



Matematiksel kanıt kuramı'nda uzlaşma üretici yöntemler için bir çerçeve

Murat Büyükyazıcı

*Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800 Beytepe, Ankara
muratby@hacettepe.edu.tr*

Meral Sucu

*Hacettepe Üniversitesi
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800 Beytepe, Ankara
msucu@hacettepe.edu.tr*

Özet

Matematiksel kanıt kuramı'nda, ayrı kanıt kaynaklarından elde edilen kanaat fonksiyonlarının birleştirilmesi için önerilen ilk kural Dempster birleştirme kuralıdır. Bu kural, koşullandırma biçiminde bir birleştirme gerçekleştirmektedir. Literatürde uzlaşma üretici birleştirme yöntemleri de bulunmaktadır. Fakat bu yöntemler, uzlaşma üretici bir yöntemden beklenen eşkuvvetlilik özelliğini sağlamamakta ve birleşen kanaatlerin uyum içinde mi yoksa çelişki içinde mi olduklarını gösteren bir çelişki miktarı da üretmemektedirler. Bu çalışmada, değişim ve eşkuvvetlilik özelliklerine sahip ve anlamlı bir çelişki miktarı üreten uzlaşma üretici bir yöntem için çerçeve sunulmaktadır.

Anahtar sözcükler: Matematiksel kanıt kuramı; Dempster-Shafer kuramı; Kanaat fonksiyonu; Veri birleştirme; Dempster birleştirme kuralı; Uzlaşma üretici.

Abstract

A framework for consensus generating methods in mathematical theory of evidence

Dempster's rule of combination is the first rule defined for fusion of belief functions obtained from distinct bodies of evidence within the framework of mathematical theory of evidence. This rule makes combination in the form of conditioning. In literatur, there are also some combination methods as a consensus generator. However, these methods does not satisfy the idempotent law which is expected from a consensus generating method, also they does not produce a measure of conflict which shows whether the original beliefs were in harmony or in conflict. In this study, we provide a framework for a consensus generating method which satisfy both the idempotent law and the commutative law and produce a reasonable measure of conflict.

Keywords: Mathematical theory of evidence; Dempster-Shafer theory; Belief function; Data fusion; Dempster's rule of combination; Consensus generator.

1. Giriş

Sistem çözümlenmesinde, belirsizlik ve karmaşadan kurtulmak için bazı genellemeler yapılması ve varsayımlarda bulunulması gerekir. Belirsizlik, mevcut bilginin muğlaklığından, rasgeleliğinden ya da eksikliğinden kaynaklanabilir. Böyle sistemlerin modellenmesinde ve bu modellerden muhakeme ederek sonuç çıkarmada, çeşitli yaklaşımlar kullanılmaktadır. Bu yaklaşımlardan “bulanık küme kuramı” ve Dempster-Shafer kanıt kuramı olarak da adlandırılan “matematiksel kanıt kuramı (mathematical theory of evidence)” en son geliştirilen ve güçlü olan iki kuramdır [21]. Matematiksel kanıt kuramı'nın (MKK) çıkış noktası Dempster'in olasılığın alt ve üst sınırları ile ilgili çalışmasıdır [6]. MKK belirsizlikle ilgili diğer yöntemlere göre daha hızlı bir kuramsal gelişme göstermektedir. MKK özellikle yapay zeka, uzman sistem çalışmaları ve karar verme yöntemlerinde, belirsizlik altında bir modelleme tekniği olarak kullanılmaktadır. Ayrıca son yıllarda MKK'na dayanan pek çok uygulama örneği vardır [27].

MKK iki ana evreden oluşmaktadır: Birinci evrede öznel olasılıklardan temel olasılık atama fonksiyonu (basic probability assignment function), ya da bire bir ilişkili olan kanaat fonksiyonu (belief function), elde edilir, ikinci evrede eğer bu temel olasılık atama (toa) fonksiyonları ayrı (distinct) kanıt kaynaklarından elde edilmiş ise, bunlar Dempster birleştirme kuralı (DBK) ile birleştirilir [28]. L. A. Zadeh, özellikle de yüksek çelişki olması durumunda, DBK'nın sezgilerle çelişen sonuçlar verdiğini göstermek için bir örnek [35, 36] ortaya koyduktan sonra MKK'nın hızlı yükselişi aniden yavaşlamıştır [13]. DBK'nın sezgilerle çelişen sonuçlar verdiğini göstermek için literatürde verilmiş başka örnekler de bulunmaktadır [17, 22, 25, 30, 32]. Diğer taraftan R. Haenni, DBK'nın sezgilerle çelişen sonuçlar verdiğini kabul etmemekte ve problemin yanlış anlama ve yanlış uygulamalardan kaynaklandığını belirtmektedir [12, 13]. Yine de, DBK'na alternatif olarak önerilmiş çok sayıda birleştirme yöntemi bulunmaktadır [2, 5, 10, 18, 22, 25, 33].

DBK'nın en önemli sınırlaması, birleştirilecek olan kanaat fonksiyonlarının ayrı kanıt kaynaklarından elde edilmiş olduğu varsayımından kaynaklanmaktadır. Birleştirme yöntemlerinde dikkat edilmesi gereken bir diğer varsayım ise kaynakların güvenilirliğine ilişkin olandır. Ayrıca, genellikle karıştırılıyor olsa da, kanıt kaynaklarının ayrı olmasına ilişkin varsayımdan farklı olarak bilgi kaynaklarının bağımsızlığına ilişkin varsayımlarda da bulunmaktadır. DBK'na alternatif yukarıda belirtilen yöntemlerin dışında, bu varsayımlarda yapılan değişiklikler doğrultusunda önerilmiş alternatif birleştirme yöntemleri de bulunmaktadır. R. Haenni ve S. Hartmann bilgi kaynaklarının bağımsız ve kısmen güvenilir olması varsayımları altında olasılıksal muhakeme kuramı'nı (theory of probabilistic argumentation [15]) kullanarak bir yaklaşım geliştirmişlerdir [14]. M.E.G.V. Cattaneo yeni bir birleştirme yöntemi önermemekle birlikte, bilgi kaynaklarının bağımsızlığına ilişkin kesin bir varsayımda bulunulamaması durumunda, DBK'nın basit genelleştirmeleri arasında çelişkiyi en küçük yapacak olanın seçilmesi biçiminde bir yaklaşımda bulunmaktadır [3]. P.A. Monney ve M. Chan bilgi kaynaklarının bağımsız olmadığı durumlarda ipucu kuramı'na (theory of hint [20]) dayanan bir birleştirme yöntemi önermişlerdir [24]. T. Dencoux kanıt kaynaklarının ayrı olmaması durumunda; değişim, birleşim ve eşkuvvetlilik özelliklerine sahip, taşınabilir kanaat modeli'ne (transferable belief model [31]) dayalı, kanıt kaynaklarının güvenilirliklerine ilişkin farklı varsayımları da dikkate alarak iki birleştirme kuralı önermiştir [7]. K. Yamada, uzlaştırarak birleştirme (combination by compromise) adlı *uzlaşma üretici* (consensus generator) bir yöntem önermiştir [34]. Bu yöntem, bilgi kaynaklarının ortaya çıkma açısından bağımsız fakat, içerik olarak birbirleri ile çakışabilecek oldukları ve mutlak güvenilir olmadıkları varsayımlarına dayanmaktadır.

Buraya kadar söz edilen DBK'na alternatif yöntemlerin hepsi kanaat birleştirme amacı ile önerilmişlerdir. Bilgi kaynaklarının bağımsızlığı, güvenilirliği ya da kanıt kaynaklarının ayrılığı varsayımlarındaki değişikliklere bağlı olarak birleştirmenin anlamı değişmektedir. Genel olarak kullanılan birleştirme kelimesi aslında; koşullandırma (conditioning), düzeltme (revisioning), güncelleme (updating), uzlaşma üretme (consensus generating) v.s. anlamlarına gelebilmektedir [30, 34]. Literatürde DBK'nın sezgilerle çelişen sonuçlar ürettiğine dair yer alan örneklerin ortaya çıkardığı karmaşanın nedeni, birleştirmenin bu farklı anlamlarının karıştırılmasıdır. Aslında; koşullandırma amaçlı bir birleştirme yöntemi olan DBK'nın, uzlaşma üretici bir yöntemden beklenen sonuçları vermediğini gözlemleyerek, sezgilerle çelişen sonuçlar ürettiği yargısına varılmaktadır.

Bu çalışmada, MKK çerçevesinde bağımsız ve eşit güvenilirlikli bilgi kaynaklarından elde edilen kanaat fonksiyonlarının uzlaşma üretmek amacıyla birleştirilmesini sağlayacak birleştirme yöntemleri için bir genel çerçeve ortaya konulacaktır. İkinci bölümde MKK'na ait genel bilgiler, üçüncü bölümde ise değişim ve eşkuvvetlilik özelliklerine sahip ve anlamlı bir çelişki miktarı üreten uzlaşma üretici bir yöntem için genel bir çerçeve sunulacaktır. Çalışmanın sonucu dördüncü bölümde yer almaktadır.

2. Matematiksel kanıt kuramı

MKK'nda bilgi, toa fonksiyonu ya da kanaat fonksiyonu ile gösterilir. Bu iki fonksiyon bire bir fonksiyonlardır. Klasik olasılık kuramı'nda *durum uzayı* olarak adlandırılan küme, MKK'nda *algi*

çerçevesi (frame of discernment) olarak adlandırılmaktadır. Algı çerçevesi Θ ve Θ 'nin tüm alt kümeleri 2^Θ ile gösterildiğinde,

$$(1) \quad m(\emptyset) = 0$$

$$(2) \quad \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1.$$

koşullarını sağlayan $m: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ biçimindeki bir fonksiyon *temel olasılık atama fonksiyonu* olarak adlandırılır [29].

Toa değeri $m(A)$, bir kişinin tam olarak A kümesine bağlanan kanaatinin bir ölçüsü olarak da tanımlanabilir. Θ algı çerçevesindeki $m(A) > 0$ olan herhangi bir A alt kümesi, toa fonksiyonunun bir *odak elemanı* (focal element) olarak adlandırılır. Odak elemanların tümü ε ile gösterilirse, $E(\varepsilon, m)$ gösterimi de *kanıt kaynağı* (body of evidence) olarak adlandırılır [26]. Kanaat fonksiyonunun herhangi bir A odak elemanı için aldığı değer ise, *kanaat derecesi* (degree of belief) olarak adlandırılmaktadır [29].

A kümesinin kendisine ve bütün alt kümelerine birlikte bağlanan kanaat; A kümesinin kendisine ve bütün B düzgün alt kümelerine ait toa değerlerinin eklenmesi ile,

$$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad (1)$$

biçiminde bulunur [29].

$m: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ toa fonksiyonuna bağlı olarak verilen Eş. (1)'deki $Bel: 2^\Theta \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu, Θ algı çerçevesinde tanımlı bir *kanaat fonksiyonu* olarak tanımlanır [29]. Bir başka deyişle $Bel(A)$, gerçek değerlerin A kümesinde olduğunu gösteren mevcut bütün delillerin toplamıdır [9]. Bir kanaat fonksiyonu, eğer bütün odak elemanları algı çerçevesinin yalnızca birer elemanından oluşuyorsa *Bayesci kanaat fonksiyonu* olarak adlandırılır [29].

Bir kanaat fonksiyonuna ait odak elemanların her biri Θ algı çerçevesindeki elemanlardan sadece birini içeriyorsa toa fonksiyonu, durum uzayı Θ olarak bilinen klasik olasılık yoğunluk fonksiyonu olacaktır. O halde toa fonksiyonlarının, olasılık fonksiyonunun genelleştirilmiş biçimi olduğu söylenebilir [23].

Toa fonksiyonu tanımından da görülebileceği gibi, muğlak ve eksik bilgi modele yansıtılabilmektedir. Olasılık atamaları algı çerçevesinin her bir elemanına tek tek değil, algı çerçevesinin değişik alt kümelerine de yapılabilmektedir. Ayrıca kuram, toa fonksiyonu üzerinden tanımlanmış, kanaat fonksiyonu ve muhtemellik fonksiyonu (plausibility function) gibi fonksiyonlar yardımıyla belirsizliğin gösterilmesinde kullanılmaktadır [16].

Aynı algı çerçevesinde tanımlı, ayrı kanıt kaynaklarından gelen kanaat fonksiyonları olduğunda, DBK ile bu fonksiyonların dik toplamları hesaplanabilir. Böylece birden fazla kanıtın birleştirilmesi ile yeni bir kanaat fonksiyonu elde edilir.

Aynı Θ algı çerçevesinde tanımlı, $E_1(\varepsilon_1, m_1)$ kanıt kaynağından gelen Bel_1 kanaat fonksiyonunun odak elemanları $\varepsilon_1 = \{A_1, \dots, A_k\}$ ve toa fonksiyonu m_1 biçiminde tanımlansın. $E_2(\varepsilon_2, m_2)$ kanıt kaynağından gelen, Bel_2 kanaat fonksiyonunun odak elemanları $\varepsilon_2 = \{B_1, \dots, B_l\}$ ve toa fonksiyonu m_2 biçiminde verilmiş olsun. m_1 ve m_2 toa fonksiyonlarının A_i ve B_j odak elemanlarının birleşik etkisini göstermek üzere *çarpılmış toa değerleri*,

$$m_{12}(X) = m_1(A_i)m_2(B_j), \quad A_i \cap B_j = X \quad (2)$$

biçiminde yazılabilir. $A_i \cap B_j = \emptyset$ olan bütün çarpılmış toa değerlerinin toplamı,

$$\kappa = \sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j = \emptyset}} m_1(A_i)m_2(B_j) \quad (3)$$

eşitliği yardımıyla elde edilir ve *çelişki miktarı* olarak adlandırılır. Bu durumda DBK, D alt indisıyla,

$$m_D(X) = \begin{cases} 0, & X = \emptyset \text{ ve } X \subset \Theta \\ \frac{\sum_{\substack{i,j \\ A_i \cap B_j = X}} m_1(A_i)m_2(B_j)}{1 - \kappa}, & X \neq \emptyset \text{ ve } X \subset \Theta \end{cases} \quad (4)$$

eşitliği ile verilebilir.

3. Uzlaşma üretici birleştirme yöntemleri

Bilginin toplanması ve birleştirilmesi, bilgiye dayalı sistemlerde önemli bir işlemdir. Resim algılamadan karar vermeye, desen tanımadan öğrenen makinelere kadar pek çok alanda, farklı kaynaklardan gelen bilgi birleştirilmektedir. Birleştirme ihtiyacı, aynı durumla ilgili farklı kaynaklardan gelen bilginin eşanlı olarak kullanılmasıyla bir sonuç çıkartılması ya da karar verilmesinden kaynaklanmaktadır [8]. Bir grup uzmanın ya da bilgi kaynağının sağlayacağı bilgi, bir tek uzmanın ya da bilgi kaynağının sağlayacağı bilgiden daha geçerli olabilir. Her ne kadar bazen karar vericiye her bir uzmanın fikirlerini ayrı ayrı sunmak kabul edilebilir olsa da, genellikle uzmanların fikirlerinin bir ortalamasını sunmak akıllıcadır [4]. Çoğu zaman karar vermede, girdi olarak tek bir kanaat fonksiyonu gerekir. Durum böyle olmasa bile, eldeki tüm kanaat fonksiyonlarının bir özeti olarak birleştirilmiş kanaat fonksiyonu üretmek daha çok bilgi verici ve etkili olabilir. Dolayısıyla, MKK çerçevesinde bir uzlaşma üretici yöntemine ihtiyaç olduğu söylenebilir. Bu durumda, uzlaşma üretici bir yöntemin eşkuvvetlilik ve değişim özelliklerini sağlaması beklenir. Ancak, basit aritmetik ortalama işleminde de olduğu gibi, birleşim özelliği vazgeçilebilir bir özelliktir. Ayrıca uzlaşma üretici bir yöntemin, birleşen kanaatlerin bir uyum içinde ya da çelişki içinde olduklarını gösteren bir çelişki miktarı da üretebiliyor olması gerekir.

K. Yamada'nın önerdiği uzlaştıran birleştirme [34] adlı uzlaşma üretici yöntem, değişim özelliğini sağlamakta fakat eşkuvvetlilik özelliğini sağlamamaktadır. Uzlaşma üretici bir diğer yöntem olan ağırlıklı ortalama işlemi (weighted average operator [19]) de eşkuvvetlilik özelliğini sağlamamaktadır. Dahası, bu iki yöntem de herhengi bir çelişki miktarı üretmemektedir. Bu durumda, uzlaşma üretici yeni bir yöntemine ihtiyaç olduğu açıktır. Bu bölümde, değişim ve eşkuvvetlilik özelliklerine sahip ve anlamlı bir çelişki miktarı üreten uzlaşma üretici bir yöntem için genel bir çerçeve sunmak üzere, ilk kez [1]'de ortaya konulan; sıklığa bağlı birleştirilmiş odak elemanı, eşleştirilmiş ikili birleştirmeler ve toa değerlerinin özetlenmesi konuları anlatılacaktır.

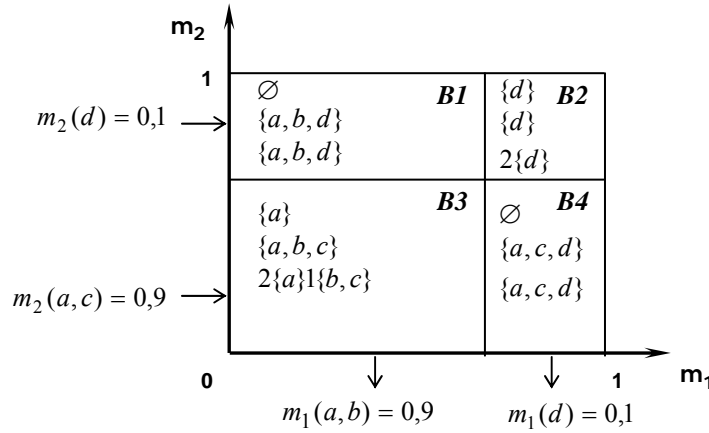
3.1. Sıklığa bağlı birleştirilmiş odak elemanı

İki kanaat fonksiyonunun birleştirilmesinde genellikle, kanaat fonksiyonlarının tüm odak elemanlarının karşılıklı olarak ikili birleştirme işlemleri yapılmaktadır. İkili birleştirme işlemi sırasında elde edilen odak elemanlarının kesişim kümesine ya da birleşim kümesine *birleştirilmiş odak elemanı* adı verilir. Bunlardan birincisine kesişime dayalı, ikincisine birleşime dayalı yöntemler adı verilmektedir. Uzlaşma üretici birleştirme yöntemleri için birleştirilmiş odak elemanı, iki odak elemanın bir *nitel özetlemesi* olarak düşünülmelidir. Sadece kesişim kümesini ya da doğrudan birleşim kümesini kullanmanın uygun bir nitel özetleme olmayacağı Örnek 1 ile anlatılacaktır.

Örnek 1. Algı çerçevesi $\Theta = \{a, b, c, d\}$ olan iki kanaat fonksiyonu, $m_1(a, b) = 0,9$, $m_1(d) = 0,1$ ve $m_2(a, c) = 0,9$, $m_2(d) = 0,1$ biçiminde verilmiş olsun. Birinci kanaat fonksiyonunda $\{a, b\}$ ve $\{d\}$ olmak üzere iki, ikinci kanaat fonksiyonunda $\{a, c\}$ ve $\{d\}$ olmak üzere iki odak elemanı vardır. Dolayısıyla, $2 \times 2 = 4$ adet ikili birleştirme işlemi yapılacaktır. İkili birleştirme işlemi, \otimes sembolü ile gösterilecek olursa, bu örnekte yapılacak dört adet ikili birleştirme,

$$\begin{aligned} \text{Birinci ikili birleştirme} & : m_1(a, b) \otimes m_2(d) \\ \text{İkinci ikili birleştirme} & : m_1(d) \otimes m_2(d) \\ \text{Üçüncü ikili birleştirme} & : m_1(a, b) \otimes m_2(a, c) \\ \text{Dördüncü ikili birleştirme} & : m_1(d) \otimes m_2(a, c) \end{aligned}$$

biçiminde verilebilir. Şekil 1’de, birinci birleştirme *B1* bölgesine, ikinci birleştirme *B2* bölgesine, üçüncü birleştirme *B3* bölgesine ve dördüncü birleştirme *B4* bölgesine karşılık gelmektedir.



Şekil 1. Birleştirilmiş odak elemanları.

Şekil 1’de, her bölgede üç ayrı satırda sırasıyla birleştirilen odak elemanların kesişim kümesi, birleşim kümesi ve yeni bir nitel özetleme aracı olarak bu çalışmada önerilen *sıklığa bağlı birleşim* kümesi verilmektedir.

Eğer kesişim bir boş küme değilse, odak elemanların toa değerlerinin çarpımı kesişim kümesinin elemanlarına bağlanmaktadır. Fakat bu durumda, odak elemanların ortak olmayan elemanları göz ardı edilmektedir. Şekil 1’de *B1* ve *B4* bölgelerin birinci satırlarında odak elemanların kesişimlerinin \emptyset (boş küme) olduğu görülmektedir. Bu durumda birinci toa fonksiyonunda *a* ve *b*’ye bağlanan ve ikinci toa fonksiyonunda *d*’ye bağlanan toa değerleri dikkate alınmamaktadır.

Birleşime dayalı yöntemlerde ise, birleştirilen odak elemanların toa değerlerinin çarpımı, bu odak elemanlarının birleşim kümesine bağlanmaktadır. Şekil 1’de *B3* bölgenin ikinci satırında odak elemanların birleşim kümesinin $\{a, b, c\}$ olduğu görülmektedir. Bu durumda da, her iki odak elemanında yer alan *a* elemanı ile kümelerin birinde olduğu halde birleşim kümesine dahil olan *b* ve *c* elemanları aynı önemlilikte kabul edilmektedirler. Bu durumda da veri kaybı söz konusudur.

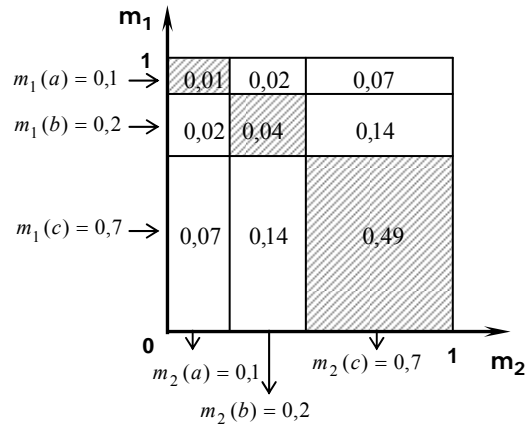
Bu çalışmada önerilen sıklığa bağlı birleşim işleminde, Şekil 1’in *B3* bölgesinin üçüncü satırında görüldüğü gibi, iki odak elemanının birleştirilmesinden elde edilen birleştirilmiş odak elemanda veri kaybı olmamaktadır. Her iki odak elemanında yer alan *a* elemanı 2 sıklık katsayısı ile, kümelerin birinde olduğu halde birleşim kümesine dahil olan *b* ve *c* elemanları 1 sıklık katsayısı ile farklı önemlilikte kabul edilmektedirler. Ayrıca, odak elemanlarının ait oldukları toa değerlerinin büyüklüklerini de dikkate alarak bu katsayılar daha da makul bir biçimde elde edilebilir.

3.2. Eşleştirilmiş ikili birleştirmeler

Uzlaşma üretici bir yöntemin sağlaması gereken eşkuvvetlilik özelliği gereği, eğer birleştirilecek olan iki kanaat fonksiyonu aynı ise birleşim sonucunun da aynı olması gerekir. DBK ile, bire bir aynı olan iki Bayesci kanaat fonksiyonunun birleştirilmesi örneğinden yararlanarak, uzlaşma üretici bir yöntemin eşleştirilmiş ikili birleştirmeler yapması gerekliliği açıklanacaktır.

Örnek 2. Algı çerçevesi, $\Theta = \{a, b, c\}$ biçiminde verilsin. Aynı iki kanıt kaynağından gelen ve verilen algı çerçevesinde tanımlı iki Bayesci toa fonksiyonu; $m_1(a) = 0,1$, $m_1(b) = 0,2$, $m_1(c) = 0,7$ ve $m_2(a) = 0,1$, $m_2(b) = 0,2$, $m_2(c) = 0,7$ biçiminde olsun.

Şekil 2’de, iki kanıt kaynağından gelen aynı Bayesci kanaat fonksiyonunun DBK ile birleştirilmesinin grafik gösterimi verilmektedir.



Şekil 2. İki Bayesci kanaat fonksiyonunun DBK ile birleştirmesinin grafik gösterimi.

Eş. (3)’den çelişki miktarı,

$$\kappa = 0,02 + 0,07 + 0,02 + 0,14 + 0,07 + 0,14 = 0,46 \quad (5)$$

olarak hesaplanır. Eş. (4)’de verilen DBK ile,

$$m_D(a) = 1,8518 * 0,01 \cong 0,0185$$

$$m_D(b) = 1,8518 * 0,04 \cong 0,0741$$

$$m_D(c) = 1,8518 * 0,49 \cong 0,9074$$

birleştirme sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi aynı olan iki kanaat fonksiyonunun birleştirilmesinden elde edilen sonuç farklı çıkmıştır. Hiçbir neden yokken birleştirme sonucu elde edilen toa’larında a ve b ’nin toa değerleri düşmüş, c ’nin toa değeri yükselmiştir. Yani bu birleştirme işlemi eşkuvvetlilik özelliğini sağlamamaktadır. Ayrıca iki kanaat fonksiyonu arasında hiçbir farklılık ya da çelişki olmadığı halde, $0,46$ değerinde bir çelişki miktarı hesaplanmıştır. Uzlaşma üretici bir yöntemden elde edilecek böyle bir sonuç kabul edilemez.

Örnek 2’de, iki kanıt kaynağından gelen bilgi tümüyle aynı oldukları halde, DBK’nda bir κ çelişki miktarı ortaya çıkmaktadır. Bu çelişki miktarı nereden kaynaklanmaktadır? Şekil 2’de DBK’nda taralı bölgeler çelişki olmayan bölgeler, beyaz bölgeler ise çelişki olan bölgeler olarak belirtilmiştir. Bu bölgelerin alan büyüklükleri de bölge içinde yazılıdır. Bu örnekte çelişki miktarı Eş. (5)’den de görüldüğü gibi altı terimden oluşmaktadır. Bu altı terim, şekilde görülen altı beyaz bölgenin alanlarıdır. Bu alanların

toplamı çelişki miktarını vermektedir. Bu bölgeler aslında bir çelişkiye ait değerlerdir. Şekil 2'den görüldüğü gibi kanıt kaynaklarından birindeki bir önerme, diğer kanıt kaynağındaki önermelerden yalnızca biri ile birleştirilmelidir. Yani birinci kanıt kaynağından gelen m_1 toa fonksiyonundaki birinci önerme $m_1(a)$, ikinci kanıt kaynağından gelen m_2 toa fonksiyonundaki kendisine nitelik (odak elemanı) ve nicelik (toa değeri) açılarından en yakın olan birinci önerme $m_2(a)$ ile eşleştirilip birleştirilmelidir. Bunun dışında $m_1(a)$ ve $m_2(a)$ önermeleri başka önermelerle birleştirilmemelidir. Dolayısıyla Şekil 2'de her bir kolon ve satırda sadece bir eşleştirme yapılmalıdır. Böylece bir kanıt kaynağından gelen bir önerme, diğer kanıt kaynağından o önermeye karşılık gelen sadece bir önerme ile eşleştirilip birleştirilmelidir. Bu örnekte özel bir durum olan Bayesci toa fonksiyonlarının birleştirilmesi söz konusudur ve toa fonksiyonları bire bir aynıdır. Dolayısıyla eşleştirme ve birleştirme sonucu kolaylıkla görülebilmektedir. Birinci kanıt kaynağındaki a 'ya ilişkin önerme $m_1(a)$, ikinci kanıt kaynağındaki a 'ya ilişkin önerme $m_2(a)$ ile; birinci kanıt kaynağındaki b 'ye ilişkin önerme $m_1(b)$, ikinci kanıt kaynağındaki b 'ye ilişkin önerme $m_2(b)$ ile ve birinci kanıt kaynağındaki c 'ye ilişkin önerme $m_1(c)$, ikinci kanıt kaynağındaki c 'ye ilişkin önerme $m_2(c)$ ile eşleştirilip birleştirilmelidir. Eşleştirilerek birleştirilen önermeler arasında ne içerik olarak (a, b, c) ne de toa değeri olarak herhangi bir çelişki söz konusu değildir, bu durumda her bir eşleştirmeye göre yapılan birleştirmede elde edilen çelişki miktarı da sıfır olacaktır. Bayesci olduğu halde bire bir aynı olmayan toa fonksiyonlarında hatta Bayesci olmayan toa fonksiyonlarında önermelerin eşleştirilmesi 0-1 tam sayılı programlama ile yapılabilir [1].

3.3. Temel olasılık atama değerlerinin özetlenmesi

Matematiksel birleştirme yöntemleri; olasılıkların aritmetik ya da geometrik ortalaması gibi basit özetleme işlemlerinden, uzmanların bağımlılığı ya da güvenilirliğine ilişkin olasılıklar gibi karakteristik özelliklerine ait verileri girdi olarak kullanan ayrıntılı bilgi birleştirme modellerine dayalı karmaşık süreçlere kadar çeşitlilik gösterirler [4]. C. Genest ve J.V. Zidek, önel olasılık dağılımlarının birleştirilmesinde logaritmik birleşimin doğrusal birleşime göre daha üstün olduğunu ifade etmektedirler [11]. Logaritmik birleştirmede eğer, bütün kanıt kaynaklarının güvenilirliklerinin eşit olması durumundaki gibi, bütün ağırlıklar eşit olursa geometrik ortalama ile birleştirme yapılmış olur.

DBK'nda, birleştirilen odak elemanlara ait ayrı kaynaklardan gelen toa değerlerinden tek bir toa değeri elde etmek için ilgili odak elemanlarına ait toa değerleri çarpılmaktadır. Örnek 2'ye ait Şekil 2'de a, b ve c odak elemanları için iki kanıt kaynağından gelen toa değerlerinin çarpımları, taralı bölgelerin alanları biçiminde görülmektedir. Bu örnekte; a, b ve c odak elemanları için iki kanıt kaynağından gelen toa değerlerinin özeti, ikili birleştirmeler sonucu elde edilmiş *birleştirilmiş odak elemanı* için elde edilen çarpımın, çarpımlar toplamına bölünmesi ile elde edilmektedir. Bir başka ifadeyle; her bir birleştirilmiş odak elemanına ait alanın, birleştirilmiş odak elemanlarının tümüne ait alanlar toplamına bölünmesi ile normalleştirilmesidir. Uzlaşma üretici bir yöntem için bu işlem sakıncalıdır. Uzlaşma üretici bir yöntemde ikili birleştirmelerde odak elemanlardan birleştirilmiş odak eleman elde edilmesi işleminin aslında bir *nitel özetleme* işlemi olduğu belirtilmişti. Aynı şekilde, ikili birleştirmelerde bir de *nicel özetleme* işlemi yapılmalıdır. İkili birleştirmelerde, toa değerlerinin geometrik ortalaması ile önermelerin nicel özetlemesi yapılabilir.

DBK'nda, eşleştirilmiş önermelerin toa değerlerinin çarpımların karekökleri alınarak toa değerlerinin geometrik ortalamaları bulunduktan sonra bu geometrik ortalamaların geometrik ortalamalarının toplamı içindeki payları hesaplanarak yapılan normalleştirme ile elde edilen sonuçlar, $m_{geo}(M)=0,1$, $m_{geo}(S)=0,2$ ve $m_{geo}(T)=0,7$ biçiminde olur. Görüldüğü gibi bu sonuçlar sezgilerle çelişmeyen sonuçlardır.

5. Sonuç

MKK ile ilgili kuramsal çalışmalar, son yıllarda özellikle bağımsız kanıt kaynaklarından gelen bilginin birleştirilmesinde DBK'na alternatif yeni birleştirme kuralları önerilerini içermektedir. Ancak bugüne kadar, herkesi memnun edecek, uzman ve araştırmacıların çoğu tarafından kabul görmüş bir birleştirme yöntemi geliştirilememiştir. Literatürde DBK'nın sezgilerle çelişen sonuçlar ürettiğine dair yer alan örneklerin ortaya çıkardığı karmaşanın nedeni, birleştirmenin; koşullandırma, düzeltme, güncelleme, uzlaşma üretme gibi farklı anlamlarının karıştırılmasıdır. Aslında; koşullandırma amaçlı bir birleştirme yöntemi olan DBK'nın, uzlaşma üretici bir yöntemden beklenen sonuçları vermediğini gözlemleyerek, sezgilerle çelişen sonuçlar ürettiği yargısına varılmaktadır. Bu çalışmada, MKK çerçevesinde bağımsız ve eşit güvenilirlikli bilgi kaynaklarından elde edilen kanaat fonksiyonlarının uzlaşma üretmek amacıyla birleştirilmesini sağlayacak birleştirme yöntemleri için bir genel çerçeve ortaya konulmuştur.

Uzlaşma üretici bir yöntemde; birleştirilecek olana kanaat fonksiyonlarının karşılıklı önermelerinin eşleştirilmesi gerekliliği anlatılmıştır. Önermelerin ikili birleştirmelerinde nitel özetleme olarak birleştirilmiş odak elemanın üretilmesinde yalnızca kesişim kümesi ya da doğrudan birleşim kümesinin değil, sıklığa bağlı birleşim kümesinin kullanılması gerektiği açıklanmıştır. Ayrıca, önermelerin ikili birleştirmelerinde nicel özetleme olarak, DBK'nda olduğu gibi toa değerlerinin çarpımının değil geometrik ortalamalarının kullanılmasının uygun olacağı belirtilmiştir.

Bayesci olduğu halde bire bir aynı olmayan ya da Bayesci olmayan toa fonksiyonlarında önermelerin eşleştirilmesi ve birleştirilmesinin nasıl yapılacağı, çelişkinin nasıl hesaplanacağı yeni bir yöntem olarak önerilen “Analitik Birleştirme Süreci” kapsamında açıklanmaktadır [1].

Kaynaklar

- [1] M. Büyükyazıcı, 2004, *Kanıt Kuramında Analitik Birleştirme Süreci*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi.
- [2] F. Campos, S. Cavalcante, 2003, An Extended Approach for Dempster-Shafer Theory, IEEE International Conference on Information Reuse and Integration (IRI 2003), Las Vegas, USA, October, 2003.
- [3] M.E.G.V. Cattaneo, 2003, Combining belief functions issued from dependent sources, In: J.M. Bernard, T. Seidenfeld, M. Zaffalon (Eds.), Proceedings of the Third International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications (ISIPTA'03), Carleton Scientific, Lugano, Switzerland. pp. 133-147.
- [4] R.T. Clemen, R.L. Winkler, 1999, Combining Probability Distributions From Experts in Risk Analysis, *Risk Analysis*, Vol. 19, No. 2 pp. 187-203.
- [5] M. Daniel, 2003, Associativity in Combination of belief functions; a derivation of minC combination, *Soft Computing*, 7(5), pp. 288-296.
- [6] A.P. Dempster, 1967, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Ann. Mathematic Statistics*, Vol. 38, pp. 325-339.
- [7] T. Dencoux, 2008, Conjunctive and disjunctive combination of belief functions induced by nondistinct bodies of evidence, *Artificial Intelligence*, 172, 234-264.
- [8] M. Detyniecki, 2001, *Fundamentals on Aggregation Operators*, <http://www.cs.berkeley.edu/~marcin/agop.pdf>.
- [9] J. Dezert, 2002, Foundations for a New Theory of Plausible and Paradoxical Reasoning, *Information & Security*, Vol. 9, 90-95.
- [10] D. Dubois, H. Prade, 1988, Representation and combination of uncertainty with belief functions and possibility measures, *Computational Intelligence*, Volume 4, Issue 3, pp. 244-264.
- [11] C. Genest, J.V. Zidek, 1986, Combining probability distributions: A critique and an annotated bibliography, *Statistical Science*, Vol. 1, No. 1, pp.114-148.
- [12] R. Haenni, 2002, Are alternatives to Dempster's rule of combination real alternatives? Comments on “About the belief function combination and the conflict management problem”-Lefevre et al, *Information Fusion*, Vol. 3, pp. 237-239.
- [13] R. Haenni, 2005, Shedding new light on Zadeh's Criticism of Dempster's rule of Combination, Proceedings of Information Fusion 2005, Philadelphia, July 2005.
- [14] R. Haenni, S. Hartmann, 2006, Modeling partially reliable information source: A general approach based on Dempster-Shafer theory, *Information Fusion*, Vol. 7, pp. 361-379.

- [15] R. Haenni, J. Kohlas, N. Lehman, 2000, Probabilistic argumentation systems, J. Kohlas, S. Moral (Eds.), *Handbook of Defeasible Reasoning and Uncertainty Management Systems*, Vol. 5 of Algorithms for Uncertainty and Defeasible Reasoning, pp. 221-288, Kluwer Academic Publishers.
- [16] R. Haralick, L. Shapiro, 1993, *Computer and Robot Vision*, Vol 2, Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [17] H.Y. Hau, R.L. Kashyap, 1989, On the Robustness of Dempster's Rule of Combination, IEEE International Workshop on Tools for Artificial Intelligence, Fairfax, VA, Oct. 1989, 578-582.
- [18] A. Josang, 2002, The consensus operator for combining beliefs, *Artificial Intelligence*, 141, pp. 157-170.
- [19] A. Josang, M. Daniel, P. Vannoorenberghe, 2003, Strategies for combining conflicting dogmatic beliefs, Applications of plausible, paradoxical, and neutrosophical reasoning for information fusion (The sixth international conference on information fusion), Cairns, Queensland, Australia, July 8-11, 2003.
- [20] J. Kohlas, P.A. Monney, 1995, *A Mathematical Theory of Hints: An Approach to the Dempster-Shafer Theory of Evidence*, Vol. 425 of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer-Verlag.
- [21] E.S. Lee, Q. Zhu, 1995, *Fuzzy and Evidence Reasoning*, Physica-Verlag Heidelberg, Germany, 360 s.
- [22] E. Lefevre, O. Colot, P. Vannoorenberghe, 2002, Belief Function Combination and Conflict Management, *Information Fusion*, Vol. 3, 149-162.
- [23] W. Liu, 2001, *Propositional Probabilistic and Evidential Reasoning*, Physica-Verlag Heidelberg, New York, 274 s.
- [24] P.A. Monney, M. Chan, 2007, Modelling dependency in Dempster-Shafer theory, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, Vol. 15, No., pp. 93-114.
- [25] C.K. Murphy, 2000, Combining Belief Functions when Evidence Conflicts, *Decision Support Systems*, Vol. 29, 1-9.
- [26] National Technical University of Athens, 2003, Focal Elements and Body of Evidence, <http://www.survey.ntua.gr/main/labs/rsens/DeCETI/IRIT/MSI-FUSION/node178.html>.
- [27] K. Sentz, S. Ferson, 2002, *Combination of Evidence in Dempster-Shafer Theory*, Sandia National Laboratories Report, SAND2002-0835, California, 96 s.
- [28] G. Shafer, J. Pearl, (edited), 1990, *Readings in Uncertain Reasoning*, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., United States, 768 s.
- [29] G. Shafer, 1976, *A Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, London, 297 s.
- [30] Ph. Smets, 2007, Analyzing the Combination of Conflicting Belief Functions, *Information Fusion*, Vol. 8, pp. 387-412.
- [31] Ph. Smets, R. Kennes, 1994, The Transferable Belief Model, *Artificial Intelligence*, Vol. 66, pp. 191-234.
- [32] F. Voorbraak, 1991, On the justification of Dempster's rule of combination, *Artificial Intelligence*, 48, pp. 171-197.
- [33] R. R. Yager, 1987, On the Dempster-Shafer framework and new combination rules, *Information Sciences*, 41 (2), p.93-137.
- [34] K. Yamada, 2008, A new combination of evidence based on compromise, *Fuzzy Sets and Systems*, 159, 1689-1708.
- [35] L.A. Zadeh, 1979, On the validity of Dempster's rule of combination of evidence. Technical Report 79/24, University of California, Berkely.
- [36] L.A. Zadeh, 1984, A mathematical theory of evidence (book review), *AI Magazine*, 5(3), pp. 81-83.