www.istatistikciler.org
İstatistikçiler Dergisi 1 (2008) 164-174

İstatistikçiler Dergisi

Rasgele sayıda bağımlı aktüeryal risklerin beklenen değeri için alt ve üst sınırlar

Fatih Tank

Kırıkkale Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü
71100-Yahşihan,Kırıkkale, Türkiye
fatihtank@gmail.com

Özet

Aktüerya analizinin ve risk yönetiminin ana amaçlarından birisi toplam hasar miktarının dağılım fonksiyonunun belirlenmesidir. Sigortacılıkta risklerin genellikle bağımsız olduğu var sayılmakta ancak bu varsayım gerçek durumu yansıtmamaktadır ve prim hesaplamalarında problemler yaratmaktadır. Sigortacılıkta prim hesaplamalarında beklenen değerin hesaplanması oldukça önemlidir. Bu çalışmada meydana gelen bağımlı risklerin sayısının rasgele olduğu durum için alt ve üst sınırlar incelenmiştir.

Anahtar sözcükler: Bağımlı riskler; Aktüeryal risk; Frechet sınırları.

Abstract

Lower and Upper Bounds for Expected Value of Random Size Dependent Actuarial Risks

One of the main aim of actuarial analysis and risk management is to determine of the distribution function of total claim amount. Generaly risks are assumed independent in insurance but this assumption does not reflect the real situation and generates many problems at premium calculations. Calculation of expected value is crucial on premium calculation in insurance. In this study we investigate lower and upper bounds for expected value of the case where the number of dependent risks is random.

Keywords: Dependent risks; Actuarial risk; Frechet bounds.

1.Giriş

Genellikle bir sigorta portföyündeki çeşitli hesaplamalarda kolaylık sağlaması ve istenmeyen bir çok durumdan kurtulmak amacıyla risklerin bağımsız oldukları varsayılmaktadır. Ancak gerçek yaşamda bu varsayımın gerçeğe uymadığı durumlarla karşılaşılmaktadır. Örneğin bir iş yerindeki iş görenlerin bir grup hayat sigortası veya grup sağlık sigortası ele alındığında; iş yerinde herkesi etkileyecek bir kaza sigortacının portföyü içindeki riskleri kollektif olarak artıracaktır. Bu yüzden bu portföyü oluşturan risklerin bağımsız oldukları varsayımı gerçekle bağdaşmamaktadır [6, 5]. Bu ve benzeri durumlar için bir değerlendirme ve model yaklaşımı ile birlikte gerekli olan analizlerin titizlikle yapılması gerekmektedir.

Literatürde prim hesaplamaları ile ilgili olarak bir çok yaklaşım bulunmaktadır. En basit anlamda bu yaklaşımların içerisinde toplam hasar miktarı dağılımının beklenen değeri portföyde bulunan her bir bireyden alınması gereken saf prim olarak düşünülebilir. Hesaplanan bu değerin üstüne idari ve diğer masrafların yüklenmesi ile sigortalılardan alınması gereken sigorta primi elde edilebilir.

2. Risk süreçleri

Risk süreçleri, hasar sayısı ve hasar miktarları süreçlerinden oluşur. Zaman aralığı, $\left[t_0, t_k\right)$ incelenen toplam zaman aralığı olarak tanımlanır.

Tanım 2.1. $\left\{X_{t_i}\right\}$, $\left[t_{i-1}, t_i\right)$ *i.* zaman aralığında görülen hasar sayısı süreci olarak tanımlanır. Burada X_{t_i} kesikli rasgele değişkendir.

Tanım 2.2. $\left\{Y_{t_i}\right\}$, $\left[t_{i-1}, t_i\right)$ *i.* zaman aralığında görülen hasar miktarı süreci olarak tanımlanır. Burada Y_{t_i} sürekli rasgele değişkendir.

Tanım 2.3. $N_t \equiv N_{t_j} = \sum_{i=0}^{j} X_{t_i}$, $\left[t_0, t_j\right) = \left[t_0, t_1\right) \cup \left[t_1, t_2\right) \cup \ldots \cup \left[t_{j-1}, t_j\right)$ aralıklarının bileşeninde ortaya çıkan toplam hasar sayısıdır. N_t, t anına kadar olan hasarların sayısını gösterdiğinde $\left\{N_t, t \in T\right\}$ stokastik sürecine "*Toplam Hasar Sayısı Süreci*" denir. $\left\{N_t, t \in T\right\}$ stokastik süreci

a) $N_t \geq 0$
b) N_t tamsayılı değerler alır
c) $s < t \Rightarrow N_s < N_t$ (azalmayan)

özelliklerine sahiptir.

$\left\{N_t, t \in T\right\}$ toplam hasar sayısı süreci λ parametreli Poisson Süreci olup,

i. $N_0 = 0$
ii. Durağan ve bağımsız artımlı
iii. $P\left\{N_{t+h} - N_t = 1\right\} = \lambda h + o(h)$, $\forall t \geq 0$
iv. $P\left\{N_{t+h} - N_t > 1\right\} = o(h)$, $\forall t \geq 0$

özelliklerini sağlamaktadır.

Teorem 2.1. $\left\{N_t, t \in T\right\}$ toplam hasar sayısı süreci Tanım 2.3'de belirtilen i, ii, iii, iv özelliklerini sağlasın. t uzunluğundaki herhangi bir zaman aralığında meydana gelen hasarların sayısının dağılımı λt parametreli poisson dağılımıdır [4].

İspat 2.1. $P_n(t) = P\left\{N_t = n\right\}$ olsun. $t+h$ anına kadar hiçbir olayın gerçekleşmemesi olasılığı

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P\left\{N_{t+h} = 0\right\} \\ &= P\left\{N_t = 0, N_{t+h} - N_t = 0\right\} \\ &= P\left\{N_t = 0\right\}.P\left\{N_{t+h} - N_t = 0\right\} \end{aligned}$$

olur. Buradan iii ve iv yardımıyla ,

$$P_0(t+h) = P_0(t)\left[1 - \lambda h + o(h)\right]$$

elde edilir.

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}$$

eşitliğinden,

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t) \tag{2.1}$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde $n\geq 1$ durumu için yukarıdaki işlemler yapıldığında,

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t) \tag{2.2}$$

olarak bulunur.

$$P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t).z^n$$

ile N_t rasgele değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu gösterildiğinde

$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(t).z^n \tag{2.3}$$

olur. Eşitlik (2.1) ve (2.2)'de bulunan ifadeler, Eşitlik (2.3)'de yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(z,t)&=-\lambda\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t).z^n+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}(t).z^n\\&=-\lambda P(z,t)+\lambda zP(z,t)\\&=\lambda(z-1)P(z,t)\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}&\ln P(z,t)=\lambda t(z-1)+c(z)\\&P_0(0)=1,\quad P_n(0)=0, n\geq 0\\&P(z,0)=1 \text{ ve } c(z)=0\end{aligned}$$

olduğundan, olasılık çıkaran fonksiyon

$$P(z,t)=e^{\lambda t(z-1)}$$

biçimini almaktadır. Bu λt parametreli Poisson dağılımın olasılık çıkaran fonksiyonudur.

Tanım 2.4. $S_{t_j}=\sum_i Y_{t_i}$ $[0,t)$ zaman periyodunda ortaya çıkan toplam hasar miktarıdır.

Tüm bu süreçlerde zaman aralığı, $[t_0,t_k)$ incelenen toplam zaman aralığı olarak tanımlanır. Burada $[t_0,t_k)=[t_0,t_1)\cup[t_1,t_2)\cup\ldots\cup[t_{k-1},t_k)$ şeklinde olup $[t_{i-1},t_i)$ aralıkları $(i=1,2,\ldots,k)$ eşit uzunluklu, kesişmeyen ve ara kesiti boş olan aralıklardır.

Sigortacılıkta risk (P_t, S_t) çifti ile belirtilebilir. Burada; P_t "$[0,t)$ zaman aralığında primlerden elde edilen kazanç" olup S_t Tanım 2.4'de belirtildiği gibi "$[0,t)$ zaman aralığında meydana gelen hasar miktarlarının toplamı" dır. Bu iki süreçten en az biri stokastik süreçler kapsamında rasgele fonksiyon olup genel olarak P_t değişimlerden bağımsız ve S_t stokastik olarak düşünülür. Pratikte P_t ile S_t arasındaki ilişkiyi tanımlamak gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki değişkenlerin ve bunlara bağlı olarak stokastik süreçlerin tanıtılmasına ihtiyaç vardır.

3. Bağımlı riskler ve ortak monotonluk

Toplam hasar miktarını oluşturan bağımlı riskler (hasar miktarları) için yapılacak değerlendirme ve önermelerde bağımlılık biçimi önem kazanmaktadır. Bazı bağımlılık çeşitleri aşağıda tanımlanmıştır.

i. $P(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2) \ge P[Y_1 \le y_1] \cdot P[Y_2 \le y_2]$, $\forall y_1, y_2$ ise Y_1 ve Y_2 hasar miktarları pozitif kuadran bağımlıdır denir ve $\mathrm{PQD}(Y_1, Y_2)$ biçiminde gösterilir.

ii. $P[Y_2 \le y_2 | Y_1 \le y_1]$ $\forall y_2$ 'de y_1 'e göre azalan ise Y_2 hasar miktarı Y_1 'e göre sol kuyruk azalandır denir ve $\mathrm{LTD}(Y_2|Y_1)$ biçiminde gösterilir.

iii. $P[Y_2 > y_2 | Y_1 > y_1]$ $\forall y_2$ 'de y_1 'e göre artan ise Y_2 hasar miktarı Y_1 'e göre sağ kuyruk artandır denir ve $\mathrm{RTI}(Y_2|Y_1)$ biçiminde gösterilir [3].

Bağımlı risklerin toplamı için bir dağılım bulmak konusunda yapısal bağımlılığı içselleştiren yaklaşımlar yapılabilmektedir [5]. Toplam hasar miktarı dağılımında beklenen değerler için alt ve üst sınırlar oluşturulması, bu yaklaşımları risk yönetimi bağlamına çekmek bakımından yararlıdır.

Bir sigorta şirketi için olası toplam hasar miktarı S 'yi meydana getiren hasar miktarları arasındaki ilişki ortak monotonluk ve pozitif korelasyon bağlamında ele alınabilir. Bir hasar miktar Y_1 'in (sonlu ortalamalı, gerçel değerli negatif olmayan r.d.) birikimli dağılım fonksiyonu $F_{Y_1}(y_1) = P\{Y_1 \le y_1\}$ $(0 \le y_1)$ ve bunun ters fonksiyonu

$$F_{Y_1}^{-1}(q) = \inf\{y : F_{Y_1}(y_1) \ge q\} \quad (0 \le q \le 1)$$

olsun. Hasar miktarları (Y_1, Y_2) risk çifti için dağılım fonksiyonu,

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = P\{Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2\} \; (0 \le y_1, y_2)$$

olsun.

Ortak monotonluk kavramı ilk olarak Schmeidler (1986) ve Yaari (1987) ve Roell (1987) tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavram risk karar kuramında önemli bir rol oynamıştır. Komotonluk kavramı aşağıdaki teorem ile verilecektir [6].

Teorem 3.1. Y_1 ve Y_2 'nin iki değişkenli dağılım fonksiyonu

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \min\left(F_{Y_1}(y_1), F_{Y_2}(y_2)\right) \quad \forall y_1, y_2 \ge 0$$

biçiminde yazılabiliyorsa Y_1 ve Y_2 ortak monoton'dur [6].

Ortak monotonluk kavramı ile Fréchet alt ve üst sınırları arasında, iki rasgele değişkenin pozitif ilişkili (pozitif korelasyon) içinde olması bağlamında bir bağıntı vardır [6].

Teorem 3.2. Y_1 ve Y_2 risklerinin dağılım fonksiyonu $F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ ile gösterilsin. Bu durumda $F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$,

$$\max\left\{F_{Y_1}(y_1)+F_{Y_2}(y_2)-1,0\right\} \le F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) \le \min\left\{F_{Y_1}(y_1),F_{Y_2}(y_2)\right\}$$

biçiminde alttan ve üsten sınırlandırılabilir.

Marjinalleri yukarıda verildiği gibi $F_{Y_1}(y_1)$ ve $F_{Y_2}(y_2)$ olan tüm iki değişkenli rasgele değişkenlerinin oluşturduğu dağılım sınıfı $R\left(F_{Y_1},F_{Y_2}\right)$'ye ait dağılımlara sahip olan her (Y_1,Y_2) için Teorem 3.2'de verilen sınırlar geçerlidir.

Verilen marjinal dağılımlarla sınıftaki tüm riskler için Fréchet sınırlarına ulaşabilmek amacıyla $U \sim U(0,1)$ biçiminde ele alınarak

$$\left(F_{Y_1}^{-1}(U),F_{Y_2}^{-1}(U)\right) \in R\left(F_{Y_1},F_{Y_2}\right)$$

elde edilir ki bu Fréchet üst sınırını,

$$\left(F_{Y_1}^{-1}(U),F_{Y_2}^{-1}(1-U)\right) \in R\left(F_{Y_1},F_{Y_2}\right)$$

ise Fréchet alt sınırını gösterir.

Y_1 ve Y_2 risklerinin tam pozitif ilişkili (PPC) olması için $Y_2 = a + bY_1$'i sağlayacak şekilde $a > 0$ ve b sayılarının olması gerek ve yeter şarttır. Y_1 ve Y_2'nin PPC özelliği

$$F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \min\left\{F_{Y_1}(y_1),F_{Y_2}(y_2)\right\} \quad \forall y_1,y_2 \ge 0$$

'yi sağlamaktadır. Dolayısıyla ortak monotonluğun PPC'nin bir uzantısı olduğu ve bu açıdan Fréchet üst sınırında . (Y_1,Y_2) riskinin (hasar miktarlarının) tam pozitif korelasyon ilişkisi taşıdığı; dolayısıyla Fréchet üst sınırı dikkate alınarak düzenlenecek risk yönetiminin riske karşı en duyarlı risk yönetimi (riske karşı maksimum tedbir) anlamına geldiği açıktır.

Tanım 3.1. Y_1 ve Y_2 risklerinin dağılım fonksiyonu $F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$ ile gösterilsin. Bu durumda $F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$,

$$\max\left\{F_{Y_1}(y_1)+F_{Y_2}(y_2)-1,0\right\} \le F_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) \le \min\left\{F_{Y_1}(y_1),F_{Y_2}(y_2)\right\}$$

biçiminde alttan ve üstten sınırlandırılabilir [1].

Toplam hasar için sınırlı hasar (stop-loss) primi

$$\pi(S,M) = E\left\{\max(S-M,0)\right\} \quad , \mathrm{M} \ge 0 \tag{3.1}$$

ile ifade edilmektedir.

$n=2$ için $S=Y_1+Y_2$ olduğu durumda (3.1.) eşitliğinde verilen sınırlı hasar primi

$$\pi\left(Y_1+Y_2^*,M\right)\leq\pi\left(Y_1+Y_2,M\right)\leq\pi\left(Y_1+Y_2^{**},M\right) \tag{3.2}$$

biçiminde alttan ve üstten sınırlandırılabilir [1, 6]. Y_2^* ve Y_2^{**} sırasıyla Y_1'e negatif ve pozitif bağımlıdır ve aralarındaki ilişki, F_i Y_i'nin dağılım fonksiyonu iken $Y_2^*=F_2^{-1}\left\{1-F_1\left(Y_1\right)\right\}$, $Y_2^{**}=F_2^{-1}\left\{F_1\left(Y_1\right)\right\}$ ile açıklanmaktadır [2]. Burada

$$F_i^{-1}=\inf\left\{s\in R\ :\ F_i\left(s\right)\geq t\right\}$$

'dir. Beklenen değeri mevcut olan ve azalmayan konveks $\phi\left(t\right)$ fonksiyonu yardımıyla (3.2) eşitsizliği

$$\pi\left\{\phi\left(Y_1+Y_2^*\right)\right\}\leq\pi\left\{\phi\left(Y_1+Y_2\right)\right\}\leq\pi\left\{\phi\left(Y_1+Y_2^{**}\right)\right\} \tag{3.3}$$

biçiminde yazıldığında Y_1 ile Y_2 arasındaki bağımlılığa fonksiyonel bağımlılık denir. Yukarıda yapılan işlemler yardımıyla

$$P\left(S_{\min}\leq s\right)\leq P\left(S\leq s\right)\leq P\left(S_{\max}\leq s\right)\quad s\in R$$

yazılabildiğinden (3.3) eşitsizliğine denk olarak, beklenen değerlerin sınırlı olması koşuluyla

$$E\left\{\phi\left(S_{\max}\right)\right\}\leq E\left\{\phi\left(S\right)\right\}\leq E\left\{\phi\left(S_{\min}\right)\right\}$$

ortaya çıkar [7].

Beklenen toplam hasar miktarı $E\left(S\right)$ için stokastik sınırlar irdelemesi ayrıntılarına geçmeden önce; aşağıda yapılan değerlendirmelerin $F_{\min}\left(s\right)\leq P\left(S\leq s\right)\leq F_{\max}\left(s\right)$ sınırları temelinde yapıldığının ve bunun, ortak monotonluk bağlamında

$$\max\left\{F_{Y_1}\left(y_1\right)+F_{Y_2}\left(y_2\right)-1,0\right\}\leq F_{Y_1,Y_2}\left(y_1,y_2\right)\leq\min\left\{F_{Y_1}\left(y_1\right),F_{Y_2}\left(y_2\right)\right\}$$

sınırları ile eşdeğerlik (eşanlamlılık) içinde olduğunun vurgulanması yerinde olacaktır. Hatırlanmalıdır ki; Fréchet sınırları bağlamında ortak monotonluk, maksimal sınırlı hasar primi $E\left(S\right)$'i ortaya çıkarır.

4. Bağımlı risklerin toplamı için sınırlar

n sayıda Y_i'nin dağılım fonksiyonu F_i ve sol limitler F_i^- $\left(i=1,2,\ldots,n\right)$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{\tilde{S}}=\left\{\underline{y}=\left(y_1,y_2,\ldots,y_n\right)\in R^n : y_1+y_2+\ldots+y_n=s\right\}$$

tanımı altında

$$F_{\min}\left(s\right)=\sup_{\underline{y}\in\tilde{\tilde{S}}}\max\left\{\sum_{i=1}^{n}F_i^-\left(y_i\right)-\left(n-1\right),0\right\}$$

ve

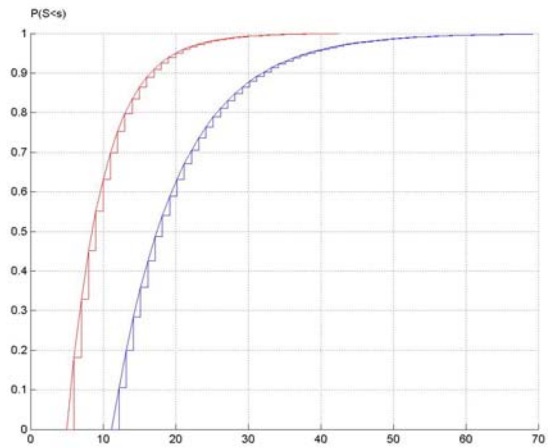
$$F_{\max}(s) = \inf_{\underline{y} \in \tilde{S}} \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} F_i(y_i), 1 \right\}$$

olmaktadır. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları sırasıyla $F_1, F_2, \ldots, F_n$ olsun. $S = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ iken gerekli eşitsizlikler yardımıyla $F_{\min}$ ve $F_{\max}$ için

$$F_{\min}(s) \le P(S \le s) \le F_{\max}(s), \; s \in R$$

yazılacaktır.

Örnek 4.1. Y_i'nin dağılım fonksiyonu $\exp(\theta_i, \omega_i)$ olsun $i = 1,2$. Toplam hasar miktarı $S = Y_1 + Y_2$ olduğunda S için alt sınır, $\omega = \omega_1 + \omega_2 + (\theta_1 + \theta_2)\log(\theta_1 + \theta_2) - \theta_1 \log(\theta_1) - \theta_2 \log(\theta_2)$ iken $F_{\min} = \exp(\theta_1 + \theta_2, \omega)$ ve üst sınır $F_{\max} = \exp(\max(\theta_1, \theta_2), \omega_1 + \omega_2)$ olur. Özel olarak $Y_1 \sim exp(\theta_1 = 4, \omega_1 = 3)$ ve $Y_2 \sim exp(\theta_2 = 5, \omega_2 = 2)$ alınarak $F_S(s)$ için alt ve üst sınırlar bulunmuş ve bulunan sınırlar Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

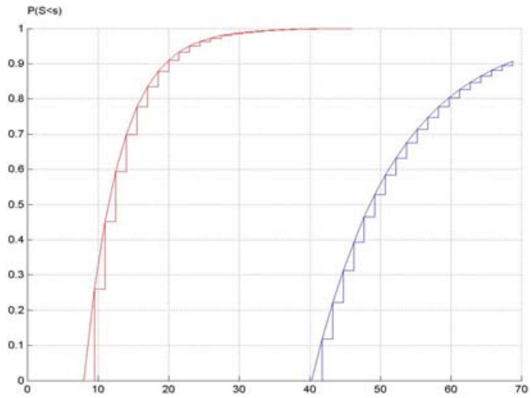


Şekil 4.1 Kaydırılmış üstel dağılıma sahip toplam hasar dağılımı için alt ve üst sınırlar (n=2)

Örnek 4.2. $Y_i \sim \exp(\theta_i, \omega_i)$ $1 \le i \le n$ iken $F_{\min} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i, \omega \right)$,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \right) \log\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \theta_i \log(\theta_i)$$

ve $F_{\max} = \exp\left\{ \max(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n), \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right\}$ biçiminde elde edilir. Özel olarak $Y_1 \sim exp(\theta_1 = 4, \omega_1 = 3)$, $Y_2 \sim exp(\theta_2 = 5, \omega_2 = 2)$ ve $Y_3 \sim exp(\theta_3 = 3, \omega_3 = 3)$ alınarak $F_S(s)$ için alt ve üst sınırlar bulunmuş ve Şekil 4.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Kaydırılmış üstel dağılıma sahip toplam dağılımı için alt ve üst sınırlar (n=3)

5. Rasgele sayıda bağımlı riskin toplamının beklenen değeri için sınırlar

Riskler arasında bağımlılığın olduğu durumlar için toplam hasarın dağılımına ve beklenen değerine alt ve üst sınırlar verilmiş, ancak bağımlı risklerin sayısı sabit alınmıştı. Toplam hasar miktarını oluşturan bağımlı risklerin sayısının rasgele olduğu durum için değerlendirme yapılacaktır. $[0,t)$ zaman aralığında meydana gelen hasar sayısı Poisson dağılımı ile ele alınmaktadır. Toplam hasar sayısı $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ iken toplam hasar miktarı $S_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, ile ifade edildiğinde, toplam hasar miktarı S'in N adet rasgele değişkenin toplamından oluştuğunu göstermektedir. Rasgele sayıda hasar miktarının toplamı için dağılım fonksiyonu, $N = n$ verildiğinde

$$\begin{aligned} P\{S_N < s\} &= \sum_n P\{S_n < s | N = n\} \cdot P\{N = n\} \\ &= \sum_n P\{S_n < s\} \cdot P\{N = n\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

olmaktadır. Fréchet sınırlarından yararlanarak (5.1) için ilgili sınırlar

$$\sum_n F_{\min}(s) \cdot P\{N = n\} \leq \sum_n P(S_n \leq s) \cdot P\{N = n\} \leq \sum_n F_{\max}(s) \cdot P\{N = n\}$$

biçiminde elde edilir.

Rasgele sayıda bağımlı hasar miktarının toplamından elde edilen toplam hasar miktarının beklenen değeri ise, $N = n$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
E(S_N) &= \sum_{i=1}^{N} X_i \\
&= \sum_n E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \middle| N=n\right)\cdot P(N=n) \\
&= \sum_n E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\cdot P(N=n) \\
&= \sum_n \left(\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right)\cdot P(N=n) \\
&= \sum_n E(S_n)\cdot P(N=n)
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

olacaktır. (5.2) eşitliğinden yararlanarak rasgele sayıda bağımlı riskin toplamı için alt ve üst sınırlar gerekli işlemler uygulandıktan sonra

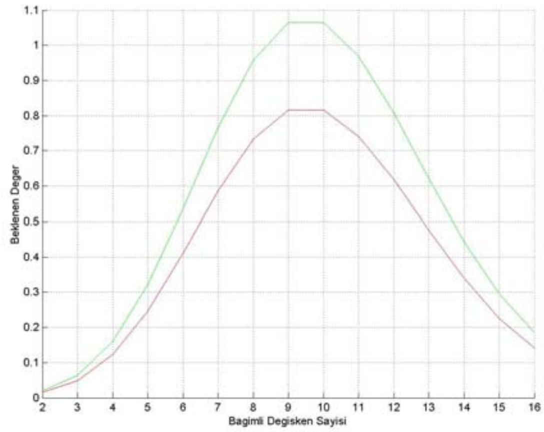
$$E\left(S_{N,\max}\right) < E\left(S_N\right) < E\left(S_{N,\min}\right) \tag{5.3}$$

elde edilir [8].

Örnek 5.1. Örnek 5.2'de verilen Üstel dağılıma sahip üç bağımlı hasar miktarı toplamının beklenen değer işlemleri yapıldığında $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ olduğu durumda alt ve üst sınırlar $(15.9286, 58.6560)$ olarak elde edilmiştir. Bu aralık, sigorta şirketinin gelen riskleri karşılayabilmesi için alması gereken primin alt ve üst sınırı olarak yorumlanmaktadır. Rasgele $n \geq 2$ sayıda bağımlı ve üstel dağılıma sahip hasar miktarları toplamının beklenen değeri için Eşitlik (5.2)'den yararlanarak, $N \sim Poisson(\lambda = 10)$ altında, beklenen toplam hasar değerlerine ait alt ve üst sınırlar bulunmuş ve Çizelge 1'de gösterilmiştir. Çizelge 1'in grafiksel gösterimi Şekil 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Rasgele sayıda ve üstel dağılıma sahip hasarların toplamı için beklenen değerler

$N=n$	Alt Sınır	Üst Sınır
2	0.0148	0.0193
3	0.0493	0.0644
4	0.1233	0.1611
5	0.2466	0.3221
6	0.4109	0.5369
7	0.5871	0.7670
8	0.7338	0.9587
9	0.8154	1.0652
10	0.8154	1.0652
11	0.7412	0.9684
12	0.6177	0.8070
13	0.4752	0.6208
14	0.3394	0.4434
15	0.2263	0.2956
16	0.1414	0.1847



Şekil 5.1. Çizelge 5.1.'in grafiksel gösterimi

$E\left(S_{N,\min}\right)$ hesaplamasında, Frechet üst sınırı dağılımına sahip Y_i 'ler ele alınmış ve

$$
\begin{aligned}
E\left(S_{N,\min}\right) &= \sum_{i=1}^{N} Y_i \\
&= \sum_{n} E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i \middle| N=n\right)\cdot P\left(N=n\right) \\
&= \sum_{n} E\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)\cdot P\left(N=n\right) \\
&= \sum_{n}\left(\sum_{i=1}^{n} E\left(Y_i\right)\right)\cdot P\left(N=n\right) \\
&= \sum_{n} E\left(S_n\right)\cdot P\left(N=n\right)/\left(1-P\left(N=0\right)-P\left(N=1\right)\right)
\end{aligned} \tag{5.4}
$$

eşitliği kullanılmıştır. $E\left(S_{N,\max}\right)$ değeri benzer şekilde bulunur.

6. Sonuç

Bağımlı aktüeryal riskler için bulunan alt ve üst sınırlar aktüeryal risk yönetiminde toplam hasar miktarı dağılımının beklenen değerinden faydalanarak, riskin büyüklüğü hakkında fikir sahibi olabilmeye imkan tanımaktadır. Elde edilen bu fikir yardımıyla, risk rezervi, muafiyet sınırları ve reasürans retenşın saklama payı (retention) sınırları belirlemeleri yapılarak iflas olasılığı minimize edilebilmesine imkan tanır ve gerekli tüm kararlar karar vericiler tarafından irdelenebilir.

Kaynaklar

[1] Albers, W., 1999, Stop-loss Premiums Under Dependence, *Insurance Mathematics and Economics*, 24, 173-185.

[2] Balakrishnan, N., Basu, A. P., 1995, *The Exponential Distribution*, Theory, Methods and Applications, Gordon and Beach Publishers.

[3] Barlow, R.E., Proschan, F., 1975, *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt-Rinehart & Winston Inc.

[4] Beard, R.E., Pentikainen, T., Pesonen, E., 1984, *Risk Theory*, Chapman-Hall.

[5] Cosette, H., Gaillardetz, P., Marceau, E., Rioux, J., 2002, On Two Dependent Individual Risk Models, *Insurance Mathematics and Economics*, 30, 153-156.
[6] Dhaene, J., Denuit M., 1999, The Safest Dependence Structure Among Risk, *Insurance Mathematics and Economics*, 25, 11-21.
[7] Hu, T., Wu, Z., 1999, On Dependence of Risks and Stop-loss Premiums, *Insurance Mathematics and Economics*, 24, 323-332.
[8] Tank, F., 2002, *Sigortacılıkta Bağımlı Riskler: İki Değişkenli Durum İçin Yaklaşımlar*, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı Doktora Tezi (83 s.)