

## Kalın kuyruklu hasar modellerinde iflas olasılığının benzetim yöntemi ile hesabı: Trafik sigortası örneği

Başak Bulut

Hacettepe Üniversitesi  
Fen Fakültesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü  
06800-Çankaya, Ankara, Türkiye  
[basakbulut@hacettepe.edu.tr](mailto:basakbulut@hacettepe.edu.tr)

Cenap Erdemir

Ufuk Üniversitesi  
İstatistik Bölümü  
06520-Çankaya, Ankara, Türkiye  
[cerdemir@ufuk.edu.tr](mailto:cerdemir@ufuk.edu.tr)

### Özet

Bu çalışmada iflas olasılığı, poliçe sayılarının, hasar ve prim süreçlerinin durağan olmayan süreçlere uyduğu bir zorunlu trafik sigortası risk süreci yapısı altında, benzetim modeli kullanılarak hesaplanmıştır. İncelenen bireysel hasar tutarlarının kalın kuyruklu log-normal dağılıma, hasar sayılarının ise Poisson dağılımına uyduğu görülmüş, dağılım parametrelerinin zamanla değişmediği varsayımı altında sürecin dinamik benzetim modeli kurulmuştur. Belirlenmiş senaryolara göre model üzerinde yapılan deneylerle iflas olasılıkları elde edilmiştir. Aynı süreçte, iflas olasılığı kalın kuyruklu hasar dağılımlarına özgün formüller ışığında elde edilmiştir. Sonuçların birbirine benzer çıktığı ve bu sebeple zorunlu trafik sigorta portföyü için benzetim modeli kullanılarak çeşitli senaryolar altında iflas olasılıklarını elde etmenin mümkün olduğu gösterilmiştir.

**Anahtar sözcükler:** Kalın kuyruklu dağılımlar, risk süreci, iflas olasılığı, dinamik benzetim modeli.

### Abstract

#### Calculation of ruin probability by simulation method with heavy tail loss models: A compulsory traffic insurance example

*In this study, the probability of ruin is calculated using a simulation model with the number of policies, claims and premium processes comply with non-stationary processes, under the structure of a compulsory traffic insurance risk process. The investigated individual claim amounts and the number of claim distributions have been detected to fit heavy-tailed log-normal distribution and Poisson distribution respectively. Assuming that distribution parameters do not change over time, the dynamic simulation model of the process has been established. The ruin probabilities depending on the scenarios were obtained from experiments conducted on the model. During the same period, the probability of ruin have been obtained with the unique formulas of the heavy-tailed distributions. In conclusion, because of the similar results, it is shown that the calculation of ruin probability is possible under the various scenarios using a simulation model for compulsory motor insurance portfolio.*

**Keywords:** Heavy-tailed distributions, risk process, ruin probability, dynamic simulation model.

### 1. Giriş

İflas kuramı, sigorta poliçelerinden oluşan bir portföy için zamana bağlı olarak sigortacının artık değerinin düzeyi ile ilgilenir. Sigortacının artık değeri bir anlamda sigortacının risk altındaki parasal birikimleri olarak da ifade edilebilir. Bu sebeple artık süreci risk süreci olarak da tanımlanmaktadır. Risk sürecinin temel olarak üç bileşene sahip olduğu varsayılır: Başlangıç sermayesi, toplanan primler ve ödenen hasarlar.  $t$  sürekli dizin parametresi olmak üzere, sürekli zamanlı risk süreci,  $\{U(t)\}$ ,

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $u$  başlangıçtaki artık düzeyini,  $ct$  başlangıçtan  $t$  zamanına kadar poliçe sahiplerinden toplanan primleri,  $S(t)$  ise  $t$  zamanına kadar ödenen toplam hasar ödemelerini göstermektedir. Klasik risk süreci olarak da adlandırılan bu süreçte bireysel hasar büyüklükleri veya ödemeleri  $X$  rastlantı değişkeni ile gösterilmekte ve  $F(x)$ , bireysel hasarların dağılımını göstermektedir. Bu risk modelinin en basit yapısında, hasarların ortaya çıkması durumunda hasar ödemelerinin hemen ve tam olarak yapıldığı, sürecin mevcut pozitif artık düzeyini gösteren birikimler için herhangi bir faiz ödemesinin olmadığı ve aynı zamanda sigortacının herhangi bir masraf veya harcamasının söz konusu olmadığı varsayılmaktadır. Klasik risk modelinin en önemli varsayımlarından biri de  $t$  zamanına kadar olan hasar sayısı sürecinin,  $\{N(t)\}$ ,  $\lambda$  parametresi ile Poisson süreci olduğunun kabul edilmesidir. Bu durumda,  $\{S(t)\}$ , toplam hasar sürecinin  $t$  zamanındaki değeri,  $S(t)$  rastlantı değişkeni ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Klasik risk sürecinde nihai iflas olasılığı,  $u$  ile başlayan sürecin bir  $t$  zamanında ilk kez negatif değer alması olasılığı olarak ifade edilir:

$$\psi(u) = P( U(t) < 0 \text{ bazı } t > 0 \text{ için } )$$

$u$  başlangıç sermayesi ile başlayan sürecin ilk kez  $T(u)$  zamanında negatif değer alması, yani iflas olasılığının ortaya çıkması olasılığı, böyle bir zamanın sonlu ve mevcut olması durumunda aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\psi(u) = P(T(u) < \infty)$$

İflas olasılığının hesaplanabilmesi için birçok araştırmacı iflas kuramı alanında yapılan çalışmalara katkıda bulunmuştur. Bir risk süreci için risk ölçümü veren ve  $R$  ile gösterilen düzeltme katsayısı kullanılarak iflas olasılığının üst sınırı için Lundberg eşitsizliği

$$\psi(u) \leq \exp\{-Ru\}$$

biçiminde verilmiştir. Klasik risk süreci için  $R$  düzeltme katsayısı,

$$\lambda + cr = \lambda M_x(R)$$

eşitliğinin çözümü ile elde edilir. Burada eğer bireysel hasar dağılımının moment çıkarıcı fonksiyonu elde edilebilirse  $R$  düzeltme katsayısı denklemden kolayca çözülmektedir[5].

Üstel dağılım ailesinden bazı bireysel hasar dağılımları için bu olasılıkları hesaplamak mümkün olmaktadır. İflas veya yaşam olasılıklarını elde etmek için yapılan çalışmalarda özyineli hesaplama yöntemlerinin önemli bir yeri vardır. Bireysel hasar dağılımının çoğu zaman kalın kuyruklu dağılım göstermesi iflas olasılığının hesaplanmasını biraz daha zorlaştırmaktadır.

Klasik risk modeline dayanan iflas olasılığı hesaplama yöntemleri, risk modeli için yapılan varsayımlar altında geliştirilmiştir. Varsayımların tümünün ya da bir kısmının uygulamada geçerli olamayacağı olasılığı her zaman vardır. Varsayımların doğruluğunu test etmek mümkün olmadığında, genellikle kuramsal yöntemin sonuçları başka modellerin sonuçları ile karşılaştırılmaktadır. Bu bağlamda en çok kullanılan yöntemlerden biri de kuramsal modellerin sonuçlarını benzetim modellerinin sonuçları ile karşılaştırmaktır.

Makalenin ikinci bölümünde kalın kuyruklu dağılımlara özel iflas olasılığının hesaplanması ve iflas kuramı alanında son yıllarda elde edilen kuramsal sonuçlar açıklanmıştır. Kuramsal modelin sonuçlarını karşılaştırmak üzere kullanılacak olan risk sürecine ilişkin benzetim modelinin ayrıntıları üçüncü bölümde sunulmuş ve dördüncü bölümde sayısal örnek olarak Ankara ilinde, otomobil sınıfında Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası (Trafik Sigortası) kapsamındaki poliçelerin ürettikleri hasarlar ile ilgili uygulama verilmiştir. Son bölümde, kuramsal yöntemden ve benzetim yönteminden elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

## 2. Kalın kuyruklu hasar dağılımları için iflas kuramı

Kalın kuyruk yapısına sahip dağılımlar için iflas olasılığının hesaplanmasında; dağılımın kuyruğunu temsil eden  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  kuyruk dağılımı ile ilgilenilmektedir.

### Alt-üstel dağılımlar

$S$  ile gösterilen alt-üstel dağılımlar kalın kuyruklu dağılımların en kapsamlı alt sınıfını oluşturmaktadır. Bu dağılım sınıfına *alt-üstel* denilmesinin nedeni; bu sınıf içerisindeki dağılımların herhangi bir üstel dağılımdan daha yavaş azalan bir kuyruk yapısına sahip olmasıdır[6]. Herhangi bir  $F$  dağılım fonksiyonunun alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alabilmesi için gerekli üç koşul bulunmaktadır. Bu koşullar sırasıyla şu şekilde verilmektedir:

**Koşul 1:**  $x \geq 0$  değerleri için  $\bar{F}(x) > 0$  olmalıdır.

**Koşul 2:**  $\overline{F^{n^*}}$ ;  $F$  dağılım fonksiyonunun  $n$  katlı konvülyasyonunun kuyruk dağılımını göstermek üzere  $\overline{F^{n^*}} = 1 - F^{n^*}(x) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)$  biçiminde elde edilmektedir. Herhangi bir dağılımda  $n \geq 2$  değeri için  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n^*}}(x)}{\bar{F}(x)} = n$  eşitliği sağlanmalıdır.

**Koşul 3:**  $X_1, X_2, \dots$  bağımsız ve alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alan aynı  $F$  dağılımına sahip rastlantı değişkenleri olmak üzere, tüm  $n = 2, 3, \dots$  değerleri için;  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  olmak üzere;  $P(S_n > x) = \overline{F^{*n}}(x) \sim n \bar{F}(x)$  eşitliğini sağlamalıdır.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)} \sim \frac{\overline{F^{n^*}}(x)}{n \bar{F}(x)} \rightarrow 1$  eşitliği sağlanıyor ise  $F$  dağılımı alt-üstel dağılım sınıfına girmektedir.

Koşul 2'nin ispatı Chistyakov [2] tarafından; Koşul 3'ün ispatı ise Embrechts ve Goldie [3] tarafından yapılmıştır.

Bir dağılımın alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer aldığıın ispatlanması çok kolay olmamaktadır. Bu nedenle risk teorisindeki uygulamalar için dağılımın kendisinden çok, bu dağılımın bütünleşik kuyruk dağılımının alt üstelliğe uyuyor olmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Sonlu beklenen değere sahip negatif olmayan rastlantı değişkenininin dağılım fonksiyonu  $F$  ile gösterilmek üzere, bütünleşik kuyruk dağılımı  $F_I$ ;

$$F_I(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy & x > 0 \end{cases}$$

olarak elde edilmektedir.

### **Alt-üstel dağılımlar için Cramer-Lundberg teoremi**

Alt-üstel dağılıma Cramer-Lundberg teoreminin uygulanabilmesi için, bu dağılım yapısına ait üç özellikten yararlanılmaktadır. Bu özellikler şu şekildedir:

**(a)** Eğer  $F$  dağılımı alt-üstel dağılım sınıfı içerisinde yer alıyor ise benzer şekilde  $(0, \infty)$  aralığındaki  $y$  değeri için de aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1$$

**(b)** Eğer yukarıdaki eşitlik sağlanıyorsa tüm  $\varepsilon > 0$  değerleri için;  $x \rightarrow \infty$  iken  $e^{\varepsilon x} \bar{F}(x) \rightarrow \infty$  olmaktadır.

**(c)**  $F \in S$  olması durumunda,  $n \geq 2$  değerleri için; sıfırdan büyük bir  $\varepsilon$  değeri ve sınırlı bir  $K$  sabitine bağlı olarak:

$$\frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\bar{F}(x)} \leq K(1 + \varepsilon)^n \quad x \geq 0$$

eşitsizliği elde edilmektedir.

Alt-üstellik,  $\varepsilon > 0$  değerleri için herhangi bir  $e^{-\varepsilon x}$  şeklinde olan üstel dağılımdan daha yavaş sifıra yaklaşan  $\bar{F}(x)$  dağılımı olarak açıklanmakta olup, tüm  $\varepsilon > 0$  ve  $y \geq 0$  değerleri için;

$$\int_y^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) \geq e^{\varepsilon y} \bar{F}(y)$$

eşitsizliği elde edilmektedir.  $F \in S$  olması durumunda tüm  $\varepsilon > 0$  değerleri için  $\hat{f}(-\varepsilon) = \infty$  olmaktadır. Buna bağlı olarak, alt-üstel dağılımın Laplace-Stieltjes dönüşümü, sıfır durumu için özel bir tekilliğe sahiptir. Bu durum ilk kez Chistyakov [2] tarafından ispatlanmıştır. Bu teoremin genişletilmesiyle daha geniş dağılım sınıfları için de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1$$

eşitliğinin sağlandığı durumların olduğu görülmüştür [4].

Cramer-Lundberg modelinin net kar koşulu ( $\rho > 0$ ) ve bütünleşik kuyruk dağılımının alt üstel dağılım sınıfı içerisinde bulunması durumunda ( $F_I \in S$ );  $u \rightarrow \infty$  iken iflas olasılığı  $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_I(u)$  şeklinde hesaplanmaktadır. Log-normal dağılım gibi alt-üstel dağılım yapısına sahip kalın kuyruklu hasar

büyüklüğü dağılımları için de iflas olasılığı tahmini  $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_1(u)$  şeklinde hesaplanmaktadır.  $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_1(u)$  tahmini sadece  $F_I \in S$  koşulu altında gerçekleştirilebilmektedir [1],[4].

### 3. Risk sürecinin benzetim modeli

İflas olasılığının benzetim yöntemleri ile hesaplanabilmesi için öncelikle nasıl bir benzetim modelinin kurulması gerektiğine karar verilmesi gerekmektedir. Ele alınan konu bir sigorta portföyünün risk süreci olduğundan, bir sigorta sisteminin modellenmesi ve sistem başarısının ortaya konma ihtiyacı kendiliğinden ortaya çıkmaktadır. Risk sürecinin durumunu gösteren artık düzeyinin ve sistemdeki poliçe sayısının zaman içerisinde rastlantıya bağlı olarak değiştiği göz önüne alındığında, benzetim modelinin stokastik ve dinamik özelliklere sahip olduğu açıklıkla ifade edilmektedir. Sürecin sistem yaklaşımı ile modellenmesi için birinci adımda benzetim modelinin temel varsayımlarını; ikinci adımda ise sistem girdileri ile çıktıları belirlemek gerekmektedir.

#### 3.1. Benzetim modelinin varsayımları

Stokastik dinamik sistem benzetim modelinin varsayımları:

- Benzetim modelinin amacı  $T$  zamanına kadar şirketin sermayesinin pozitif olma olasılığını tahmin etmektir.
- Bir sigorta şirketinin portföyündeki poliçeler ortak  $\lambda$  parametresine sahip bağımsız Poisson sürecine göre hasar üretmektedir. Hasarlar arasında geçen süre  $\lambda$  parametresi ile üstel dağılım göstermektedir.
- Yeni müşteriler  $\nu$  parametrelili Poisson sürecine göre sisteme katılmaktadırlar (poliçe imzalamaktadırlar). Müşteri gelişleri arasındaki süreler  $\nu$  parametresi ile üstel dağılım göstermektedir.
- Sistemde mevcut  $n$  tane poliçeden her biri ortalama olarak  $1/\mu$  birim zamanda,  $\mu$  parametrelili üstel dağılıma uygun olarak sigorta şirketi ile sözleşmesini sonlandırmaktadır.
- Her poliçe sahibi her birim zaman için  $c$  kadar sabit prim ödemektedir.
- Risk süreci  $n_0$  kadar müşteri ve  $a_0$  kadar başlangıç sermayesi ile sürece başlamaktadır.

Mümkün olduğu takdirde her bir varsayımın doğruluğunun test edilmesi modelin geçerliliği açısından önem taşımaktadır.

#### 3.2 Benzetim modelinin girdi ve çıktıları

Sistem parametreleri ve karar değişkenleri sistemin girdilerini, durum değişkenleri ve sistem başarımlarını ölçütü ise sistemin çıktıları oluşturmaktadır. Risk sürecinin girdi ve çıktıları aşağıdaki gibi belirlenmiştir [7][8]:

Sistem parametreleri:

- $\nu, \mu, \lambda$ : Poisson süreçlerinin (veya üstel dağılımların) parametreleri,
- $n_0$ : Başlangıçtaki poliçe sayısı.

Karar değişkenleri:

- $a_0$ : Başlangıç sermayesi,
- $c$ : Birim zaman için prim miktarı,
- $T$ : Dönem uzunluğu.

Durum değişkenleri:

- $t_E$  : olay listesindeki bir olayın oluş zamanı,
- $n$  :  $t_E$  zamanındaki poliçe sayısı,
- $a$  :  $t_E$  zamanındaki artık miktarı.

Sistem başarımlı göstergesi

- $p$  : İflas olasılığı,

Olaylar:

- Yeni poliçe girişi,
- Mevcut bir poliçenin çıkışı,
- Hasar bildirimini.

Her biri üstel dağılım gösteren rastgele olaylardan hangisinin ortaya çıkacağını belirlemek için üstel dağılıma ait bazı teorem sonuçlarından yararlanır. Bu sonuca göre,  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  bağımsız üstel rastlantı değişkenleri  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  parametreleri ile üstel dağılıma sahipse,  $\text{Min}(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ,  $\sum_i \lambda_i$  ile üstel dağılıma sahiptir. Bu durumda bir  $Y_k$  değişkeninin en küçük değeri alması olasılığı,  $\text{Pr}(Y_k = \min\{Y_1, \dots, Y_n\}) = \lambda_k / (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$  ile ifade edilir[9].

Sistem  $t$  zamanında iken sonraki olay  $t+X$  zamanında olsun. Üstel dağılımın özelliğini kullanarak, burada  $X$ 'in  $2n+1$  tane üstel dağılıma sahip rastlantı değişkenleri arasında en küçük değer alan rastlantı değişkeni olduğu söylenebilir. Üstel dağılımın özelliğine göre en küçük  $X$  rastlantı değişkeni,  $v+n\mu+n\lambda$  parametresi ile üstel dağılım gösterir. Buna göre, en küçük zamanda ortaya çıkan olay, üç olaydan biridir. Hangi olayın ortaya çıkacağı bir  $K$  gösterge değişkeninin olasılık fonksiyonuna bağlı olarak belirlenebilir. Üç olay söz konusu olduğundan  $K=1, 2, 3$  değerlerini almaktadır.

Yeni bir poliçenin portföye katılması olasılığı;  $P(K=1) = v / (v+n\mu+n\lambda)$ ,

Bir poliçenin portföyden ayrılması olasılığı;  $P(K=2) = n\mu / (v+n\mu+n\lambda)$ ,

Bir hasarın bildirilme olasılığı;  $P(K=3) = n\lambda / (v+n\mu+n\lambda)$  şeklinde elde edilmektedir.

Bu durumda  $(0,1)$  aralığında tekdüze dağılıma sahip bir  $U$  rastgele sayısı çekilerek;

$U \leq P(K=1)$  olması durumunda  $K=1$ ;

$P(K=1) < U \leq P(K=1) + P(K=2)$  olması durumunda  $K=2$ ;

$P(K=1) + P(K=2) < U \leq P(K=1) + P(K=2) + P(K=3)$  olması durumunda ise  $K=3$  olarak alınmaktadır.

### 3.3. Benzetim modelinin algoritması

Benzetim modelinin algoritması genel kabul görmüş komut yazım kurallarına uygun olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir [8]:

A1. Oku  $T, v, \mu, \lambda, c, a_0, n_0$

A2.  $t=0, a=a_0, n=n_0, I=1$

A3. Üret  $X$

A4.  $t_E = X$

A5. Eğer  $t_E > T$  veya  $i=0$  ise

DUR( $I=0$  ise iflas;  $I=1$  ise iflas yok)

Aksi halde

A5.1  $a = a + nc(t_E - t)$

A5.2  $t = t_E$

A5.3 Üret  $U$

A5.4 Eğer  $U \leq v / (v+n\mu+n\lambda)$  ise  $n=n+1$

Aksi halde  $U < (v+n\mu) / (v+n\mu+n\lambda)$  ise  $n=n-1$

Aksi halde

A5.4.1 Üret  $Y$  (Hasar miktarı)

A5.4.2 Eğer  $Y > a$  ise  $I=0$  DUR

Aksi halde  $a = a-Y$

A5.5 Üret  $X$  ve  $t_E = t + X$

A6. Git A5

#### 4. Uygulama

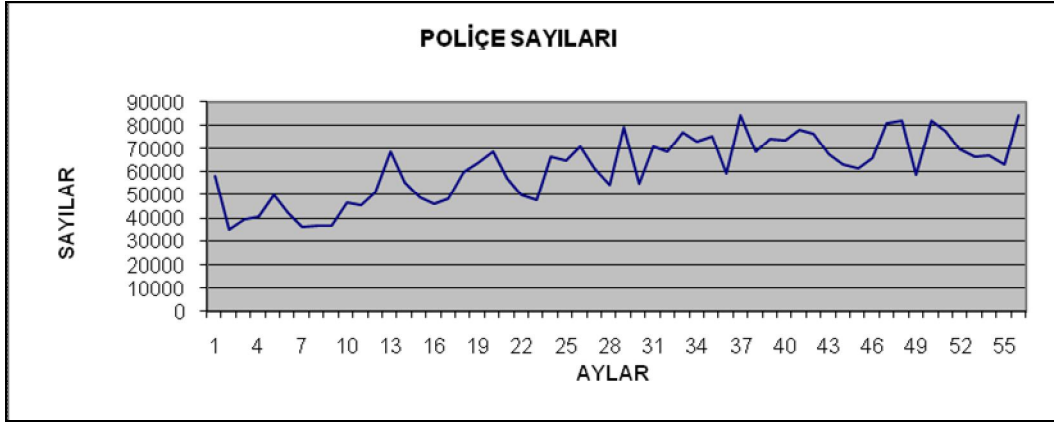
Çalışmanın bu bölümünde önce Ankara ilindeki otomobil sınıfına ait araçların trafik sigorta poliçelerinden oluşan portföyde çalışmaya esas olan veri kaynağının özellikleri incelenmiş, ardından risk süreci benzetim modelinin girdileri ve çıktıları belirlenmiştir. Üçüncü aşamada benzetim modeli kullanılarak çeşitli senaryolar altında risk sürecinin benzetimi yapılmış ve tüm sigorta şirketlerinin oluşturduğu bir sistemin yükümlülüklerini karşılama durumu incelenmiştir. Aynı süreçte, iflas olasılığı kalın kuyruklu hasar dağılımından elde edilmiş ve her iki yöntemin sonuçları değerlendirilmiştir. Mevcut verinin durumu incelenerek, sonrasında benzetim denemelerinin sonuçları yorumlanmıştır.

##### 4.1. Veri kaynağı

Türkiye’de sigorta şirketlerine ait trafik sigortası verisi TRAMER (Trafik Sigortaları Bilgi ve Gözetim Merkezi) tarafından tutulmaktadır. TRAMER’den elde edilen veri aylık bazda olup 2003 yılından 2009 yılının Aralık ayına kadar olan zamanı kapsamaktadır. Veri il ve taşıt türü ayırımında verilmektedir. Mevcut veri içerisinde bu araştırmaya esas oluşturan bilgi alınmıştır. Bunlar, 2003 yılı aralık ayından 2009 yılı aralık ayına kadar olan aylık bazda toplam poliçe, toplam hasar sayıları ve toplam hasar ödemelerine (muallaklar hariç) ilişkin bilgidir. TRAMER, aylık toplamaların sigorta şirketlerine dağılımlarını gizlilik sebebiyle kullanıcılara vermemektedir. Bu durumda şirket bazında bir portföyün risk sürecini oluşturmak mümkün olamamıştır. Buna karşılık zorunlu trafik sigortası poliçelerinin şirketlere homojen dağıldığı ve şirketlerin poliçe sahipleri tarafından özel olarak seçilmediği varsayımı altına Ankara ilindeki otomobil sınıfına ait poliçelerin bir portföy oluşturduğu ve Ankara ilini kapsayan bir göstermelik şirketin varlığı kabul edilmiştir. Farklı tarifeleri modele katmamak için yalnızca otomobil poliçeleri modele dahil edilmiştir.

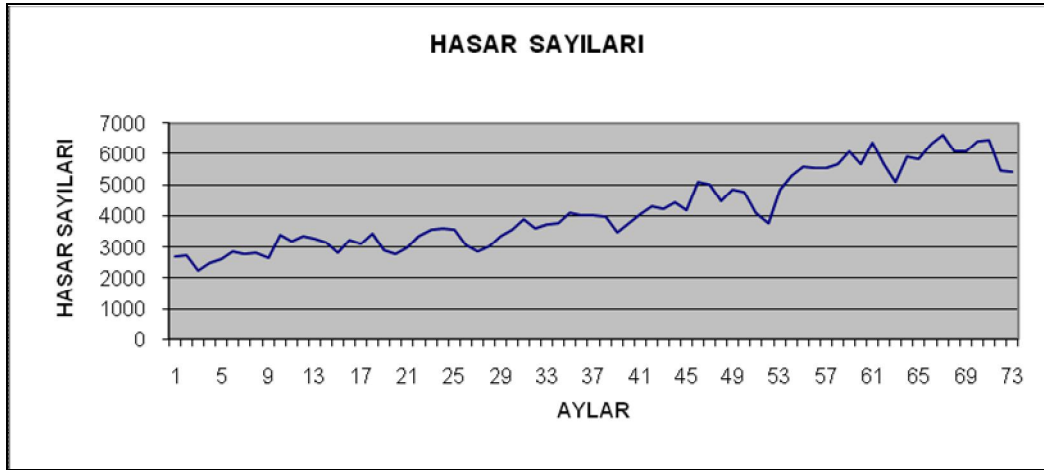
Göstermelik şirkete ait bireysel hasar büyüklükleri elde olmadığından tüm portföyü temsil edecek biçimde bir sigorta şirketinden Ankara iline kayıtlı 2009 yılına ait hasarlar içerisinde rastgele olarak 300 dosya seçilmiş ve bu dosyalardan hasar ödemeleri alınarak yeterli büyüklükte bir örneklem oluşturulmuştur. Kolmogorov-Smirnov, Anderson Darling ve ki-kare uyum iyiliği testleri sonucunda hasar tutarının  $\mu=6,1327$  ve  $\sigma=0,45195$  parametreleriyle log-normal dağılıma uyduğu %95 güven düzeyinde kabul edilmiştir. Log-normal dağılıma uyduğu belirlenen hasar tutarlarının Matlab programında log-normal dağılıma göre incelemesinin yapılmasında integral ve limit işlemlerinde kolaylık sağlaması nedeniyle hata fonksiyonu (erf) ve tamamlayıcı hata fonksiyonu (erfc) tablo değerlerinden yararlanılmıştır (Ek-1, Ek-2) [1].

Poliçe sayılarının grafiği Şekil 1’de verilmiştir. Aylık poliçe sayıları serisinde 20 ayda veri mevcut değildir. Eksik verinin mevcut artan yöndeki trendin eğilimini belirlemek için önemli bir hata oluşturmayacağı sonucuna varılarak eldeki veri kullanılmıştır. Aylık hasar sayıları serisinin grafiği Şekil 2’de verilmiştir.



Şekil 1. 2003 Aralık- 2009 Aralık Ankara İli Otomobil Sınıfı Poliçe sayıları

Grafikler incelendiğinde yıllar itibariyle belirli aylarda azalma gözlenmiş olsa bile poliçe sayısında ve hasar sayısında artışın meydana geldiği gözlenmektedir.



Şekil 2. 2003 Aralık- 2009 Aralık Ankara İli Otomobil Sınıfı Hasar Sayıları

#### 4.2. Model girdi ve çıktılarının belirlenmesi

Poliçe sayılarının basit doğrusal regresyon modeline göre elde edilen eşitliği;

$$N_t = 43611 + 637 * t$$

olarak bulunmuştur. Modele göre poliçe sayısında ayda 637 tane artış olmaktadır. Firmalardan alınan bilgiye göre her ay toplam poliçe sayısının %13-14'ü sistemden ayrılmaktadır. Bu bilgiden hareketle her ay ortalama olarak 737 poliçenin sisteme girdiği; 100 poliçenin sistemden çıktığı sonucuna varılmaktadır.

Yapısı gereği sürekli olan risk sürecinin dinamik benzetim modelini kullanabilmek için mümkün olabilecek en küçük zaman birimi olarak dakika belirlenmiştir. Aylık bazdaki mevcut veriden dakika bazındaki sistem parametre değerleri elde edilmiştir.

#### Sistem parametreleri:

Son aydaki toplam poliçe sayısı:  $n_0 = 79130$

Her ay ortalama sistemden çıkan poliçe sayısı: 100



Her ay ortalama olarak yeni giren poliçe sayısı: 737

Her ay mevcut poliçelerden ayrılan sayısı: 100

Her ay poliçe sayısındaki ortalama artış (giriş-çıkış): 637

Bireysel hasar dağılımının parametreleri: Log-normal (6,1327; 0,45195)

Bir yeni poliçenin katılması (girişi) için geçen ortalama zaman (üstel dağılım ortalaması):

$$1/\nu = 43200 \text{ dk} / 737 = 58,556 \text{ dakika}$$

$$\nu = 1 / 58,556$$

Aylık ortalama hasar sayısı: 6127

Aylık hasar artış sayısı: 54

Herhangi bir poliçenin hasar getirmesi için gerekli ortalama zaman (üstel dağılım ortalaması):

$$1/\lambda = 43200 / 6127 = 7,034 \text{ dk.}$$

$$\lambda = 1 / 7,034$$

Herhangi bir poliçenin sistemden ayrılması için gerekli zaman (üstel dağılım parametresi/Poisson süreci parametresi):

$$1/\mu = 43200 / 100 = 432 \text{ dk}$$

$$\mu = 1 / 432$$

#### **Karar değişkenleri:**

Başlangıç sermayesi:  $a_0$  (Senaryolara göre farklı değerler almaktadır),

Dönemsel (yıllık) prim miktarı:  $c$  (Mevcut durum için 170 TL \*),

$T$ : Dönem sayısı,

\* Karayolları Motorlu Araçlar Zorunlu Mali Sorumluluk Sigortası 2009 yılı Otomobil araç grubu için prim miktarı olarak alınmıştır.

#### **Durum değişkenleri:**

$t_E$ : olay listesindeki bir olayın oluş zamanı ( $X$  ile belirlenir),

$n$ :  $t_E$  zamanındaki poliçe sayısı,

$a$ :  $t_E$  zamanındaki artık değer/sermaye,

$Y$ : Hasar miktarı.

#### **Sistem başarımlık göstergesi:**

$N$ : deneme sayısını,

$f$ : iflas etmeyen deneme sayısını,

$q$ : iflas etmeme olasılığını göstermek üzere;  $q = f / N$  şeklinde elde edilmektedir.

## 5. Sonuç

Benzetim modeli kullanılarak hazırlanan program sayesinde çeşitli senaryolar altında risk sürecinin benzetimi yapılmış ve tüm sigorta şirketlerinin oluşturduğu bir sistemin yükümlülüklerini karşılama durumu incelenmiştir. Şirketin yükümlülüklerini karşılayamaması neticesinde muhtemel iflas durumu ortaya çıkmıştır.

Benzetim modeline göre oluşturulan sistemin 10 farklı başlangıç sermayesi ve beş farklı brüt prim altında yükümlülük karşılama yeterliliği incelenmiştir. Yükümlülük karşılama durumunun mümkün olduğu durum “0” simgesiyle; yükümlülük karşılama durumunun mümkün olmadığı iflas durumu “1” simgesiyle gösterilmektedir. Benzetim modeline göre elde edilen iflas durumları Çizelge 1’de gösterilmektedir.

Alt üstel dağılıma uyan hasar tutarları ile aylık toplanan prim tutarlarına göre oluşturulan risk sürecinin alt-üstel dağılım sınıfı için elde edilen iflas olasılığı eşitliklerinden yararlanılarak farklı başlangıç sermayeleri ve güvenlik yükleme faktörlerine göre iflas olasılıkları hesaplanmıştır. Tüm hesaplamalar Matlab yazılımı kullanılarak geliştirilen program aracılığı ile yapılmıştır.

9 farklı başlangıç sermayesi ve beş farklı güvenlik yükleme faktörüne göre aylık 0,03 faiz oranına bağlı olarak risk sürecinin sıfırın altına düştüğü ilk nokta için elde edilen iflas olasılıkları Çizelge 2’de gösterilmektedir. Yazılımdan elde edilen değerler sonucunda, başlangıç sermaye miktarlarındaki ve sistemin uygulayacağı güvenlik yükleme faktörlerindeki artışın iflas olasılıklarında azalmaya neden olduğu gözlemlenmiştir. İflas olasılığı için en yüksek değer sermaye miktarının 50 000 000 TL ve güvenlik yükleme faktörünün bulunmadığı durumda, 0,6995 olarak elde edilirken; en düşük iflas olasılığı olan 0,0547 değeri ise, sermaye miktarının 150 000 000 TL ve güvenlik yükleme faktörünün 1,80 olduğu durum için elde edilmektedir. Başlangıç sermaye miktarının 175 000 000 TL ve 200 000 000 TL olması durumunda herhangi bir güvenlik yükleme faktörüne bağlı olmaksızın iflas durumu gerçekleşmemiştir.

Benzetim modeli ile elde edilen sonuçların yer aldığı Çizelge 1’de iflasın gerçekleştiği durumlar “1”, iflasın gerçekleşmediği durumlar “0” ile gösterilmektedir. Bu sonuçların log-normal dağılıma uyan hasar tutarlarına ilişkin hesaplanan iflas olasılıklarının bulunduğu Çizelge 2’deki sonuçlar ile, aynı sermaye miktarları esas alındığında benzer çıktığı, her iki yöntem ile yapılan hesaplamada da belirli varsayımlar altında iflas durumunun gözlemlendiği ve bu sebeple incelenen zorunlu trafik sigorta portföyü için benzetim modeli kullanılarak çeşitli senaryolar altında iflas olasılıklarını elde etmenin mümkün olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

**Çizelge 1.** Benzetim modeli kullanılarak elde edilen iflas durumları

İFLAS OLASILIKLARI Sermaye Miktarları (TL)	Brüt prim				
	170	200	250	300	350
Başlangıç Sermayesi=50 000 000	1	1	1	0	0
Başlangıç Sermayesi=60 000 000	1	1	1	0	0
Başlangıç Sermayesi=70 000 000	1	1	1	0	0
Başlangıç Sermayesi=80 000 000	1	1	1	0	0
Başlangıç Sermayesi=100 000 000	1	1	0	0	0
Başlangıç Sermayesi=125 000 000	1	1	0	0	0
Başlangıç Sermayesi=150 000 000	1	1	0	0	0
Başlangıç Sermayesi=175 000 000	1	0	0	0	0
Başlangıç Sermayesi=200 000 000	1	0	0	0	0
Başlangıç Sermayesi=225 000 000	0	0	0	0	0

**Çizelge 2.**  $\mu=6,1327$  ve  $\sigma=0,45195$  parametrelili log-normal dağılıma göre elde edilen iflas olasılıkları

İFLAS OLASILIKLARI	Güvenlik yükleme faktörü				
	1,00	1,25	1,50	1,75	1,80
Sermaye Miktarları (TL)					
Başlangıç Sermayesi=50 000 000	0,6995	0,5596	0,4663	0,3997	0,3886
Başlangıç Sermayesi=75 000 000	0,5492	0,4394	0,3662	0,3138	0,3051
Başlangıç Sermayesi=80 000 000	0,5192	0,4153	0,3461	0,2967	0,2884
Başlangıç Sermayesi=90 000 000	0,4591	0,3673	0,3061	0,2623	0,2550
Başlangıç Sermayesi=100 000 000	0,3990	0,3192	0,2660	0,2280	0,2217
Başlangıç Sermayesi=125 000 000	0,2487	0,1990	0,1658	0,1421	0,1382
Başlangıç Sermayesi=150 000 000	0,0985	0,0788	0,0656	0,0563	0,0547
Başlangıç Sermayesi=175 000 000	0	0	0	0	0
Başlangıç Sermayesi=200 000 000	0	0	0	0	0

### Kaynaklar

- [1] Bulut B., Erdemir C, 2011, Ruin probability in heavy tailed risk models , *Journal of Statisticans*, vol 4, no:2 pp 39-56.
- [2] Chistyakov, V.P., 1964, A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes, *Theory probability Application* 9, pp 640-649.
- [3] Embrechts, P., Goldie, C.M., 1982, On convolution tails, *Stochastic Processes Applied* 13, pp 263-278.
- [4] Embrechts, P., Klüppelberg C., Mikosch T., 2001, Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, *Applications of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability* 33 , Springer, 648p.
- [5] Dickson, D. C. M., 2005, *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Pres.
- [6] Goldie, C. M., Klüppelberg C., 1998, Subexponential Distributions, *A practical guide to heavy tails: statistical techniques and applications*, pp 435-460.
- [7] Gottfried, B., 1984, *Elements of Stochastic Process Simulation*, Prentice-Hal, New Jersey.
- [8] Ross, S. M., 2006, *Simulation*, Elsevier, Amsterdam.
- [9] Ross, S.M., 2003, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, Amsterdam.

**Ekler****Ek-1.** Log-normal dağılım özellikleri: $-\infty < \mu < \infty$  ve  $\sigma > 0$  olmak üzere

Olasılık yoğunluk ve dağılım fonksiyonları:

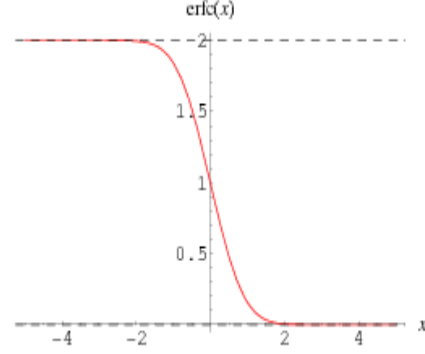
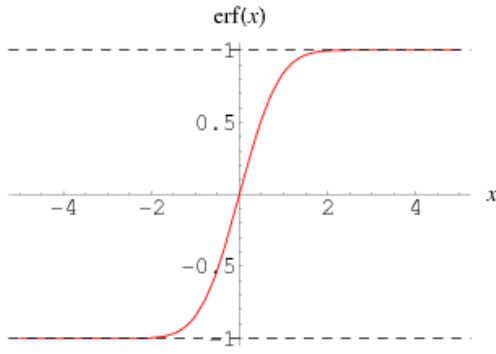
$$f(x) = \frac{d}{dx} \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma x} \varphi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[-\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{\ln x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right]$$

Kuyruk Dağılım Fonksiyonu:

$$\bar{F}(x) \sim \frac{\sigma}{\log x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

**Ek-2.** Hata onksiyonu (Error function-Erf) ve tamamlayıcı hata fonksiyonu (complementary error function-erfc) tablosu



x	Erf(x)	Erfc(x)
0	0	1
0,05	0,056372	0,943628
0,1	0,1124629	0,8875371
0,15	0,167996	0,832004
0,2	0,2227026	0,7772974
0,25	0,2763264	0,7236736
0,3	0,3286268	0,6713732
0,35	0,3793821	0,6206179
0,4	0,4283924	0,5716076
0,45	0,4754817	0,5245183
0,5	0,5204999	0,4795001
0,55	0,5633234	0,4366766
0,6	0,6038561	0,3961439
0,65	0,6420293	0,3579707
0,7	0,6778012	0,3221988
0,75	0,7111556	0,2888444
0,8	0,742101	0,257899
0,85	0,7706681	0,2293319
0,9	0,7969082	0,2030918
0,95	0,8208908	0,1791092
1	0,8427008	0,1572992
1,1	0,8802051	0,1197949
1,2	0,910314	0,089686

x	Erf(x)	Erfc(x)
1,3	0,9340079	0,0659921
1,4	0,9522851	0,0477149
1,5	0,9661051	0,0338949
1,6	0,9763484	0,0236516
1,7	0,9837905	0,0162095
1,8	0,9890905	0,0109095
1,9	0,9927904	0,0072096
2	0,9953223	0,0046777
2,1	0,9970205	0,0029795
2,2	0,9981372	0,0018628
2,3	0,9988568	0,0011432
2,4	0,9993115	0,0006885
2,5	0,999593	0,000407
2,6	0,999764	0,000236
2,7	0,9998657	0,0001343
2,8	0,999925	0,000075
2,9	0,9999589	0,0000411
3	0,9999779	0,0000221
3,1	0,9999884	0,0000116
3,2	0,999994	0,000006
3,3	0,9999969	0,0000031
3,4	0,9999985	0,0000015
3,5	0,9999993	0,0000007
3,5	0,9999993	0,0000007