www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 2 (2008) 105-124

İstatistikçiler Dergisi

Bazı bağımlı aktüeryal risk süreçlerinin deneysel sonuçları

Selim Dağlıoğlu

T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı
Strateji Geliştirme Başkanlığı
06030, Ulus, Ankara, Türkiye
selim.daglioglu@gmail.com

Cenap Erdemir

Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800, Beytepe, Ankara, Türkiye
cenap@hacettepe.edu.tr

Özet

Bu çalışmada, bir ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan portföyde, bağımlı risk süreçlerinin üç ayrı model grubu ele alınmıştır. Bu model grupları, primler sabit miktarlarla toplandığında hasar süreçlerinin birinci dereceden otoregresif modeli, prim ve hasar süreçlerinin birinci dereceden otoregresif modelleri ve sigortacının kazancı ile ilgili otoregresif-hareketli ortalama modelleridir. Bu modellere uyan süreç dağılımlarının, süreç ortalamasındaki değişmelerin, başlangıç sermayesindeki ve faiz oranlarındaki değişmelerin ve hasarların şimdiki dönemle önceki dönemler arasındaki bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkiler üretilmiş yapay veri kullanılarak incelenmiştir. Deneysel sonuçlar, iflas kuramında belirtildiği gibi her etmenin iflas olasılıkları üzerinde özel önemi olduğunu göstermiştir.

***Anahtar sözcükler: Bağımlı aktüeryal riskle; Lundberg-tipi eşitsizli; Doğrusal süreç modeller; İflas olasılıkları*.**

Abstract

Experimental outcomes of some dependent actuarial risk processes

In this study, three groups of models of dependent risk processes in the portfolio that consists of independent insurance branches are considered. These model groups are fixed premiums and first order autoregressive model of claims, first order autoregressive models of premiums and claims and autoregressive-moving average models of insurance firm gains. The effects of the process distributions, changes in mean, changes in initial capitals, changes in interest rates and dependency of claims between the current and previous terms on the ruin probabilities are investigated using by generated artificial data. Experimental outcomes show that each factor has a special importance on the ruin probabilities as stated in the ruin theory.

Keywords: Dependent actuarial risks; Lundberg-type inequality; Linear processes; Ruin probabilities.

1. Giriş

Aktüeryal risk teorisinde bireysel risk modelleri ve kolektif risk modelleri gibi pek çok model bağımsızlık varsayımı altında kurulmaktadır. Ancak bağımsızlık varsayımının klasik modellerde bu kadar önemli rol oynamasına rağmen, sigorta ve reasürans ürünlerinin artan karmaşıklığı ve pek çok durumda bağımsızlık varsayımının sağlanmaması nedeniyle aktüerya literatüründe bağımlı risklerin modellenmesine ilgi her geçen gün artmaktadır.

Aktüeryal risk teorisinde iki tür bağımlılık vardır. İlk tür bağımlılık; sigortacının portföyünde bulunan farklı sigorta kollarına ait poliçeler ya da farklı sigorta kolları arasında ilişki oluşmasından kaynaklanan bağımlılık şeklindedir. Örnek olarak, sigortacının portföyünde farklı sigorta kollarına ilişkin poliçelere sahip olan bir kişinin büyük bir kaza geçirmesi durumunda portföydeki farklı sigorta kollarına ilişkin poliçelerde hasar oluşur. Ayrıca sigortacının portföyünde bir çifte (karı-koca) ve/veya belli bölgede yaşayan kişilere ait çok sayıda poliçenin bulunması durumunda fırtına, patlama, deprem, salgın hastalık gibi felaketlerin meydana gelmesi durumunda portföyde bulunan pek çok poliçede hasar oluşur. Bu gibi durumlarda portföyde bulunan poliçelerin ya da sigorta kollarının tamamen bağımsız olduğunu söylemek oldukça güçtür. Bu türde bağımlılığın olduğu risk modelleri; Dhaene and Goovaerts (1997), Ambagaspitiya (1998, 1999), Wang (1998), Denuit et. al. (1999), Cossette and Marceau (2000), Cossette et. al. (2000), Müller and Pflug (2001), Goovaerts and Kaas (2002), Wu and Yuen (2003), Ribas et. al.(2003) gibi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

İkinci tür bağımlılık ise hasar ve/veya prim süreçlerinin geçmiş dönemde gerçekleşen hasar miktarı ve/veya prim miktarı ile arasındaki ilişkilerinden kaynaklanan bağımlılıktır. Mevcut hasar ile eski hasarlar arasındaki bağımlılık genel olarak geçmiş dönemde portföyde bulunan bazı poliçelerin gelecek dönemde de portföyde kalacak olmasından kaynaklanır. Bu türde bağımlı risklerin modellenmesinde zaman serileri yaklaşımı kullanılır ve iflas olasılıklarının gösteriminde martingale eşitsizliklerinden yararlanılır. Bu türde bağımlılığın olduğu bağımlı risk modelleri; Gerber(1982), Promislow(1991), Bowers(1997), Yang and Zhang (2003), Zhang (2005), Zhang et. al. (2007) gibi pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Kuramsal birçok çalışma olmasına rağmen risk süreçleri üzerinde birçok etmenin aynı anda incelendiği deneysel çalışmalar yok denecek kadar az sayıdadır. Ayrıca bağımlı risk süreçlerini doğrusal durağan süreçler olarak ele alıp, önemli etmenler altında süreçlerin davranışlarını inceleyen çalışmaya olan ihtiyacı kısmen de olsa karşılamak amacıyla, bu çalışmada bir ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan sigortacı portföyündeki poliçelere ait bağımlı risk süreçlerinin, birinci derece otoregresif doğrusal modele uyduğu durum ile sigortacının bir dönemde (genellikle bir yıl) topladığı primlerden aynı yılda ödediği hasarların çıkarılmasıyla elde ettiği kazancının otoregresif-hareketli ortalama modeline uyduğu durumlarda bağımlılığın ve modellerdeki hata terimlerinin dağılımının, başlangıç sermayesinin ve faiz oranın iflas olasılıklarının üst sınırları üzerindeki etkisi kuramsal olarak gözden geçiriliş ve modellerin davranışları, yapay olarak üretilen sayısal veri yardımıyla incelenmiştir.

Makalenin ikinci bölümünde bağımlı risk süreçlerinin zaman serisi modelleri üçüncü bölümünde artık süreçleri ve iflas olasılıkları gözden geçirilmiş, dördüncü bölümde ise asıl deneysel çalışmaya ilişkin sonuçlar verilmiştir.

2. Bağımlı risk süreçlerinin zaman serisi modelleri

Bu bölümde bir ya da birden fazla bağımsız sigorta koluna ait poliçelerden oluşan bir portföydeki hasar ve/veya prim miktarlarının birinci derece otoregresif modele uyduğu zaman serisi modelleri ile sigortacının belli bir dönemde (genellikle bir yıl) topladığı primlerden aynı dönemde ödediği hasar miktarlarının çıkarılmasıyla elde ettiği kazanç sürecinin otoregresif hareketli ortalama modeli ve ayrıca hasar ve/veya prim süreçleri ile kazanç süreçlerinin bu modellere uyması için gerekli koşullar verilmiştir.

2.1. Hasar ve prim süreçlerine ilişkin otoregresif modeller

Bu bölümde bir ya da birden fazla bağımsız sigorta koluna ait poliçelerden oluşan bir portföydeki hasar ve prim süreçlerine ilişkin birinci derece otoregresif modeller ile bağımlı risklerde bu modellerin geçerli olması için gerekli koşullar ele alınmıştır.

2.1.1. Hasar süreçlerinin birinci derece otoregresif modeli

Z_n, $[n-1, n]$ aralığı boyunca ya da n. yılda gerçekleşen hasarları göstermek üzere, $\{Z_1, Z_2, ...\}$ hasar sürecinin bir negatif olmayan rastlantı değişkenler dizisidir ve

$$\begin{aligned} &Z_n = X_n + aZ_{n-1}\ , \qquad n = 1,2,3,... \\ &Z_0 = z_0 \end{aligned} \tag{1}$$

şeklindeki birinci derece otoregresif modele uyar. Burada $\{X_n\}$, bağımsız ve aynı dağılımlı (i.i.d) negatif olmayan rastlantı değişkenler dizisidir ve $0 \le a < 1$ şeklindedir. Bu modeldeki a parametresi ilişkinin derecesini ölçer. Eğer $a = 0$ ise hasar süreci bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olur ve herhangi zaman aralığında meydana gelen hasarlar eski hasarlardan bağımsızdır. Eğer $a \cong 1$ ise süreç çok bağımlı olur. Başlangıç hasar miktarı bilinen bir sabit sayıdır ve z_0 ile gösterilir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı X_n terimleri, n. dönemde portföye katılan poliçelerde oluşan hasar miktarı olarak yorumlanabilir. İstatistiksel bakış açısından modelin hata terimi olarak tanımlanır. Ayrıca X_n' nin genel dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \le x)$ şeklindedir. Burada keyfi bir X_n, X ile gösterilir ve $E(X) < +\infty$ olduğu varsayılır [5].

2.1.2. Prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modeli

Prim süreçleri de Eş.(1) ile verilen modele benzer şekilde,

$$\begin{aligned} &W_n = Y_n + bW_{n-1}\ , \qquad \mathrm{n} = 1,2,3,... \\ &W_0 = w_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Eş.(2) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyar. Bu modelde $\{Y_1, Y_2, ...\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı negatif olmayan rastlantı değişkenleri dizisidir. İstatistiksel bakış açısından Y_n, modelin hata terimi olarak tanımlanır. Y_n, Y ile gösterildiğinde Y_n' nin genel dağılım fonksiyonu $G(x) = P(Y \le x)$ ve $E(Y) < \infty$ olmak üzere prim sürecini gösteren $\{W_1, W_2, ...\}$ negatif olmayan rastlantı değişkenleri dizisidir. Burada $0 \le b < 1$' dir.

Bu modelde W_n'nin, $[n-1, n]$ zaman aralığında ya da n. yıl boyunca toplanan primlerin son yılın primi ile hata rastlantı değişkeninin (hata terimleri bağımsız ve aynı dağılımlıdır) toplamından oluştuğu varsayılır. Bu modelde b parametresi geçmiş dönemden kalan poliçelerin mevcut portföydeki oranı olarak yorumlanabilir. Diğer bir deyişle b parametresi mevcut dönemde toplanan primler ile geçmiş dönemde toplanan primler arasındaki ilişkinin derecesini ölçer. Eğer b sıfır ise, prim süreci bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olur. Bu durumda herhangi zaman aralığında toplanan prim eski bilgilerden bağımsızdır. Eğer b, 1' e yakınsa, süreçte bağımlılığın çok fazla olduğu söylenebilir. Bu durumda "eski müşterilerin büyük bir kısmı yeni zaman diliminde portföyde kalacaktır" denilebilir. Ayrıca bu modelde; Y_n, n. yılda portföye katılan poliçelerin prim geliri olarak yorumlanabilir. Başlangıç priminin belli olduğu varsayılır ve w_0 ile gösterilir [5].

Birinci derece otoregresif modellerde durağanlık koşulu gereği bir dönem gecikmeli seriye ait parametreler $(-1,1)$ aralığında değerler alır. Ancak prim ve hasar rastlantı değişkenlerinin negatif değerler almaması istendiğinden prim ve hasar süreçlerine ilişkin modellerdeki a ve b parametreleri $[0,1)$ aralığında değerler almaktadır.

2.2. Kazanç modelleri

Bu bölümde sigortacının belirli bir dönemde topladığı primlerden aydı dönemde ödediği hasar miktarlarının çıkarılmasıyla elde ettiği kazancının zaman serisi modelleri ve bu modellerin kullanılabilmesi için gerekli koşullar gözden geçirilmiştir.

2.2.1. Otoregresif hareketli ortalama modeli

G_n, sigorta şirketinin n. yılda elde ettiği kazancı (n. yılda topladığı primler eksi aynı yılda ödediği hasar miktarları) olsun. $\{G_n\}$ süreci,

$$G_n = a_1 G_{n-1} + ... + a_p G_{n-p} + X_n + b_1 X_{n-1} + ... + b_q X_{n-q} \tag{3}$$

şeklindeki **ARMA(p,q)** modeline uyar. Burada $a_1,...,a_p$ ve $b_1,...,b_q$'ler aşağıda belirtilen şartları sağlayan kesin sabitler ve burada $X_1, X_2,...$'ler $E(X) > 0$ olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleridir. Bu modelin başlangıç değerleri $g_0,...,g_{-p+1}$ ve $x_0,...,x_{-q+1}$ bilinen sabit sayılardır. Burada $G_n = g_n$ $(n = 0,1,...,-p+1)$, $X_n = x_n$ $(n = 0,1,...,-q+1)$ şeklindedir. $\alpha = 1 - a_1 - ... - a_p$; $\beta = 1 + b_1 + ... + b_q$ ve B, G_j zaman serisi üzerinde gecikme sayacı ($BG_j = G_{j-1}$; $\mathrm{j} = 0 \pm 1,....$),

$$P(z) = 1 - a_1 z - ..... - a_p z^p \quad , \tag{4}$$

$$Q(z) = 1 + b_1 z + ... + b_q z^q \quad , \tag{5}$$

olmak üzere (2.3) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$P(B)G_n = Q(B)X_n \tag{6}$$

Ayrıca $a_1,...,a_p$ ve $b_1,...,b_q$ katsayıları hakkında varsayımlar aşağıdaki gibidir:

1. $\beta = Q(1) > 0$;
2. $P(z) = 0$ denkleminin her çözümü kompleks düzlemin birim çemberinin dışındadır;
3. $P(z)$ ve $Q(z)$ herhangi genel faktöre sahip değildir.

$P(0) = 1$ olduğundan ikinci varsayımda $\alpha = P(1) > 0$ olduğu anlamına gelir [2, 3, 6].

(3) modelinde $(p = q = 1)$ olduğu özel durumda **ARMA(1,1)** modeli

$$G_n = aG_{n-1} + X_n + bX_{n-1}$$

şeklindedir. Bu durumda a ve b parametreleri için koşullar,

$$1 + b > 0, \ |a| < 1 \quad \text{ve} \quad a + b \neq 0$$

şeklinde yazılır[3].

2.2.2. Hareketli ortalama modeli

Eş. (3) ile verilen sigorta şirketinin n. yılda elde ettiği kazancının (n. yıldaki primler eksi hasarlar) **ARMA(p,q)** modelinde G_n' ler tekrarlı bir şekilde yerine koyularak ($n-1, n-2,...$ için formülü kullanarak) sağ taraftaki G'ler yok edebilir ve (3) eşitliğindeki G_n; $X_n, X_{n-1}, X_{n-2},....$ terimleri ile açıklanabilir. Bu yolla karma **ARMA(p,q)** model, hareketli ortalama **MA(q)** modeline indirgenir. Bir başka deyişle, eşitlik (3)'te $p = 0$ olduğu özel duruma dönüşür. Bu durumda Eş. (3),

$$G_n = X_n + b_1 X_{n-1} + ... + b_q X_{n-q} \tag{7}$$

şeklinde yazılır [3].

$n \to \infty$ iken $U_n \to \infty$ olduğundan emin olmak için $\beta = 1 + b_1 + ... + b_q$ olmak üzere $\beta > 0$ koşulu burada da geçerlidir.

Genişleme katsayısını gösteren b'_k,

$$\left(\frac{Q(z)}{P(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k z^k \right) \tag{8}$$

şeklinde olmak üzere $\{G_n\}$ süreci hareketli ortalama $(MA(\infty))$ süreci olarak,

$$G_n = P(B)^{-1} Q(B) X_n = X_n + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k X_{n-k} \tag{9}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eş. (9) ile verilen model, $j \le -p-q$ için $X_j = 0$ kuralını sağlar ve bu modelde $x_{-q},....., x_{-q-p+1}$ başlangıç değerleri uygun bir şekilde seçilir. b'_k'nın $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < \infty$ ve $\beta = (1 + b_1 + ... + b_q) > 0$ koşullarını sağladığının gösterilmesi gerekir.

b'_k üstel olarak (ikinci varsayım kullanılarak Eş.(8)'deki genişlemeden görülebildiği gibi) sıfıra yaklaşır. Bunun sonucunda $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < \infty$ koşulu sağlanır ve buradan β,

$$\beta' - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k = \frac{Q(1)}{P(1)} = \frac{\beta}{\alpha} \tag{10}$$

şeklindeki eşitliği sağlar; böylece

$$g_j = x_j + \sum_{k=0}^{p+q+j-1} b'_k x_{j-k} \qquad (j = 0,1,...,-p+1) \tag{11}$$

şeklinde yazılır [2, 3].

3. Artık süreçleri ve iflas olasılığı

Bu bölümde, kesikli risk modellerinde bağımlı risklerin modellenmesinde kullanılan zaman serileri modelleri geçerli olduğunda artık (surplus) süreçlerinin ve net-kâr şartının nasıl olduğu ile düzeltme katsayısının ve iflas olasılıkları için üst sınırların nasıl hesaplanacağı incelenmiştir.

3.1. Artık süreçleri

Bu bölümde, bir veya birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan portföyler için artık süreçleri gözden geçiriliştir.

3.1.1. Paranın zaman değerini içermeyen ($r = 0$) artık süreçleri

Aktüerya literatüründe bir sınıf için artık süreci (risk rezervi) genellikle

$$U_n = u + cn - S_n \ , \qquad n = 0,1,2,... \tag{12}$$

biçiminde tanımlanır. Burada

U_n : Sigorta şirketinin n anındaki artık sürecini,

u : Sigorta şirketinin başlangıç sermayesini,

c : Her dönemde alınan sabit prim miktarını,

S_n : n dönem boyunca poliçede oluşan toplam hasar miktarını

gösterir. Ayrıca n dönem boyunca oluşan toplam hasar miktarını gösteren S_n,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

şeklindedir ve bu modellerde paranın zaman değerinin olmadığı varsayılır ($r = 0$). Burada Z_i, *i.* dönemdeki hasarların toplamıdır ve Z_i'ler $\mu = E[\mu_i] < c$ ile bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenlerdir [1].

Ayrıca portföydeki bir poliçede oluşan hasar miktarları süreci Eş. (1) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda Z_n'ler tekrarlı bir şekilde yerine koyularak $E[X_i] < (1-a)c$ eşitliğini sağlayan bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri açısından

$$Z_n = X_n + aX_{n-1} + a^2 X_{n-2} + ... + a^{n-1} X_1 + a^n z_0$$

şeklinde yazılabilir. Buradan Eş. (12) ile verilen artık sürecindeki n dönem boyunca oluşan toplam hasar miktarı S_n,

$$\begin{aligned} S_n &= X_n + (1+a)X_{n-1} + \cdots + \left(1 + a + \cdots + a^{n-1}\right)X_1 + \left(a + a^2 + \cdots + a^n\right)z_0 \\ &= X_n + \frac{1-a^2}{1-a} X_{n-1} + \cdots + \frac{1-a^n}{1-a} X_1 + a\frac{1-a^n}{1-a} z_0 \end{aligned}$$

şeklindedir[1].

Başka bir gösterimle artık süreci

$$U_n = u + (c - Z_1) + (c - Z_2) + ... + (c - Z_n)$$

şeklinde de tanımlanabilir. Buradan G_n, n yılda elde edilen kazanç olmak üzere artık süreci

$$U_n = u + G_1 + ... + G_n = u + \sum_{i=1}^{n} G_i \qquad (13)$$

şeklinde tanımlanır [3].

(13) eşitliği ile verilen artık sürecindeki kazanç süreci (sigorta şirketinin herhangi bir yılda topladığı primler eksi aynı yılda ödediği hasarlar) kazanç modellerine uyar.

3.1.2. Paranın zaman değerini içeren ($r \neq 0$) artık süreçleri

(12) eşitliği ile verilen artık sürecine paranın zaman değeri eklendiğinde; yani faiz olmaması kısıdı kaldırıldığında bir sigorta şirketinin bir ya da birden fazla sigorta koluna ait poliçelerden oluşan portföyündeki bir sigorta kolu için kesikli artık süreci

$$U_n = u(1+r)^n + \sum_{i=1}^{n} W_i (1+r)^{n-i+1} - \sum_{i=1}^{n} Z_i (1+r)^{n-i} \qquad (14)$$

şeklinde tanımlanır. Burada U_n, n anındaki artık değeri; u, sigorta şirketinin başlangıç sermayesi ve r bileşik faiz oranı olmak üzere sabit faiz oranının $r \geq 0$ şeklinde olduğu, Z_i hasarının dönemin sonunda ödendiği ve W_i priminin dönemin başında ödendiği varsayılır [5].

3.2. Net-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

Bir risk modeli için iflas olasılıkları göz önünde tutulduğunda net-kâr şartı, ortalama olarak, her sigorta döneminde prim gelirinin hasar ödemelerini aşacağını ifade eder; yani her $i = 1,2,...$ için $E[W_i] > E[Z_i]$ şeklinde olduğu varsayılır. Ancak zaman serileri yaklaşımı ile modellenen bağımlı risklerde prim ve hasar süreçlerinin dağılımları genellikle bilinmediği için net-kâr şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimleri açısından yazılır. Bunun sonucunda düzeltme katsayısı R de hata terimlerinin dağılımları yardımıyla elde edilir. Ayrıca hata terimleri bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri olduğundan birinci hata teriminin dağılımı ile düzeltme katsayısını elde etmek yeterlidir. Bu bölümde bağımlı risklerin zaman serisi modellerinde net-kâr şartı ve düzeltme katsayılarının nasıl hesaplandığına ilişkin yöntemler bir arada incelenerek gözden geçirilmiştir.

3.2.1. Hasar ve primler birinci derece otoregresif sürece uyduğunda net-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

Hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif sürece uyduğu durumda (yani hasar süreci Eş. (1)'i ve prim süreci Eş. (2)'yi sağladığında) net-kâr şartı,

$$\frac{1-a^n}{1-a} E[X] + a^n z_0 < \frac{1-b^n}{1-b} E[Y] + b^n w_0 \qquad (15)$$

şeklindedir. Burada $E[Y] > E[X]$ ve $1 \geq b \geq a$ olur.

Eş. (15) ile verilen net-kâr şartı 1'den küçük iflas olasılıkları için yeterli bir şarttır ancak 1'den daha küçük iflas olasılıkları için gerekli koşul $n \to \infty$ iken,

$$\frac{E[X]}{1-av}\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}-va\frac{1-a^n}{1-a}\right]-\frac{E[Y]}{1-bv}\left[(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}-bv\frac{1-b^n}{1-b}\right]<\infty \tag{16}$$

şeklindeki gibidir; burada $v=(1+r)^{-1}$ iskonto faktörüdür.

X'in moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu, $1+a<(1+bv^2)/v$, $E[Y]>E[X]$ olduğu ve $R>0$ şeklinde bir düzeltme katsayısı R olduğu varsayıldığında R,

$$E\left[\exp\left(-\frac{R}{1-bv}Y\right)\right]E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right]=1 \tag{17}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir. (17) eşitliğinin çözülmesi ile elde edilen R, düzeltme katsayısı olarak adlandırılır. (17) eşitliğinin çözülmesi ile birden fazla R elde edilirse en küçük pozitif sayı R düzeltme katsayısı olarak alınır [5].

(17) eşitliği daha basit olarak,

$$M_Y\left(-\frac{R}{1-bv}\right)M_X\left(\frac{Rv}{1-av}\right)=1 \tag{18}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda R düzeltme katsayısı hata terimlerinin dağılımlarına bağlı olarak hata terimlerinin moment çıkaran fonksiyonları yardımıyla elde edilir. Hata terimlerinin dağılımlarının normal dağılıma ya da üstel dağılıma uyduğu durumlarda R düzeltme katsayısı aşağıdaki gibi elde edilir:

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ve $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ şeklinde normal dağılıma sahip olduğunda Eş.(18),

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Ry}{1-bv}}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2}dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{Rxv}{1-av}}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2}dx = 1$$

şeklindedir. Buradan

$$e^{-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2}\,e^{\mu_1\frac{Rv}{1-av}+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2}=e^{\mu_1\frac{Rv}{1-av}-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2}=1$$

$$\Rightarrow \mu_1\frac{Rv}{1-av}-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2=0 \tag{19}$$

şeklinde yazılabilir.

X ve Y'nin dağılımları ile dağılım parametreleri, faiz oranı r, a ve b katsayıları bilinen sabitler olduğundan bu değerler (19) ile verilen eşitlikte yerine koyularak denklem çözüldüğünde R düzeltme katsayısı elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim \exp(\lambda)$ ve $Y \sim \exp(\beta)$ şeklinde üstel dağılıma sahip olduğunda R,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} \lambda e^{y\left(-\frac{R}{1-bv}\right)} dy \int_0^\infty e^{-\beta x} \beta e^{x\left(\frac{Rv}{1-av}\right)} = 1$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. İntegrallerin alınmasıyla eşitlik,

$$\frac{\lambda}{\lambda + \dfrac{R}{1-bv}} \frac{\beta}{\beta - \dfrac{Rv}{1-av}} = 1$$

şeklinde olur. Buradan

$$R = \frac{\beta(1-av) - \lambda v(1-bv)}{v} \tag{20}$$

yazılır. Bu eşitlikte bilinen sabitler olan dağılımın parametreleri (λ ve β), r faiz oranı ile a ve b katsayıları yerlerine koyulduğunda R düzeltme katsayısı elde edilir.

3.2.2. Primler sabit sürece, hasarlar birinci derece otoregresif sürece uyduğunda net-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

Primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar sürecinin ise (1) eşitliği ile verilen birinci derece otoregresif sürece uyduğu; yani $b = 0$ (örneğin $W_i = Y_i$, $i = 1,2,...$' ler bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleridir) ve X'in moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu varsayıldığında net-kâr şartı

$$nE[W_n] > \frac{1-a^n}{1-a} E[X] + a^n z_0$$

şeklindedir. Ayrıca düzeltme katsayısı R,

$$E[\exp(-RW)] E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right] = 1 \tag{21}$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir [1, 5].

(3.10) eşitliği,

$$\exp(-Rc) M_X\left(\exp\left(\frac{Rv}{1-av}\right)\right) = 1 \tag{22}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikten anlaşılacağı gibi R düzeltme katsayısı X'in dağılımına bağlı olarak X'in moment çıkaran fonksiyonu yardımıyla yukarıda verilen eşitliklerin çözülmesi ile elde edilir.

X'in dağılımı $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde olduğunda (22) eşitliği,

$$\exp\left(-Rc\right)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{Rxv}{1-av}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = 1$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı,

$$R = \frac{2\left(c - \left[\mu v/(1-av)\right]\right)}{\sigma^2\left(v/(1-av)\right)^2} \tag{23}$$

şeklinde elde edilir.

X 'in dağılımı $X \sim \exp(\lambda)$ şeklinde olduğunda (22) eşitliği,

$$\exp\left(-Rc\right)\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \lambda e^{x\left(\frac{Rv}{1-av}\right)} = 1$$

şeklinde yazılır. Daha basit bir şekilde

$$\exp\left(-Rc\right) \frac{\lambda}{\lambda - \dfrac{Rv}{1-av}} = 1 \tag{24}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı elde edilir.

3.2.3. Yıllık kazanç süreçlerinde net-kâr şartı ve düzeltme katsayısı

Sigorta şirketinin n yılda elde ettiği kazançların, **ARMA(p,q)** modeline uyduğu durumda net-kâr şartı, ortalama olarak, her sigorta döneminde prim gelirinin hasar ödemelerini aşacağı; yani her $i = 1,2,...$ için $E[W_i] > E[Z_i]$ şeklinde olduğu varsayımına uyar. Ancak yıllık kazanç modellerinde primlerin bilinen sabit miktarlarla toplanması ve hasar dağılımlarının bilinmesi nedeniyle yıllık kazanç modelinde net-kâr şartı diğer bağımlı risklerin zaman serisi modellerinden farklı olarak hasar değişkeni ve primler açısından yazılır. Bu durumda net-kâr şartı, c dönemsel olarak toplanan prim miktarları ve Z_i hasar süreci rastlantı değişkeni olmak üzere her $n > 0$ için

$$E\left(cn - \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) > 0 \tag{25}$$

şeklindedir [6].

Net-kâr şartının sağlandığı varsayıldığında düzeltme katsayısı R, hata terimlerinin dağılımları yardımıyla

$$E\left[\exp\left(-RX\right)\right] = 1 \tag{26}$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir. Burada $\alpha = 1 - a_1 - ... - a_p$ ve $\beta = 1 + b_1 + ... + b_q$ olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı X_n hata terimlerinin dağılımı,

$$X_n = \frac{\alpha}{\beta} c - Y_n \tag{27}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir; yani $E(X_n)=\frac{\alpha}{\beta}c-E(Y_n)>0$ şeklindedir. Buradan $E[\exp(-RX)]=1$ eşitliği,

$$E\left[\exp\left(-R\left(\frac{\alpha}{\beta}c-Y\right)\right)\right]=1 \tag{28}$$

şeklinde yazılabilir [2].

Burada önemli bir uyarı yapmak yerinde olur: $\{G_n\}$ sürecinde n. yılda elde edilen kazancı gösteren G_n rastlantı değişkeni, her dönem ödenen sabit c primi eksi n. dönemde ödenen hasarları gösteren bağımsız ve aynı dağılımlı Y_n rastlantı değişkeni olduğundan; yani $G_n=c-Y_n$ şeklinde olduğu için X_n hata terimleri $X_n=\lambda c-Y_n$ şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte λ'nın değerinin bulunması gerekmektedir. λ'nın değeri (3) ve (9) eşitlikleri ile verilen modeller yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G_n=\lambda c\left(1+\sum_{k\geq 1}b_k'\right)-Y_n-\sum_{k\geq 1}b_k'Y_{n-k}\ ,$$

$$E(G_n)=\lambda c(\beta/\alpha)-E(Y)(\beta/\alpha),$$

$\alpha=1-a_1-a_2-...-a_p$ ve $\beta=1+b_1+b_2+...+b_q$ şeklindedir. Buradan $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$ olur [2].

(28) eşitliği,

$$E\left[\exp\left(-R\left(\frac{\alpha}{\beta}c-Y\right)\right)\right]=\exp\left(-R\frac{\alpha}{\beta}c\right)E[\exp(RY)]=1$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikten de görülebileceği gibi düzeltme katsayısı R,

$$M_{Y_1}(R)=\exp\left(R\frac{\alpha}{\beta}c\right) \tag{29}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir; yani n**.** yılda elde edilen kazancı gösteren G_n rastlantı değişkenin modellendiği durumda, G_n her dönem ödenen c primi eksi n**.** dönemde ödenen hasarları gösteren bağımsız ve aynı dağılımlı Y_n rastlantı değişkeni olduğundan (yani $G_n=c-Y_n$ şeklinde olduğundan) düzeltme katsayısı, n. dönemde ödenen hasarları gösteren bağımsız ve aynı dağılımlı Y_n rastlantı değişkeninin dağılımına göre elde edilen Y_n rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu yardımıyla elde edilir. Y_n rastlantı değişkenleri bağımsız ve aynı dağılımlı olduğundan her bir Y'nin dağılımıyla elde edilen moment çıkaran fonksiyonu aynıdır.

Y'nin dağılımı $Y\sim N(\mu,\sigma^2)$ şeklinde olduğunda (29) eşitliği,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ry} \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(y-\mu_y)^2/2\sigma_y^2} dy = \exp\left(R \frac{\alpha}{\beta} c \right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı,

$$R = 2\left(c\frac{\alpha}{\beta} - \mu \right) / \sigma^2 \tag{30}$$

şeklinde elde edilir.

Y'in dağılımı $Y \sim \exp(\lambda)$ şeklinde olduğunda (29) eşitliği,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda . y} \lambda e^{yR} = \exp\left(Rc\frac{\alpha}{\beta} \right)$$

biçiminde yazılabilir. Daha basit bir şekilde

$$\exp\left(Rc\frac{\alpha}{\beta} \right) = \frac{\lambda}{\lambda - R} \tag{31}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı elde edilir.

3.3. İflas olasılıkları

Bu bölümde, buraya kadar incelenen modeller için iflas olasılıklarının nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir.

3.3.1. Prim ve hasar süreçlerine ilişkin otoregresif modeller için iflas olasılıkları

Teorem 1: R düzeltme katsayısının olduğu, hasar süreçlerinin (1) eşitliğini ve prim süreçlerinin ise (2) eşitliğini sağladığı varsayılsın. Bu durumda iflas olasılığı için üst sınır (her $x \geq 0$ için),

$$\varphi(x, y_0, x_0) \leq \frac{\exp(-R\hat{u})}{E\left[\exp\left(-Rv^T \hat{U}_T\right) \middle| T < \infty\right]} \tag{32}$$

eşitsizliği yardımıyla elde edilir. Burada,

$$\hat{U}_n = U_n - \frac{av}{1-av} W_n + \frac{b}{1-bv} Z_n ,$$

$$T = \inf\{n : U_n \leq 0\} ,$$

$$\hat{u} = \hat{U}_0$$

şeklindedir. Faiz oranı $r = 0$ şeklinde olduğunda (32) eşitsizliği eşitliğe dönüşür [5].

Eş. (22)'de verilen teoremin ispatı Yang ve Zhang (2003)'de açık şekilde verildiğinden burada verilmeyecektir. Ayrıca primlerin sabit miktarla toplandığı hasar sürecinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda iflas olasılığı için üst sınır (her $x \geq 0$ için),

$$\varphi(x, y_0, x_0) \leq \frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-Rv^T\hat{U}_T)|T < \infty]} \tag{33}$$

şekline dönüşür. Burada,

$$\hat{U}_n = U_n - \frac{av}{1-av}W_n,$$

$$T = \inf\{n : U_n \leq 0\},$$

$$\hat{u} = \hat{U}_0$$

şeklindedir. $r = 0$ olduğunda (33) eşitsizliği eşitliğe dönüşür [5].

Sonuç 1: $0 \leq a < 1$ ve $0 \leq b < 1$ şeklinde olduğunda prim ve hasar süreçlerine ilişkin birinci derece otoregresif modeller geçerli olduğunda iflas olasılıklarının üst sınırlarının elde edilmesinde kullanılan (32) ve (33) eşitlikleri,

$$\varphi(x, y_0, x_0) \leq \exp(-R\hat{u}) \tag{34}$$

şeklindeki eşitsizliği sağlar [1].

3.3.2. Yıllık kazanç modelleri için iflas olasılıkları

Bu bölümde, bir sigorta şirketinin n. yılda topladığı primlerden aynı yılda ödediği hasarların çıkarılmasıyla elde ettiği kazanç modelleri gözden geçirilmiştir.

$T = \inf(n : U_n \leq 0)$ iflas anını (her n için eğer $\mathrm{U_n} > 0$ *ise* $T = \infty$) ve

$\varphi(u; g_0, ..., g_{-p+1}; x_0, ..., x_{-q+1}) = P(T < \infty)$ iflas olasılığını göstersin. Bu durumda kazanç modelleri için iflas olasılıkları aşağıdaki teoremler yardımıyla elde edilir.

Teorem 2: R ($R > 0$) düzeltme katsayısı olmak üzere Eş. (3) ile verilen model için iflas olasılığı,

$$\varphi(u; g_0, ..., g_{-p+1}; x_0, ..., x_{-q+1}) = \frac{v(u; g_0, ..., g_{-p+1}; x_0, ..., x_{-q+1})}{E[v(U_n; G_n, ..., G_{n-p+1})|T < \infty]} \tag{35}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$v(u; g_0, ..., g_{-p+1}; x_0, ..., x_{-q+1}) = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta}R\widetilde{u}\right),$$

$$\alpha = 1 - a_1 - ... - a_p, \quad \beta = 1 + \mathrm{b}_1 + ... + b_q,$$

$$\tilde{u} = u + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{p-1}(a_{k+1} + ... + a_p)g_k + \frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{q-1}(b_{k+1} + ... + b_q)x_{-k}$$

şeklindedir[2, 3]. Teoremin ispatı Gerber (1982)'de açık bir şekilde verilmiştir.

(21) modelinde $(p = q = 1)$ olduğu özel duruma geri dönelim. Bu durumda Eş. (21) ile verilen model

$$G_n = aG_{n-1} + X_n + bX_{n-1}$$

şeklindedir. Bu durumda a ve b parametreleri için koşullar,

$$1 + b > 0,\ |a| < 1 \text{ ve } a + b \neq 0$$

şeklindedir. (2.21) modelinde $(p = q = 1)$ olduğu bu özel durumda v fonksiyonu,

$$v(u, g, x) = \exp\left(-R\left[\frac{1-a}{1+b}u + \frac{a}{1+b}g + \frac{b}{1+b}x\right]\right)$$

şeklinde olur [3].

Teorem 3: R ($R > 0$) düzeltme katsayısını göstermek üzere Eş. (7) ile verilen model için iflas olasılığı,

$$\varphi(u; x_0, ..., x_{-q+1}) = \frac{v(u; x_0, ..., x_{-q+1})}{E[v(U_n; X_n, ..., X_{n-q+1}) | T < \infty]} \tag{36}$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$v(u; x_0, ..., x_{-q+1}) = \exp\left(-\frac{R}{\beta}\tilde{u}\right),$$

$$\beta = 1 + \mathrm{b}_1 + ... + b_q,$$

$$\tilde{u} = u + \sum_{k=0}^{q-1}(b_{k+1} + ... + b_q)x_{-k}$$

şeklindedir[2, 3]. Teoremin ispatı Gerber (1982)'de açık bir şekilde verilmiştir.

4. Bağımlı risk süreçlerinin deneysel olarak incelenmesi

Bu bölümde, bağımlı risk süreçlerinin modellerine uyum gösterecek biçimde yapay veri türetilerek, varlığı önceden kabul edilen etmenlerin bağımlı süreçlerini nasıl etkiledikleri incelenmiştir. Her bir modele ilişkin yapay veri üretme işlemi ve modelin etmenler altındaki davranışları birer örnek olarak ele alınmıştır.

Örneklerde iflas olasılıklarını hesaplamada yaşanan zorluklar nedeniyle iflas olasılıkları yerine iflas olasılıkları için elde edilen üstel üst sınırlar veren Lundberg tipi eşitsizliklerden yararlanılmıştır. Lundberg tipi eşitsizlikler,

$$\varphi(u,w,z) \le \exp(-Ru)$$

eşitsizliği ile elde edilir. İflas olasılıklarının üst sınırının hesaplanmasında kullanılan eşitsizliklerin paydaları birden daha büyük olduğu için Lundberg tipi eşitsizlikler sağlanır. Lundberg tipi eşitsizlikler yardımıyla elde edilen üst sınırlar, iflas olasılıklarının çeşitli durumlarda (bağımlılık arttığında, faiz oranları arttığında v.b) nasıl bir davranış gösterdiğine ilişkin bilgi verdiği için önemlidir.

Örneklerde hasar ve prim miktarlarının stokastik süreç olduğu durumda prim ve hasar süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu durum ile primlerin sabit miktarlarla toplandığı, hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda faiz oranlarının, başlangıç sermayesinin, ilişki katsayılarının, buna bağlı olarak bağımlılığın iflas olasılıklarının üst sınırları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Zaman serileri yaklaşımı ile modellenen bağımlı risklerde primlerin ve hasarların dağılımları genellikle bilinmediği için net-kâr şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimleri açısından yazılır. Bunun sonucunda düzeltme katsayısı R de hata terimlerinin dağılımları yardımıyla elde edilir. Bu nedenle hata terimlerinin dağılımlarının ve hata terimlerinin ortalamasındaki değişimin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi de incelenmiştir.

Örneklerde, Bowers ve diğerleri (1997) ile Yang ve Zhang (2003)'in benzetim çalışmaları sonucunda elde ettikleri modellerden yararlanılmıştır. Bu modeller kullanılırken modellerin sağlanması için gerekli durağanlık koşulları ve net-kâr şartları göz önünde bulundurularak hata terimlerinin dağılımları ve modellere ilişkin parametrelerde değişiklik yapılarak her bir model için ilgili araştırmacının çalışmasında incelemediği durumlar ele alınmıştır. Ayrıca bu modellerde özellikle hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıklarının üst sınırları üzerindeki etkileri incelenmiştir. Bunun sonucunda modellerde faiz oranlarının, başlangıç sermayesinin, primlerin sabit miktarlarla toplandığı modellerde prim miktarlarının, bağımlılığın ve hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkileri incelenmiştir.

4.1. Prim ve hasar süreçleri için örnekler

Bu bölümde, bir sigorta kolundan ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan bir portföydeki prim ve hasar süreçlerinin uyduğu birinci derece otoregresif modellere ilişkin sayısal örnekler ve bir sigorta kolundan ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu duruma ilişkin sayısal örnekler verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla faiz oranlarının, başlangıç sermayesindeki değişimin, primlerin sabit miktarlarla toplandığı modellerde bu oranlardaki değişimin, primlerin ve hasarların stokastik süreç olduğu durumlarda hata terimlerinin ortalamasındaki değişimin ve hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Bu bölümde verilen örneklerde hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu (yani hasar sürecinin (1) eşitliği ile verilen modele, prim sürecinin ise (2) eşitliği ile verilen modele uyduğu) varsayılmıştır.

Örnek 1: Eş. (1) ve Eş. (2) ile verilen modellerdeki parametreler $b = 0{,}5$; $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) ve $a = 0{,}2$ ($1 + a < (1 + bv^2)/v$ olduğundan $a < 0{,}543$) olsun. Ayrıca u: başlangıç sermayesi, w: başlangıç prim miktarı ($w = 0$) ve z: başlangıç hasar miktarı ($z = 0$) olmak üzere,

$\varphi_1(u,w,z)$: $X \sim N(10{,}9)$ ve $Y \sim N(20{,}9)$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_2(u,w,z)$: $X \sim N(5{,}4)$ ve $Y \sim N(20{,}9)$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_3(u,w,z)$: $X \sim N(10{,}9)$ ve $Y \sim N(11{,}9)$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı göstersin.

Bunun sonucunda

$$\mu_1 \frac{Rv}{1-av} - \mu_2 \frac{R}{1-bv} + \sigma_2^2 \left(-\frac{R}{1-bv} \right)^2 /2 + \sigma_1^2 \left(\frac{Rv}{1-av} \right)^2 /2 = 0$$

eşitliği yardımıyla $X \sim N(10,9)$ ve $Y \sim N(20,9)$ olduğunda $R = 1,208$, $X \sim N(5,4)$ ve $Y \sim N(20,9)$ olduğunda $R = 1,735$ ve $X \sim N(10,9)$ ve $Y \sim N(11,9)$ olduğunda $R = 0,426$ olarak elde edilir. Elde edilen düzeltme katsayıları ve başlangıç sermayesi (u) yardımıyla Çizelge 1 ile verilen iflas olasılıkları için üst sınırlar elde edilir.

Çizelge 1. Otoregresif modelde hata terimlerinin ortalamalarının ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$
2	0,0890000	0,031000000	0,427000000
3	0,0270000	0,005490000	0,279000000
9	0,0000190	0,000000165	0,022000000
10	0,0000057	0,000000000	0,014000000

Çizelge 1 incelendiğinde, başlangıç sermayeleri arttıkça üst sınırların azaldığı görülür. Ancak başlangıç sermayelerindeki artış oranları ile iflas olasılıklarındaki azalış oranları aynı büyüklükte değildir. Başlangıç sermayelerindeki küçük bir artış iflas olasılıklarında büyük bir azalışa neden olur. Ayrıca $Y \sim N(20,9)$ iken $X \sim N(10,9)$'dan $X \sim N(5,4)$'e azaltıldığında; yani prim sürecine ait ortalama sabit olduğunda hasar sürecine ait ortalama küçültüldüğünde iflas olasılıklarına ait üst sınırların da azaldığı ve $X \sim N(10,9)$ iken $Y \sim N(20,9)$'den $Y \sim N(11,9)$'e azaltıldığında; yani hasar sürecine ait ortalama sabit olduğunda prim sürecine ait ortalama düşürüldüğünde, iflas olasılıkları için üst sınırların arttığı görülür.

Yukarıda belirtildiği gibi başlangıç sermayeleri arttığında iflas olasılıkları azalır. Başlangıç sermayelerindeki küçük bir artış iflas olasılıklarını oldukça etkilemektedir. Ayrıca prim ve hasar süreçlerine ilişkin modellerdeki hata terimlerinin ortalaması arttığında ya da azaldığında, dolaylı olarak prim ve hasar süreçlerinin ortalaması da artmakta ya da azalmaktadır. Bunun sonucunda hata terimlerinin ortalamasının değişim yönüne bağlı olarak iflas olasılıkları artar yada azalır. Prim süreçlerinin ortalaması arttığında iflas olasılıkları azalırken hasar sürecine ait ortalama arttığında iflas olasılıkları ise artmaktadır.

Örnek 2: (1) ve (2) eşitlikleri ile verilen modellerdeki parametreler $b = 0,5$; ($1 + a < (1 + bv^2)/v$ olduğundan $a < 0,543$), $u = 3$ ve $X \sim \exp(4)$ ve $Y \sim \exp(4)$ olsun. Ayrıca r: faiz oranlarını, w: başlangıç prim miktarını ($w = 0$) ve z : başlangıç hasar miktarını ($z = 0$) göstermek üzere,

$\varphi_1(u, w, z)$: $a = 0,2$ olduğunda iflas olasılıkları için üst sınırı,

$\varphi_2(u, w, z)$: $a = 0,3$ olduğunda iflas olasılıkları için üst sınırı,

$\varphi_3(u, w, z)$: $a = 0,5$ olduğunda iflas olasılıkları için üst sınırı göstersin.

Bunun sonucunda

$$R = \frac{4(1-av)-4v(1-bv)}{v}$$

eşitliği yardımıyla $a = 0{,}2$, $a = 0{,}3$ ve $a = 0{,}5$ olduğunda çeşitli faiz oranları için düzeltme katsayılarının değerleri ve iflas olasılıkları için üst sınırlar Çizelge 2'deki gibi olur:

Çizelge 2. Otoregresif modelde bağımlılığın ve faiz oranlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

r	R_1	$\varphi_1(3{,}0{,}0)$	R_2	$\varphi_2(3{,}0{,}0)$	R_3	$\varphi_3(3{,}0{,}0)$
0	1,20000	0,027	0,80000	0,091	0	1
0,025	1,25124	0,023	0,85124	0,078	0,05124	0,859
0,05	1,30472	0,020	0,90472	0,066	0,10472	0,730
0,08	1,37200	0,016	0,97200	0,054	0,17200	0,597

Çizelge 2 incelendiğinde faiz oranları arttıkça iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların azaldığı; yani iflas olasılıklarının azaldığı görülür. Bununla birlikte Çizelge 2'den de görüleceği gibi düzeltme katsayısı ile iflas olasılıkları arasında ters bir orantı vardır. Ayrıca içinde bulunulan yılda toplanacak primler ile geçmiş yıllarda toplanan primler arasındaki ilişkinin derecesini gösteren b parametresi sabit tutulup eski dönemde gerçekleşen hasarlar ile mevcut hasarlar arasındaki ilişkinin oranını gösteren a parametresi arttırıldığında; yani bağımlılık arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar artmaktadır. Buradan da anlaşıldığı gibi bağımlılığın iflas olasılıkları üzerinde olumsuz bir etkisi vardır; yani bağımlılığın artması iflas olasılıklarını arttırmaktadır.

4.2. Primler sabit olduğunda hasar süreci için örnekler

Bu bölümde Bowers ve diğerleri (1997) tarafından önerilen modele ilişkin sayısal örnekler verilmiştir. Primlerin pozitif sabit c miktarıyla düzenli olarak dönem başında ödendiği, hasar süreçlerinin (2.19) eşitliği ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu, X'in moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu, net-kâr şartının sağlandığı ve $R > 0$ şeklinde aşağıdaki eşitliği sağlayan bir R olduğu varsayılsın. Bu durumda R,

$$E[\exp(-Rc)]E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right] = 1$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

Örnek 3: Primlerin pozitif c sabiti ile dönem başında toplandığı hasar süreçlerinin ise Eş. (2.1) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda $c = 20$, $a = 0{,}5$ ve $X \sim N(10{,}9)$ olsun. Ayrıca z: başlangıç hasar miktarı ($z = 0$) olmak üzere

$\varphi_1(10, w, z)$: $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_2(10, w, z)$: $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_3(10, w, z)$: $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı göstersin.

Bunun sonucunda

$$R = \frac{2(c - [\mu v/(1-av)])}{\sigma^2 (v/(1-av))^2}$$

eşitliği yardımıyla $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda $R = 0{,}0703$, $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda $R = 0{,}1233$ ve $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda $R = 0{,}206$ olur. Böylece Çizelge 3 ile verilen iflas olasılıkları için üst sınırlar elde edilir:

Çizelge 3. Primlerin sabit miktarla toplandığı hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda faiz oranlarının ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$
2	0,869	0,781	0,662
3	0,81	0,691	0,539
9	0,531	0,33	0,157
10	0,495	0,291	0,127

Çizelge 3 incelendiğinde başlangıç sermayeleri arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların azaldığı görülmektedir. Ayrıca faiz oranları arttığında da iflas olasılıkları için üst sınırlar azalmaktadır; yani başlangıç sermayelerinin ya da faiz oranlarının artışı iflas olasılıklarını azaltır.

Örnek 4: Primlerin pozitif c sabiti ile dönem başında toplandığı hasar süreçlerinin ise Eş. (2.1) ile verilen otoregresif modele uyduğu durumda $c = 20$, $a = 0{,}5$ ve $X \sim \exp(0{,}1)$ olsun. Ayrıca z : başlangıç hasar miktarı ($z = 0$) olmak üzere

$\varphi_1(10, w, z)$: $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_2(10, w, z)$: $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_3(10, w, z)$: $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı göstersin.

Bunun sonucunda,

$$\exp(20R) = \frac{\lambda}{\lambda - \dfrac{Rv}{1 - av}}$$

eşitliği yardımıyla $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda $R \cong 0{,}00000$ ve bu durumda $\varphi_1(10{,}0{,}0) \cong 1$; $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda $R \cong 0{,}00000$ ve bu durumda $\varphi_2(10{,}0{,}0) \cong 1$ ve $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda $R \cong 0{,}00000$ ve bu durumda $\varphi_3(10{,}0{,}0) \cong 1$ olur.

Yukarda verilen $\varphi_1(10{,}0{,}0) \cong 1$, $\varphi_2(10{,}0{,}0) \cong 1$ ve $\varphi_3(10{,}0{,}0) \cong 1$ iflas olasılıkları için üst sınırlar ile Örnek 3'te verilen iflas olasılıkları için üst sınırlar incelendiğinde primlerin sabit c miktarları ile toplandığı hasar süreçlerinin ise Eş. (1) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda Eş. (1) ile verilen modeldeki hata terimleri normal dağılıma uyduğu durumda, iflas olasılıklarının hata terimleri aynı ortalama ile üstel dağılıma uyduğu duruma göre çok daha küçük olduğu görülür.

5. Sonuç

Bu çalışmada bir ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan portföyde,

- primlerin sabit miktarlarla toplandığı, hasarların ise birinci derece otoregresif modele uyduğu bağımlı risk modelleri,
- prim ve hasar süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu bağımlı risk modelleri,
- sigortacının kazanç (belli bir dönemde toplanan primler eksi aynı dönemde ödenen hasarlar) modelleri ele alınmıştır.

Bu modeller geçerli olduğunda iflas olasılıklarının üst sınırlarının nasıl hesaplanacağı konusundaki bilgiler verilmiş, prim ve hasar süreçlerine ilişkin dağılımların, dağılım ortalamasındaki değişmelerin, başlangıç sermayelerindeki ve faiz oranlarındaki değişmelerin ve mevcut dönemdeki hasarlarla geçmiş dönemde gerçekleşmiş hasarlar arasındaki bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Araştırmanın sonuçları aşağıdaki gibi özetlenebilir: Prim ve hasar süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda prim süreçlerinin ortalaması sabit iken, hasar süreçlerine ilişkin ortalama büyüdüğünde iflas olasılıkları için üst sınırların arttığı görülmüştür. Tersi durumda, hasar sürecinin ortalaması sabit iken, prim süreçlerinin ortalaması büyüdüğünde iflas olasılıkları için üst sınırların azaldığı görülmüştür. Böylece beklendiği gibi prim süreçlerinin ortalamasındaki artışın, iflas olasılıklarını azalttığı, hasar süreçlerindeki artışın ise iflas olasılıklarını arttırdığı görülmüştür. Ayrıca aynı modellerde başlangıç sermayesi arttığında, iflas olasılıkları azalmakta ve faiz oranı arttıkça iflas olasılıkları azalmaktadır. Bununla birlikte prim süreçlerinin uyduğu süreç modelindeki b katsayısı sabit tutulduğunda, mevcut dönemdeki hasarlar ile geçmiş dönemlerdeki hasarlar arasındaki bağımlılığın derecesini gösteren a katsayısı büyüdüğünde iflas olasılıklarının arttığı gözlenmiştir.

Primlerin sabit c miktarı ile toplandığı, hasar süreçlerinin otoregresif modele uyduğu durumda, başlangıç sermayeleri ya da faiz oranları arttığında iflas olasılığının üst sınırların azaldığı görülmüştür. Ayrıca sürecin normal dağılıma sahip olduğu durumda, iflas olasılıklarının üst sınırlarının, sürecin aynı ortalama ile üstel dağılıma sahip olduğu durumda elde edilen iflas olasılıklarının üst sınırlarından çok daha küçük olduğu görülmüştür. Bu sayısal sonuçlar dağılım türünün iflas olasılıkları üzerinde etkili olduğunu göstermektedir.

Çalışmada elde edilen sonuçlar doğrultusunda, önceki dönemde portföyde bulunan bazı poliçelerin mevcut dönemde de portföyde kalması sonucu, mevcut dönemde oluşan hasarlar ile geçmiş dönemde oluşmuş hasarlar arasında bağımlılık oluşması nedeniyle bağımlı risklerin bulunduğu portföylerde bağımlı risklerin modellenmesinde zaman serisi modellerinin kullanıldığı durumlarda ilişkili sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasında bağımlılığın etkisi göz önünde bulundurulmalıdır. Ayrıca süreç dağılımlarının ve süreç ortalamasının iflas olasılıkları üzerindeki etkilerinin de göz önünde bulundurulması bağımlı risklerden oluşan portföylerdeki riski minimize etmek açısından önemlidir. Bu nedenle bağımlı risklerin bulunduğu portföylerde, risk analizi çalışmalarında bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkisini ve hata terimlerinin dağılımının etkisini göz önünde bulundurmak gerekir.

Kaynaklar

[1] Ambagaspitiya, R.S., 1998, On the distribution of a sum of correlated aggregate claims, Insurance: Mathematics and Economics 23, 15-19.

[2] Ambagaspitiya, R.S., 1999, On the distributions of two classes of correlated aggregate claims, Insurance: Mathematics and Economics 24, 301-308.

[3] Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., 1997, Actuarial Mathematics, Society of Actuaries, Schaumburg, IL.

[4] Christ, R. and Steinebach, J., 1995, Estimating the adjustment coefficient in an ARMA(p,q) risk model, Insurance: Mathematics and Economics 17, 149-161.
[5] Cossette, H., Denuit, M., Marceau, E., 2000, Impact of dependence among multiple claims in a single loss, Insurance: Mathematics and Economics 26, 213-222.
[6] Cossette, H., Marceau, E., 2000, The discrete-time risk model with correlated classes of business, Insurance: Mathematics and Economics 26, 133-149.
[7] Denuit, M., Genest, C., Marceau, E, 1999, Stochastic bounds on sums of dependent risks, Insurance: Mathematics and Economics 25, 85-104.
[8] Dhaene, J., Goovaerts, M.J., 1997, On the dependency of risks in the individual life model, Insurance: Mathematics and Economics 19, 243-253.
[9] Gerber, H.U., 1982, Ruin theory in the linear model, Insurance: Mathematics and Economics 1, 177-184.
[10] Müller, A., Pflug, G., 2001, Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments, Insurance: Mathematics and Economics 28, 381-392.
[11] Promislow, S.D., 1991, The probability of ruin in a process with dependent increments, Insurance: Mathematics and Economics 10, 99-107.
[12] Ribas, C., Marin-Solano, J., Alegre, A, 2003, On the computation of the aggregate claims distribution in the individual life model with bivariate dependencies, Insurance: Mathematics and Economics 32, 201-215.
[13] Wang, S., 1998, Aggregation of correlated risk portfolios: Models and algorithms, In: Proceedings of the Casualty Actuarial Society, pp. 848-939.
[14] Wu, X., Yuen, K.C., 2003, A discrete-time risk model with interaction between classes of business, Insurance: Mathematics and Economics 33, 117-133.
[15] Yang, H., Zhang, L., 2003, Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate, Probability in the engineering and informational sciences 17, 183-198.
[16] Zhang, L., 2005, Ruin probability in linear time series model, Tsinghua Science and Technology 2, 259-264.
[17] Zhang, Z., Yuen, K.C., Li, W.K., 2007, A time-series risk model with constant interest for dependent classes of business, Insurance: Mathematics and Economics