www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 2 (2008) 88-94

İstatistikçiler Dergisi

Lineer olmayan ayırma teoremi ve asıl minimal noktaların karakterizasyonu

Abbas Azimli

Yıldız Teknik Üniversitesi,
Davutpaşa Kampüsü, Fen-Ed.Fak İstatistik Bölümü
34210-Esenler, İstanbul, Türkiye
azimov@yildiz.edu.tr

Gülder Kemalbay

Yıldız Teknik Üniversitesi,
Davutpaşa Kampüsü, Fen-Ed.Fak İstatistik Bölümü
34210-Esenler, İstanbul, Türkiye
kemalbay@yildiz.edu.tr

Özet

Çok kriterli (vektör) optimizasyon teorisinin temel problemi, çözümleri karakterize eden birden fazla ölçütlerin (yani kriter fonksiyonlarının) aynı anda minimum veya maksimum çözümünü bulmaktır. Matematiksel olarak bu problem, kısmi sıralı uzayda verilen kümelerin koniye göre minimal noktalarının incelenmesi (karakterize edilmesi) problemine dönüşmektedir. Eğer kısmi sıralı uzayda verilen küme konveks küme ise bu kümenin minimal noktalarını karakterize etmek için klasik ayırma teoremleri uygulanabilir. Ancak küme konveks değil ise kümenin minimal noktalarını belirlemek için klasik ayırma teoremini kullanmak uygun değildir. Bu ve benzeri olarak optimizasyonun diğer problemleri lineer olmayan ayırma teoremlerinin gelişmesinde öncü olmuştur.

Bu çalışmada pratik açıdan öneme sahip ve çok kriterli optimizasyon teorisinin temel problemlerinden biri olan asıl (proper) minimal çözümlerin karakterizasyonu için lineer olmayan ayırma teoremlerinin uygulanması gösterilmiştir.

Anahtar sözcükler: Konveks analiz; Çok kriterli optimizasyon; Lineer olmayan ayırma; Asıl minimal nokta.

Abstract

A nonlinear separation theorem and characterization of proper minimal points

In this study, we investigate proper minimal points of arbitrary sets. We show that the proper minimal points of the sets can be characterized by the level sets of convex monotone functions. We find a relation between recession function of separation function and the cone which provides order in space. Then, we show that in the event of the relation, given point is the proper minimal point of the set.

Keywords: Convex analysis; Multicriteria optimization; Nonlinear separation; Proper minimal point.

1. Klasik ayırma teoremi

E^n, n-boyutlu Öklid uzayı olsun. E^n'de A_1 ve A_2 kümeleri verilsin.

Tanım 1. Sıfırdan farklı bir $y^* \in E^n$ için

$$\langle y_1, y^* \rangle \le \langle y_2, y^* \rangle \quad \forall y_1 \in A_1,\ \forall y_2 \in A_2 \tag{1}$$

ise A_1 ve A_2 kümelerine ayrılabilir kümeler denir.

Aşağıdaki teorem kesişmeyen iki konveks kümenin ayrılabilir küme olduklarını gösteren klasik teoremdir.

Teorem 1. A_1 ve A_2, E^n 'de kesişmeyen konveks kümeler olsun. O halde bir $y^* \neq 0$ vektörü için (1) doğrudur.

Bu teorem ile buna benzer olan ayırma teoremleri, optimizasyon teorisinde optimallik koşullarının ispat edilmesinde ve dualite teorisinde uygulanmaktadır.

Tanım 2. $y^* \in E^n$ vektörü, $y^* \neq 0$ ve $\alpha \in R$ sayısı verilsin.

$$H = \left\{ y \in E^n \middle| \left\langle y^*, y \right\rangle = \alpha \right\} \tag{2}$$

kümesine hiperdüzlem denir.

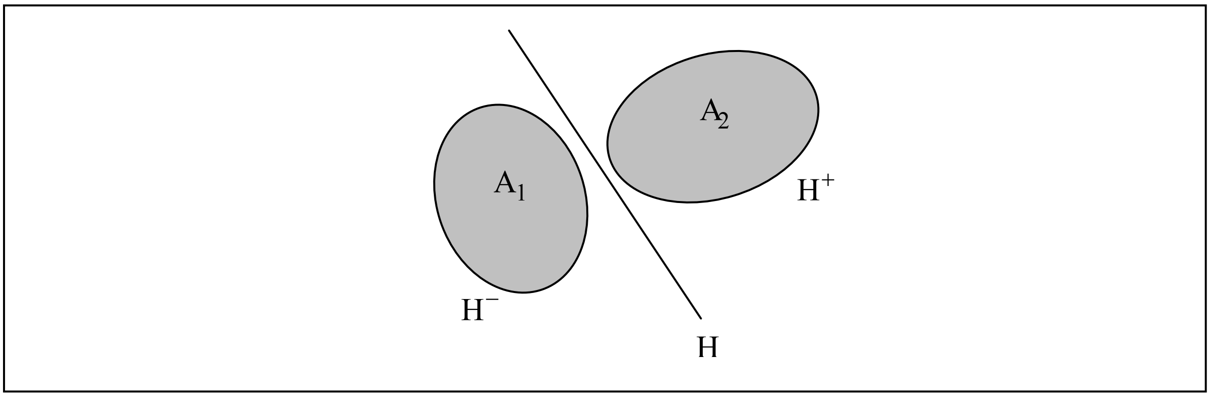
$$H^- = \left\{ y \in E^n \middle| \left\langle y^*, y \right\rangle \leq \alpha \right\}$$

ve

$$H^+ = \left\{ y \in E^n \middle| \left\langle y^*, y \right\rangle \geq \alpha \right\}$$

kümelerine H hiperdüzleminin oluşturduğu yarı uzaylar denir.

(1) eşitsizliğinden göründüğü gibi, A_1 ve A_2 ayrılabilir kümeler ise uygun bir α sayısı için $A_1 \subset H^-$, $A_2 \subset H^+$ olacaktır; yani H hiperdüzlemi bu iki kümeyi ayırmaktadır:



Şekil 1. Hiperdüzlem ile konveks kümelerin ayrılması

2. Lineer olmayan ayırma teoremleri ve konveks olmayan kümelerin ayrılabilirliği

E^n Öklid uzayında, konveks kapalı K konisi verilsin: $K \cap (-K) = \{0\}$ ve $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. E^n uzayında K konisini kullanarak kısmi sıralama oluşturalım: $\forall y_1, y_2 \in E^n$ için $y_1 - y_2 \in K$ ve $y_1 - y_2 \in \operatorname{int} K$ ise bunu sırası ile $y_1 \geq y_2$, $y_1 > y_2$ şeklinde yazalım.

*Tanım 3***.** $g : E^n \to R$ fonksiyonu verilsin. Eğer $y_1 > y_2$ eşitsizliğini sağlayan $\forall y_1, y_2 \in E^n$ vektörleri için

$$g(y_1) > g(y_2) \tag{3}$$

ise g fonksiyonuna K-monoton fonksiyon denir.

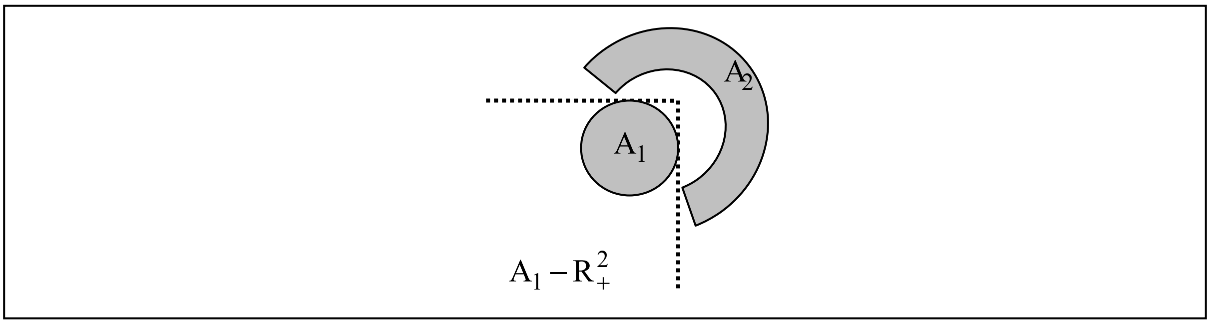
Eğer $y_1 \geq y_2$, $y_1 \neq y_2$ için (3) sağlanıyorsa, g fonksiyonuna kesin (strictly) K-monoton fonksiyon denir.

G_0 E^n ’ de verilen konveks, K-monoton, sürekli olan ve g(0)=0 koşulunu sağlayan tüm fonksiyonların kümesi olsun. Sıfırdan farklı $\forall y^* \in K^*$ için $y \to \langle y^*, y \rangle$ fonksiyonları G_0’ın elemanlarıdır. Burada K^*, K konisinin eşlenik konisidir: $K^* = \left\{ y^* \in E^n \middle| \langle y^*, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in K \right\}$.

G_{0s} ise G_0’daki kesin K-monoton fonksiyonlar kümesi olsun.

Tanım 4. A_1, A_2 kümeleri E^n’de boş olmayan kümeler olsun. Eğer $g : E^n \to R$ fonksiyonu için $g(y_1) \leq g(y_2)$ $\forall y_1 \in A_1$, $\forall y_2 \in A_2$ ise g fonksiyonu A_1 ve A_2 kümelerini ayırıyor denir.

Teorem 2. ([2]) $A_1, A_2 \subset E^n$ boş olmayan kümeler olsun. Eğer $A_1 - K$ konveks bir küme ve int $(A_1 - K) \cap A_2 = \varnothing$ ise bu durumda $A_1 - K$ ve A_2 kümelerini ayıran bir $g \in G_0$ fonksiyonu mevcuttur.



Şekil 2. Hiperdüzlem ile ayrılamayan kümeler

Şekil 2’deki A_1 ve A_2 kümelerini klasik ayırma yöntemi ile (yani hiperdüzlem ile) ayırmak mümkün değildir. Ancak bu kümeleri Teorem 2’deki G_0 fonksiyonlar kümesinin bir elemanı ile ayırmak mümkündür.

3. Wmim ve Pmin çözümlerin karakterizasyonu

2. Bölümde bahsedildiği gibi E^n kısmi sıralanmış Öklid uzayı olsun. $A \subset E^n$ kümesi verilsin.

Tanım 5. $y \in A$ olsun. Eğer $\overline{y} \le y$, $\overline{y} \ne y$ $(\overline{y} < y)$ koşulunu sağlayan $\overline{y} \in A$ elemanı mevcut değilse $y \in A$ elemanına A kümesinin minimal (zayıf minimal) noktası denir. A kümesinin minimal (zayıf minimal) noktaları kümesi $\min A$ ($w \min A$) şeklinde gösterilir.

Aşağıdakiler kolaylıkla gösterilebilir:

$$\min A = \left\{ y \in A \,\middle|\, (A - y) \cap (-K) = \{0\} \right\} \tag{4}$$

$$w \min A = \left\{ y \in A \,\middle|\, (A - y) \cap (-\operatorname{int} K) = \varnothing \right\} \tag{5}$$

Tanım 6. ([3]) $y \in A$ verilsin. Eğer

$$K \setminus \{0\} \subset \operatorname{int} N,\ (A - y) \cap (-N) = \{0\},\ N \cap (-N) = \{0\} \tag{6}$$

koşullarını sağlayan konveks kapalı N konisi mevcut ise y noktasına A kümesinin asıl (proper) minimal noktası denir. A kümesinin asıl minimal noktaları kümesini $p \min A$ şeklinde göstereceğiz. Literatürde asıl minimal noktanın bir başka tanımı da mevcuttur:

Tanım 7. ([1]) $y \in A$ verilsin. Eğer

$$\operatorname{cl}\ \operatorname{cone}(A + K - y) \cap (-K) = \{0\} \tag{7}$$

ise y noktasına A kümesinin asıl minimal noktası denir.

[1]'de bu iki tanımın eş değerliliği ispat edilmiştir.

Aşağıdaki teorem, E^n 'de verilen bir kümenin zayıf minimal noktalarını karakterize etmektedir.

Teorem 3. ([2]) A, E^n 'de verilmiş bir küme olsun. $y_0 \in A$ vektörünün zayıf minimal olması için gerek ve yeter koşul öyle $g \in G_0$ olmasıdır ki, her $y \in A$ için $g(y_0) \le g(y)$ olsun.

Aşağıdaki teoremde kümenin asıl minimal noktaları için gerek koşul verilmiştir.

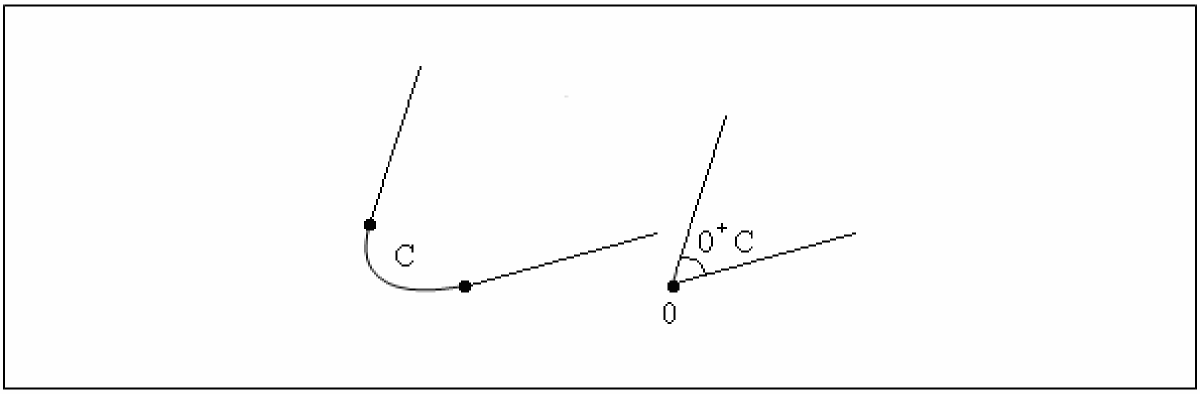
Teorem 4. ([2]) A, E^n 'de verilmiş bir küme olsun. $y_0 \in A$ asıl minimal nokta ise öyle $g \in G_{0s}$ vardır ki her $y \in A$ için

$$g(y_0) \le g(y) \tag{8}$$

Bu teoremde verilen (8) koşulu $y_0 \in A$ noktasının asıl minimal olması için yeter koşul değildir. (8) koşulunun yeter olması için ilave koşullara ihtiyaç vardır. Öncelikle konveks analiz teorisinden bazı kavramlara değinelim. [bkz. 7]. $C \subset E^n$ boş olmayan konveks bir küme olsun.

$$0^+C = \left\{ y \in E^n \,\middle|\, x + \lambda y \in C,\ \forall x \in C,\ \forall \lambda \geq 0 \right\}$$

kümesine C'nin recessive konisi denir.



Şekil.3 Recessive koni

$$0^+C = \left\{ y \,\middle|\, C + y \subset C \right\} \tag{9}$$

olduğu [7]'de gösterilmiştir.

L.S Pontryagin $A \stackrel{*}{-} B = \left\{ y \,\middle|\, y + B \subset A \right\}$ kümesini A ve B'nin geometrik farkı olarak adlandırmıştır ve lineer diferansiyel oyunlar teorisinde bu kavramdan yararlanmıştır. Bu tanımı göz önüne alarak (9)'u $0^+C = C \stackrel{*}{-} C$ şeklinde yazabiliriz.

$f : E^n \to R \cup \{+\infty\}$ konveks fonksiyon olsun. $C = \text{epi}f$ kümesi bilindiği gibi konveks bir kümedir. Bu kümenin recessive konisi olan $0^+(\text{epi}f)$ kümesi [7]'de gösterildiği gibi bir fonksiyonun epigrafıdır. Bu fonksiyona f'in recessive fonksiyonu denir ve $f0^+$ şeklinde yazılır. Demek ki tanıma göre

$$\text{epi}(f0^+) = 0^+(\text{epi}f).$$

Şimdi bu çalışmanın esas teoremini yazabiliriz:

Teorem 5. $A \subset E^n$ bir küme olsun. $y_0 \in A$ noktası verilsin. Eğer bir $g \in G_{0s}$ için

$$-K \subset \text{int}\left\{ y \,\middle|\, (g0^+)(y) \leq 0 \right\} \tag{10}$$

koşulu sağlanıyorsa, (8) eşitsizliği y_0 noktasının asıl minimal nokta olması için yeter koşuldur.

İspat $g \in G_{0s}$ için (8) ve (10)'un doğru olduğunu varsayalım. $y_0 \in p\min A$ olduğunu ispat edelim. $g_1 : E^n \to R$ fonksiyonunu $g_1(y) = g(y + y_0) - g(y_0)$ şeklinde belirleyelim.

$G_1 = \left\{ y \in E^n \left| g_1(y) \le 0 \right.\right\}$ olsun. [7]'den $g_1 0^+ = g 0^+$ ve $0^+ G_1 = \left\{ y \left| (g_1 0^+)(y) \le 0 \right.\right\}$ elde edilmektedir. Demek ki, (10)

$$-K \subset \operatorname{int} 0^+ G_1 \tag{11}$$

şeklinde yazılabilir. $\operatorname{cone}(A + K - y_0) \cap (-K) = \{0\}$ olduğu kolayca gösterile bilinir.Teoremin ispatı için

$$\operatorname{cl}\operatorname{cone}(A + K - y_0) \cap (-K) = \{0\} \tag{12}$$

olduğu gösterilmelidir. Tersini düşünelim: (12) doğru olmasın. O halde sıfırdan farklı bir $k \in K$ için

$$-k \in \operatorname{cl}\operatorname{cone}(A + K - y_0) \tag{13}$$

$g_1(-k) < 0$ olduğu aşikardır ve g_1 sürekli olduğundan $-k \in \operatorname{int} G_1$'dir. Ayrıca (11)'den $-k \in \operatorname{int} 0^+ G_1$ elde edilir. Buradan (13)'ü göz önüne alırsak

$$\hat{y} \in 0^+ G_1,\ \hat{y} \in \operatorname{int} G_1 \tag{14}$$

koşulunu sağlayan bir $\hat{y} \in \operatorname{cone}(A + K - y_0)$ vektörünün mevcut olduğunu söyleyebiliriz.

$0 \in G_1$ ve G_1 konveks küme olduğundan (14)'ten her $\lambda \in (0,1]$ için $\lambda\hat{y} \in \operatorname{int} G_1$ elde edilir. Buradan, [7]'de Teorem 8.3'ü göz önüne alırsak, $\hat{y} \in 0^+ G_1$'den

$$\lambda\hat{y} + \mu\hat{y} \in \operatorname{int} G_1,\ \forall \mu \ge 0 \text{ ve } 0 < \lambda \le 1 \tag{15}$$

elde edilir. Buradan

$$g_1((\lambda + \mu)\hat{y}) < 0,\ \forall \mu \ge 0 \text{ ve } 0 < \lambda \le 1 \tag{16}$$

elde edilir.

$\hat{y} \in \operatorname{cone}(A + K - y_0)$ olduğundan $r\hat{y} \in A + K - y_0$'ı sağlayan bir $r > 0$ sayısı vardır.

$$g_1(r\hat{y}) \ge 0 \tag{17}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilinir.

$r > 0$ için $\mu + \lambda = r$ koşulunu sağlayan $\mu > 0$ ve $\lambda > 0$ sayılarını alalım. O halde (16) ve (17)'den

$$g_1(r\hat{y}) < 0 \text{ ve } g_1(r\hat{y}) \ge 0$$

elde edilir.

Bu çelişki (12)'nin doğru olduğunu gösterir. Böylece teorem ispat edilmiş olunur.

4. Sonuç

Çok kriterli optimizasyon teorisinin esas amaçlarından biri optimal çözümlerin varlığı hakkında koşullar bulmaktır. Gasımov (1992) çalışmasında konveks olmayan fonksiyonların seviye kümeleri yardımı ile lineer olmayan ayırma teoremi geliştirerek asıl minimal noktalar için gerek koşul bulmuştur.

Bu çalışmada ise Gasımov'un çalışması geliştirilerek verilen gerek koşulun yeter koşul olması için uzayda sıralama sağlayan koni ile ayırma fonksiyonunun recessive fonksiyonu arasında bir ilişki bulunmuş ve bu ilişkinin sağlanması halinde verilen noktanın asıl minimal nokta olduğunu gösteren bir teorem ispat edilmiştir.

Kaynaklar

[1] Benson, H. P., (1979), *An Improved Definition of Proper Efficiency for Vector Maximization with Respect to Cones,* J. Math. Anal. Appl., v. 71, n. 1.
[2] Gasımov, R. (1992), *Duality in Nonconvex Optimization,* Phd Thesis, Bakû.
[3] Henig, M. I., (1982), *Proper Efficiency with Respect to Cones,* Journal of Optimization Theory and Applications, v. 36, n. 3, 387-407.
[4] Huang, X. X., Yang, X. Q. (2002), *Nonlinear Lagrangian for Multiobjective Optimization and Applications to Duality and Exact Penalization*, SIAM Journal on Optimization , v. 13, 675–692.
[5] Huang, X. X., Yang, X. Q. (2004), *Duality for Multiobjective Optimization via Nonlinear Lagrangian Functions,* Journal of Optimization Theory and Applications, v. 120, 111–127
[6] Nehse, R. (1981), *A New Concept of Separation. – Comment.*, Math. Univ. Carolinae, 22, 1, 169–179.
[7] Rockafellar, R. T., (1972), *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton.