350, \\
&d_{qj}^+ \ge 0,\ d_{qj}^- \ge 0,\ e_q^+ \ge 0,\ e_q^- \ge 0,\ q = 1,2,3;\ j = 1,2\ .
\end{aligned} \tag{11}$$

(11) problemi GAMS paket programı ile çözülür. Elde edilen $\mathbf{x}^* = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (0,150,50,200)$ zayıf Pareto-optimal noktası, Pareto-optimallik testi gereği, alternatif çözüm olmadığından, aynı zamanda Pareto-optimal noktadır. Ayrıca örnek problemin diğer sonuçları olarak: sapma değişkenleri $e_1^+ = 0$, $e_1^- = 0$, $e_2^+ = 0$, $e_2^- = 0$, $e_3^+ = 0$, $e_3^- = 0$, $d_{11}^+ = 0.027$, $d_{11}^- = 0$, $d_{12}^+ = 0.015$, $d_{12}^- = 0$, $d_{21}^+ = 0.495$, $d_{21}^- = 0.704$, $d_{22}^+ = 0$, $d_{22}^- = 0.391$, $d_{31}^+ = 0.014$, $d_{31}^- = 0.040$, $d_{32}^+ = 0$, $d_{32}^- = 0.028$; amaç fonksiyon değerleri $z_1(\mathbf{x}) = 2.110865$, $z_2(\mathbf{x}) = 4.137615$, $z_3(\mathbf{x}) = 1.686957$; amaçlardan sağlanan tatmin dereceleri $\mu_1(z_1(\mathbf{x})) = 0.99828$, $\mu_2(z_2(\mathbf{x})) = 0$, $\mu_3(z_3(\mathbf{x})) = 0$ elde edilmiştir. Dolayısıyla (10) problemi için $\lambda^* = 0$ dır.

5. SONUÇ

Bu çalışmada, amaç fonksiyonları lineer iki fonksiyonun oranı, kısıtları taşıma problemi kısıtları olan ÇALKTP problemi ele alınmış ve bu problem için bir çözüm önerisi verilmiştir.

Önerilen çözüm yönteminde, ilk olarak nonlineer üyelik fonksiyonlardan biri olan parçalı lineer üyelik fonksiyonu tanımlanmıştır. Karar vericiden z_q^m (amaç fonksiyonunun minimum değeri) ve z_q^* (amaç fonksiyonunun maksimum değeri) aralığında amaç fonksiyonlarının birçok değerlerine karşılık üyelik derecelerini belirlemesi istenmiştir. Her bir alt aralıkta lineer üyelik fonksiyonu kurularak $[z_q^m, z_q^*]$ aralığında parçalı lineer üyelik fonksiyonu oluşturulmuştur. Daha sonra Zimmermann' ın (1978) minimum operatör modelinin bir uzantısı olan Hannan'ın bulanık programlama yaklaşımı ile ÇALKTP çözülmüştür.. Böylece bütün amaçlar için en temel tatmin seviyesi bulunmuş ve Pareto optimal kümeden bir uzlaşık çözüm elde edilmiştir. Ayrıca bir sayısal örnek üzerinde çözüm yöntemi açıklanmıştır.

KAYNAKÇA

[1] Abd El-Wahed, W.F. (2001). A multi-objective transportation problem under fuzziness. *Fuzzy Sets and Systems* 117: 27–33.
[2] Abd El-Wahed, W.F., Lee, S.M. (2006). Interactive fuzzy goal programming for multi-objective transportation problems. *Omega* 34:158-166.
[3] Ahlatcioglu M., Tiryaki F. (2007). Interactive fuzzy programming for decentralized two-level linear fractional programming (DTLLFP) problems. *Omega* 35: 432-450.
[4] Ammar E.E., Youness E.A. (2005). Study on multiobjective transportation problem with fuzzy numbers. *Applied Mathematics and Computation* 166 (2): 241-253.
[5] Bajalinov, E.B. (2003), Linear Fractional Programming: Theory, Methods, Applications and Software, Kluwer Academic Publishers, London.
[6] Benson H.P. (1985). Finding certain weakly-efficient vertices in MOLFP. *Management Science* 31 (2): 240-245.
[7] Bit A.K., Biswal M.P., Alam S.S. (1992). Fuzzy programming approach to multicriteria decision making transportation problem. *Fuzzy sets and Systems* 50: 35-41.
[8] Bit A.K., Biswal M.P., Alam S.S. (1993). An additive fuzzy programming model for multiobjective transportation problem. *Fuzzy Sets and Systems* 57: 313–19.
[9] Chakraborty M., Gupta S. (2002). Fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem, *Fuzzy Sets and Systems* 125: 335-342.
[10] Charnes, A. ve Cooper, W.W. (1962), Programming with linear fractional functionals, *Naval Research.Logistics Quarterly* 9:181-186.
[11] Das S.K., Goswami A., Alam S.S. (1999). Multiobjective transportation problem with interval cost, source and destination parameters. *European Journal of Operations Research* 17: 100–112.
[12] Dhingra A.K., Moskowitz, (1991). Application of fuzzy theories to multiple objective decision making in system design. *European J.Oper. Res.* 55: 348-361.
[13] Hannan, E.L. (1981). Linear programming with multiple fuzzy goals. *Fuzzy Sets and Systems* 6: 235-248.
[14] Kornbluth J.S.H., Steuer R.E. (1981). Goal programming with linear fractional criteria. *European Journal of Operational Research* 8: 58-65.
[15] Kornbluth J.S.H., Steuer R.E. (1981). Multiple objective linear fractional programming. *Management Science* 27: 1024-1039.
[16] Leberling H. (1981). On finding compromise solutions in multicriteria problems using the fuzzy min-operator. *Fuzzy Sets and Systems* 6: 105-118.
[17] Li R.J., Lee E.S. (1991). An exponential membership function for fuzzy multiple objective linear programming. *Computers Math. Applic* 22 (12): 55-60.
[18] Li L., Lai K.K. (2000). A fuzzy approach to the multiobjective transportation problem. *Computers and Operations Research* 27: 43–57.
[19] Luhandjula M.K. (1984). Fuzzy approaches for multiple objective linear fractional optimization. *Fuzzy Sets and Systems* 13: 11-23.

[20] Nykowski I., Zolkiewski Z. (1985). A compromise procedure for the multiple objective linear fractional programming problem. *European Journal of Operational Research* 19: 91-97.
[21] Rosenthal R.E. (2007). GAMS-A User's Guide, GAMS Development Corporation, Washington, DC, USA.
[22] Sakawa, M., Yumine T. (1983). Interactive fuzzy decision-making for multiobjective linear fractional programming problems. *Large Scale Systems* 5: 105-113.
[23] Sakawa M., Yano H. (1988). An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear fractional programming problems. *Fuzzy Sets and Systems* 28: 129-144.
[24] Sakawa, M. (1993). Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization, Plenum Press, Newyork.
[25] Stancu-Minasian, I.M. (2006). A sixth bibliography of fractional programming. *Optimization* 55 (4): 405-428.
[26] Tiryaki F. (1993). Çok Amaçlı Lineer Kesirli Programlama Problemi İçin Çözüm Önerileri.Ph.D. thesis, Yildiz Technical University, Institution of Science.
[27] Yang T., Ignizio J.P. ve Kim H-J. (1991), Fuzzy programming with nonlinear membership functions: Piecewise linear approximation. *Fuzzy Sets and Systems*, 41:39-53.
[28] Zimmermann H.J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems* 1: 45-55.