

Hassasiyet Modellemesi Yaklaşımı İle Yeni Bir Düzeltme Yöntemi

Funda Kul

Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
fundakaraman@hacettepe.edu.tr

Meral Sucu

Hacettepe Üniversitesi
Aktüerya Bilimleri Bölümü
06800-Beytepe, Ankara, Türkiye
msucu@hacettepe.edu.tr

Özet

Sosyal güvenlik kuruluşları, emeklilik ve sigorta şirketlerinin sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasında prim ve rezervlerin belirlenmesinde hayat tabloları önemli bir rol oynamaktadır. Ölümlülük verisi kullanılarak hesaplanan kaba ölüm hızlarında rastgele dalgalanmalar görülmektedir. Bu rastgele dalgalanmaların düzeltilmesi, aktüerler ve demograflar açısından büyük önem taşımaktadır. Ölüm oranlarındaki dalgalanmaların modellenmesinde düzeltme yöntemleri kullanılmaktadır. Literatürde yaygın olarak kullanılan düzeltme yöntemlerinde popülasyonu oluşturan bireylerin aynı risk faktörlerine (yaş ve cinsiyet gibi) maruz kaldığı varsayılmaktadır. Fakat bireylerin ölümlülüğünü etkileyen başka risk faktörleri de söz konusudur. Bu risk faktörlerinin etkisini dikkate alan modellere hassasiyet modelleri adı verilmektedir.

Bu çalışmada, popülasyondaki heterojenliği dikkate alan hassasiyet modeli yaklaşımı kullanılarak yeni bir düzeltme yaklaşımı oluşturulmuştur. Bu yaklaşım, Türkiye sigortalı kadın ve erkek ölüm verisine uygulanmış ve bulunan sonuçlar, kaba ölüm hızlarının düzeltilmesinde heterojenliğin dikkate alınması gerektiğini göstermiştir.

Anahtar sözcükler: Ölüm hızı; Hassasiyet modeli; Gompertz ölümlülük modeli; Gamma dağılımı, Ters gauss dağılımı; Güç varyans fonksiyonu; Pozitif durağan dağılım; Bileşik Poisson dağılımı.

Abstract

A New Graduation Formula By Frailty Modelling Approach

Life tables play considerable role in the rating and the determination of premium and reserves for social security system, pension and life insurance company insurance products. It is seen that random fluctuations in calculating mortality rates by using mortality data. Graduation of these random fluctuations is very important for actuaries and demographers. For that matter, graduation methods are used for smoothing crude mortality rates. On graduation methods, which are generally used in literature, it is assumed that individuals in a population are under same risk factors (such as age and gender). However, there are another risk factors which effect mortality of individuals. The models which take account of this risk factors are called frailty models.

In this paper, a new graduation approach is constructed by frailty modelling approach which takes care of heterogeneity. This approach is applied to Turkish insured female and male mortality data and these results show that heterogeneity is needed to consider on graduation of crude mortality rates.

Keywords: Mortality rate; Frailty Model; Gompertz mortality model; Gamma distribution; Inverse gaussian distribution; Power variance function; Positive stable distribution; Compound poisson distribution.

1. Giriş

Ölümlülüğün modellenmesi, sosyal güvenlik kurumları, hayat sigortası ve emeklilik şirketleri açısından oldukça önemlidir [11]. Bu kuruluşların ürünlerinin fiyatlandırılmasında, prim ve rezervlerinin belirlenmesinde hayat tablolarından yararlanılmaktadır. Belirli bir popülasyon için yaşlara göre yıllık ölüm oranlarının bulunduğu çizelgelere *hayat tabloları* denilmektedir. Hayat tablolarının oluşturulmasında yaşlar itibariyle ölen kişi sayısının o yaşta yaşayan kişi sayısına oranlanması ile elde edilen kaba ölüm hızları düzgün bir eğriye uymamaktadır. Bu nedenle kaba ölüm hızlarının düzeltilmesinde *düzeltilme (graduation) yöntemleri* kullanılmaktadır [16].

Ölümlülüğün modellenmesi ile ilgili ilk çalışma, 1662 yılında Graund tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, Londra için ilk ölümlülük modeli oluşturulmuştur. İkinci çalışma ise 1693 yılında Halley tarafından yapılmış ve Breslau için ilk hayat tablosu düzenlenmiştir [14].

Ölümlülük yasası olarak nitelendiren ilk önemli çalışma, 1725 yılında De Moivre tarafından yapılmıştır [14]. Bu modelde, maksimum yaşın (w) bilindiği ve (x) yaşındaki bir birey için gelecek yaşam süresini gösteren T rastlantı değişkeninin Tekdüze dağılım gösterdiği varsayımı altında, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{w-x}, \quad 0 < x < w-x \quad (1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. İkinci önemli çalışma 1825 yılında Benjamin Gompertz tarafından yapılmıştır [14]. Bu çalışmada oldukça büyük bir yaş aralığı için (bebek ölümlülüğü ve ileri yaş ölümlülüğü hariç) yaşa göre ölüm hızları üstel bir oran ile artacak şekilde modellenmiştir. Bu modelde yaşlanma süreci, De Moivre modeline göre daha iyi tanımlamakta ve elde edilen ölüm hızları en son yaşa (w) bağlı olmaksızın bulunmaktadır. Bu model, demografi ve diğer disiplinlerde de yaygın olarak kullanılmaktadır. Gompertz modelinde yaşa göre ölüm hızı,

$$\mu_x = Bc^x, \quad 0 < x \quad (2)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada, x yaşı, $B > 0$ temel ölümlülüğü ve $c > 0$ yaşa göre ölümlülükteki sabit artış oranını göstermektedir. 1867 yılında Makeham tarafından yapılan çalışmada, Gompertz modeli ile tanımlanan ölüm hızına, kaza nedeniyle gerçekleşen ölümleri tanımlayan sabit bir parametre (A) eklenerek Makeham modeli oluşturulmuştur. Bu modelde ölüm hızı,

$$\mu_x = A + Bc^x, \quad 0 < x \quad (3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Gompertz ve Makeham modelindeki kullanılan parametrelerin tanım aralıkları şu şekildedir [13]:

$$0,001 < A < 0,003 \quad (4)$$

$$10^{-6} < B < 10^{-6} \quad (5)$$

$$1,08 < c < 1,12 \quad (6)$$

Bu ölümlülük modelleri yanında sadece yaş etkisini dikkate alan birçok model oluşturulmuştur [9, 15,16]. Literatürde yaygın olarak kullanılan bu ölümlülük modellerinde popülasyonu oluşturan bireylerin aynı risk faktörlerine maruz kaldığı, diğer bir deyişle homojen olduğu varsayılmaktadır. Fakat bireylerin ölümlülüğünü etkileyen, yaş ve cinsiyetten başka risk faktörleri de bulunmaktadır. Bu risk faktörlerinin etkisini dikkate alan modellere *hassasiyet (kırılabilirlik, zayıflık- frailty) modelleri* adı verilmektedir. Hassasiyet modellerinin iki temel bileşeni vardır. Bunlar, dayanak ölüm hızı ve hassasiyet teriminin

dağılımıdır. Literatürde kullanılan hassasiyet modelleri incelendiğinde, dayanak ölüm hızı için Gompertz ve Makeham modeli [2, 3]; hassasiyet teriminin dağılımı için; Gamma dağılımı, Lognormal dağılımı, Ters Gauss dağılımı, Pozitif Durağan dağılım ve Güç Varyans fonksiyonu kullanılmaktadır [7].

Hassasiyet modelleri, ilk olarak, Vaupel et al. (1979)'ın çalışmasında kullanılmıştır [19]. Bu çalışmada hassasiyet etkisi teriminin Gamma dağılımına uyduğu varsayılarak modelleme yapılmıştır. Hayat tablolarının oluşturulmasında hassasiyet modellerinin kullanıldığı birçok çalışma bulunmaktadır [1, 4, 5, 6, 17, 20].

Makalenin birinci bölümünde hayat tablosu, ölüm hızı kavramı ile ölümlülük modelleri açıklanmış; ikinci bölümünde hassasiyet modelleri hakkında bilgi verilmiş ve hassasiyet modellemesi yaklaşımıyla elde edilen düzeltme yöntemi tanıtılmıştır. Çalışmada kullanılan veri ve parametre tahmin yöntemi üçüncü bölümde verilmiştir. Dördüncü bölümde Türkiye kadın ve erkek sigortalı ölüm verisi için elde edilen parametre tahminleri ve uyum iyiliği testi sonuçları elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

2. Hassasiyet Modelleri

2.1. Giriş

Ölümlülük modellemesinde, genel olarak, yaş ve cinsiyet açıklayıcı değişkenleri kullanılmakta, ancak sağlık ve ölümlülük istatistikleri incelendiğinde, ölümlülüğü etkileyen başka açıklayıcı değişkenlerin de bulunduğu görülmektedir. Bu açıklayıcı değişkenlerin ölümlülük modeline etkisi, ilgili değişkene ilişkin verinin bulunmaması veya eksik olması nedeniyle dikkate alınmamaktadır. Bu etkinin dikkate alınmaması, literatürde yaygın olarak kullanılan ölümlülük modelleri için homojenlik varsayımının sağlanmamasına neden olmaktadır. Homojenlik varsayımının sağlanmaması, bazı beklenmedik sonuçlara neden olabilir [3].

Geleneksel ölümlülük modellerinde homojenlik varsayımının sağlanmaması nedeniyle, ölümlülük modellemesinde dikkate alınmayan açıklayıcı değişkenlerin etkisini dikkate alan yeni modeller oluşturulmuştur. Bu modellerden kullanılan en yaygın model, hassasiyet modelleridir [7]. Hassasiyet modeli, ilk olarak Vaupel et al. (1979) çalışmasında tanımlanmıştır [19].

Hassasiyet modellerinde, dikkate alınmayan açıklayıcı değişkenlerin etkisi olarak tanımlanan ve yaştan bağımsız olan hassasiyet teriminin, rastlantı değişkeninin dayanak ölüm hızını çarpımsal olarak etkilediği varsayılmaktadır. Bu modellerde, dikkate alınmayan açıklayıcı değişkenlerin etkisinin bilindiği varsayımı altında, gözlemlerin birbirinden bağımsız olduğu düşünülmektedir.

Hassasiyet modellerinde popülasyonu oluşturan bireylerin farklı hassasiyet değerlerine sahip olduğu ve hassasiyet seviyesi yüksek olan bireyin, hassasiyeti daha düşük olan bireye göre, popülasyondan daha erken ayrılacağı varsayılmaktadır. Böylece zaman veya yaş ilerledikçe hassas bireylerin sistemden erken ayrılması ve daha güçlü bireylerin sistemde kalması nedeniyle popülasyonun ortalama ölüm hızı azalacaktır [7].

Z hassasiyet seviyesinde ve (0) yaşındaki birey için ölüm hızı, $\mu_0(t, Z)$, Taylor serisine açıldığında,

$$\mu_0(t, Z) = \mu_0(t, 0) + \mu_0'(t, 0) + o(Z)$$

olarak yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki son terim, artık terimi olarak tanımlanmakta ve birinci dereceden büyük dereceler için Taylor açılımını ifade etmektedir. Bu terimin etkisi ihmal edildiğinde, bireysel ölüm hızı fonksiyonu,

$$\mu_0(t, Z) \approx \mu_0(t, 0) + Z\mu_0'(t, 0)$$

şeklinde olmaktadır. $Z=0$ hassasiyet seviyesindeki bireylerin ölümlülüğünün sıfır olduğu varsayıldığında,

$$\begin{aligned}\mu_0(t, Z) &\approx Z \mu_0'(t, 0) \approx Z \frac{d\mu_0(t, Z)}{dZ} \Big|_{Z=0} \approx Z \mu_0(t) \\ \mu_0(t, Z) &= Z \mu_0(t)\end{aligned}\quad (7)$$

olarak elde edilmektedir [10]. Burada,

$\mu_0(t, Z)$: Bireysel ölüm hızını

$\mu_0(t)$: (0) yaş için dayanak ölüm hızını,

Z : Hassasiyet terimini

göstermektedir. Z hassasiyet seviyesi bilindiğinde koşullu yaşam fonksiyonu,

$$S(t|Z) = \exp\left(-\int_0^t \mu_0(s, Z) ds\right) = \exp\left(-Z \int_0^t \mu_0(s) ds\right) = \exp(-ZH_0(t)) \quad (8)$$

şeklinde elde edilir. $f_0(t|z) = S(t|z)\mu_t(z)$ bilindiği varsayımı altında olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_0(t, z) = e^{-zH_0(t)} z \mu_t = -\frac{d}{dt} S(t|z) \quad (9)$$

olur. Buradan T ve Z rastlantı değişkenlerinin çoklu ölüm hızı fonksiyonu,

$$\mu_0(t, z) = f_0(t, z) g_0(z) = S(t|z) \mu_t(z) g_0(z) \quad (10)$$

şeklinde dir. Hassasiyet modellerinde, (0) yaşındaki bir popülasyon için ortalama yaşam fonksiyonu, bireysel yaşam fonksiyonlarının ortalamasına eşittir. Sonuç olarak, (0) yaşındaki bireylerden (t) yaşına ulaşanların oranı,

$$\bar{S}(t) = \int_0^{\infty} S(t|z) g_0(z) dz \quad (11)$$

şeklinde dir. Popülasyonun (x) yaşındaki bireylerden oluştuğu düşünüldüğünde, hassasiyet modellerinde (0) ve (x) yaşındaki bireylerin hassasiyet etkileri arasında,

$$Z_x = Z_0 | T_0 > x$$

ilişisinin bulunduğu, dolayısıyla hassasiyet etkisinin tüm yaşlar için aynı olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım altında (x) yaşındaki birey için hassasiyet rastlantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned}g_x(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Pr\{z < Z_x \leq z + \Delta z\}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Pr\{T_0 > x | z < Z_x \leq z + \Delta z\} \Pr\{z < Z_x \leq z + \Delta z\}}{\Delta z \Pr\{T_0 > x\}}\end{aligned}$$

$$= \frac{S(x|z)g_0(z)}{\bar{S}(x)} = \frac{S(x|z)g_0(z)}{\int_0^\infty S(x|z)g_0(z)dz} \quad (12)$$

olarak bulunur. Buna bağlı olarak, (x) yaşındaki bireylerden oluşan popülasyonun ölüm hızı da aşağıdaki gibidir [18].

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_x(z) &= \frac{\int_0^\infty \mu_x(z)S(x|z)g_0(z)dz}{\int_0^\infty S(x|z)g_0(z)dz} = \frac{\int_0^\infty z \mu_x S(x|z)g_0(z)dz}{\int_0^\infty S(x|z)g_0(z)dz} = \frac{h_x \int_0^\infty z S(x|z)g_0(z)dz}{\int_0^\infty S(x|z)g_0(z)dz} \\ &= \frac{\mu_x \int_0^\infty z \bar{S}(x)g_x(z)dz}{\bar{S}(x)} = \frac{\mu_x(z) \bar{S}(x) \int_0^\infty z g_x(z)dz}{\bar{S}(x)} = \mu_x \int_0^\infty z g_x(z)dz = \bar{z}_x \mu_x \end{aligned}$$

$$\bar{\mu}_x(z) = \bar{z}_x \mu_x \quad (13)$$

Dayanak ölüm hızı, genel olarak, literatürde yaygın olarak kullanılan ölümlülük modellerinden elde edilmektedir [2,3]. Hassasiyet terimi dağılımının ise; beklenen değeri bir, varyansı sonlu ve sağa doğru uzun kuyruklu bir dağılım olması beklenmektedir[10]. Hassasiyet terimi dağılımının varyansı, heterojenliğin ölçüm değeri olarak tanımlanmaktadır. Hassasiyet terimi dağılımının varyansı büyüdükçe heterojenlik de artmaktadır. Bu çalışmada dayanak ölüm hızı için Gompertz ve Makeham ölümlülük modelleri kullanılacaktır. Hassasiyet teriminin dağılımı ise, literatürde yaygın olarak kullanılan Gamma dağılımı, Pozitif Durağan dağılım, Ters Gauss dağılımı, Güç Varyans Fonksiyonu dağılımı, Bileşik Poisson dağılımı ve Lognormal dağılımı ile tanımlanacaktır.

2.2. Hassasiyet modeli yaklaşımıyla yeni düzeltme yaklaşımı

Dayanak ölüm hızı olarak Makeham ölümlülük modeli,

$$\mu_x = \alpha + b e^{px}, \quad x > 0$$

şeklinde yeniden düzenlendiğinde, z hassasiyet etki seviyesinde bulunan (x) yaşındaki popülasyonun ölüm hızı,

$$\mu_x(z) = \alpha + \frac{e^{-g+px}}{(1 + e^{-s+px})^\psi} \quad (14)$$

şeklinde elde edilmektedir. α parametresinin sıfır değerini alması durumunda, dayanak ölüm hızı Gompertz modeli ve α parametresinin pozitif değer alması durumunda dayanak ölüm hızı Makeham modeline uymaktadır. Eşitlik (14)'te ψ ve α parametrelerinin aldığı değerlere göre hassasiyet modeli tanımları Çizelge 1'de verilmiştir.

Çizelge 1. Hassasiyet Modelleri

Model	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$
$\psi = 1$	Gompertz / Gamma	Makeham / Gamma
$\psi = 1/2$	Gompertz / Ters Gauss	Makeham / Ters Gauss
$0 \leq \psi < 1$	Gompertz / Pozitif Durağan	Makeham / Pozitif Durağan
$\psi > 1$	Gompertz / Bileşik Poisson	Makeham / Bileşik Poisson
$\psi < 1$	Gompertz / Güç Varyans Fonksiyonu	Makeham / Güç Varyans Fonksiyonu

Hassasiyet terimi dağılımının değişmesi durumunda (13) eşitliğinden (14) eşitliğine geçiş durumları Ek 1’de verilmiştir.

3. Uygulama

Bu bölümde, çalışmada kullanılan veri kaynağı tanıtılacak, bu veriden elde edilen ölüm sayıları ve riske maruz birim sayıları ile yaş ve cinsiyet ayrımında kaba ölüm oranları elde edilecek ve Kesim 2.2’de geliştirilen düzeltme yöntemiyle parametre tahmini için kullanılacak varsayımlar verilecektir.

3.1. Veri kaynağı

Bu çalışmada, Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesindeki (2010) veri kullanılmıştır [18].

Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi (2010)’nde Türkiye’de faaliyet gösteren beş büyük hayat sigortası şirketinin verisinden elde edilen riske maruz sigortalı ve ölen sigortalı sayıları kullanılmıştır. Bu sayılar, 1 Ocak 2004 tarihinden 31 Aralık 2008 tarihine kadar düzenlenmiş toplam 13.332.687 sigorta poliçesinden elde edilmiştir.

Sigortalı veri kümesindeki eksik ve hatalı veri sorununun ortadan kaldırılabilmesi için ilk olarak veri kaynağına geri dönüş yapılarak yeniden sorgulama yapılmıştır. Bu sorgulama sonucunda düzeltilemeyen gözlemler sigortalı veri kümesinden çıkarılmıştır. Aynı bireylerin birden fazla poliçesi olması durumunda tekrarlar hatasının ortadan kaldırılması için sigortalıların T.C. Kimlik Numaraları’na göre sorgulama yapılmış ve birden fazla poliçesi olan sigortalıların en uzun vadeli sigorta poliçesi dikkate alınmıştır. Eksik ve hatalı gözlemler ile tekrarlar hataları giderildiğinde veri kümesinde 3.803.022 erkek sigortalı birey ve 999.716 kadın sigortalı birey kalmıştır. Bu dönem içinde toplam ölen kişi sayısı da 16.726 olarak elde edilmiştir.

3.2. Yaşlara göre kaba ölüm hızlarının elde edilmesi

Bu çalışmada, ölümlüğün yıl içinde tekdüze dağıldığı varsayılarak, (x) yaşındaki bireyler için kaba ölüm hızı,

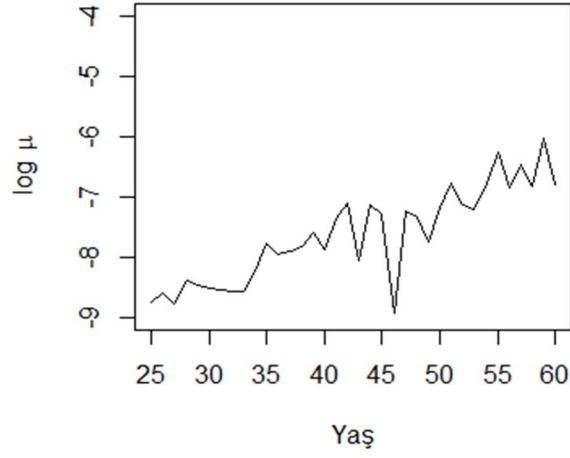
$$\mu_x = \frac{D_x}{E_x - 0,5D_x} \quad (15)$$

şeklinde elde edilmiştir [4, 8]. Burada,

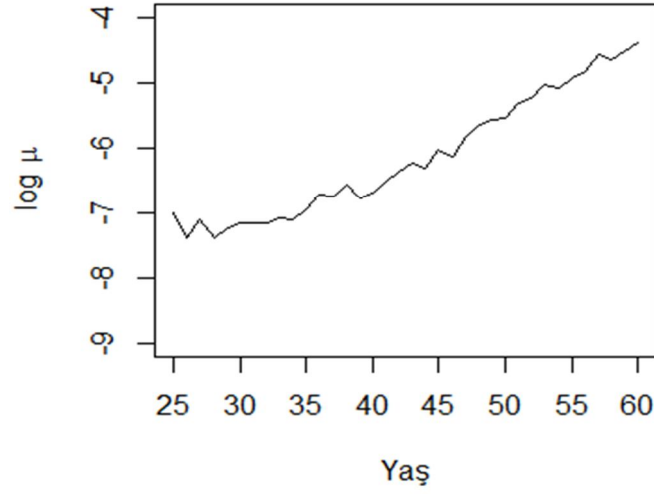
D_x : (x) yaşında ölen kişi sayısını,

E_x : (x) yaşında riske maruz kalan kişi sayısını

göstermektedir. Yaşlara göre riske maruz kalan kişi sayısı ise, her takvim yılı için veri kümesindeki bireylerin her yıl gözlem altında kaldıkları tam süre hesaplanarak toplanmış ve dört yılın ortalaması alınmıştır. (25)-(60) yaş aralığındaki kadın ve erkek sigortalılar için Eşitlik (15)’den bulunan yaşa göre ölüm hızları, sırasıyla, Şekil 1 ve Şekil 2’de verilmiştir :



Şekil 1. Kadın sigortalılar için kaba ölüm hızları



Şekil 2. Erkek sigortalılar için kaba ölüm hızları

Şekil 1'e göre, kadın sigortalıların (25) yaşından (40) yaşına kadar ölüm hızları hafif bir artış göstermektedir. (40) yaşından (60) yaşına kadar ise, hem ölüm hızları fazla dalgalanmış hem de ölümlülük eğilimi artmıştır. Şekil 2 incelendiğinde ise, erkek sigortalıların ölüm hızlarının, kadın sigortalıların ölüm hızlarına göre daha durağan olduğu, ancak (45) yaşından sonra ölümlülük eğiliminin kadın sigortalılara göre daha hızlı arttığı görülmektedir.

3.3. Parametre tahmini

Çalışmada, yaşlara göre ölüm sayısının, literatürde de yaygın olarak kabul edildiği üzere, Poisson dağılımına uyduğu varsayılmıştır [8]. Makeham ölümlülük modelinde kaza nedeniyle ölümlülüğü tanımlayan sabit terimin bilindiği varsayıldığında, ölüm hızlarının logaritmik dönüşümü yapılarak doğrusal olmayan kısmı için Taylor seri açılımı kullanıldığında, düzeltme yöntemi [12],

$$\begin{aligned} \ln(E_x \mu_x - \alpha) &= \ln \left(E_x \frac{\exp(-g + px)}{(1 + \exp(-s + px))^\psi} \right) \\ &= \ln(E_x) - g + px - \psi \ln(1 + \exp(-s + px)) \\ &= \ln(E_x) - g + px - \psi(c_x + S k_x + \gamma v_x) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilmektedir. Burada,

$$c_x = \ln(1 + \exp(-s + px))$$

$$k_x = \exp(-s + px)(1 + \exp(-s + px))$$

$$v_x = x k_x$$

$$S = s - s_0$$

$$\gamma = p - p_0$$

şeklinde tanımlanmıştır [11]. Bu düzeltme yöntemine göre parametre tahmininde kullanılacak En Küçük Kareler Yönteminin algoritması MATLAB programlama dili ile yazılmıştır [11].

4. Sonuçlar ve Yorum

4.1. Düzeltmeden önceki kaba ölüm hızları

Kadın ve erkek sigortalıların ölüm hızları incelenirken tek ortak risk faktörü yaş olarak alındığından, yaşın ölüm hızlarını açıklama oranlarının da incelenmesi gerekmektedir. Bu inceleme, iki sıralı değişken arasındaki ilişki derecesinin ölçümünü veren, Spearman'ın sıra korelasyon katsayısı ile yapılmaktadır.

Kadın sigortalılar için Spearman'ın sıra korelasyon katsayısı 0,8736 ve erkek sigortalı bireyler için Spearman'ın sıra korelasyon katsayısı 0,9802 olarak elde edilmiştir. Diğer bir deyişle, kadın sigortalıların ölüm hızlarındaki değişimi, yaş faktörü % 87,36 oranında ve erkek sigortalıların ölüm hızlarındaki değişimi yaş faktörü % 98,02 oranında açıklayabilmektedir. Bu oranlar kabul edilebilir olduğundan sadece yaş faktörü dikkate alınarak ölüm hızlarına ilişkin model araştırması yapılabilir.

4.2. Kadın sigortalı ölüm hızlarının incelenmesi

Yaşlara göre kadın sigortalıların kaba ölüm hızlarının, dayanak ölüm hızının Makeham modeline uyduğu varsayımı altında Kesim 3.3'te verilen yazılım çalıştırıldığında belirtme katsayısının 0,50'nin altında kaldığı görülmüştür. Dayanak ölüm hızının Gompertz modeline uyduğu varsayıldığında ise belirtme katsayısının aldığı en yüksek değer 0,7435 olmaktadır.

Kadın sigortalıların kaba ölüm hızları için en uygun modelin Gompertz/Ters Gauss hassasiyet modeli ($\psi = 0,50$ ve $\alpha = 0$) olduğu görülmüştür. Gompertz modeli ve Gompertz/Ters Gauss hassasiyet modeline göre elde edilen parametre ve standart sapma değerleri Çizelge 2’de verilmiştir.

Çizelge 2. Sigortalı kadın ölüm hızları için parametre tahminleri

Parametreler	Gompertz	Gompertz-Ters Gauss
ψ	0,00	0,50
β	0,000030 (0,123542)	0,000510 (0,115704)
c	1,067242 (0,005109)	1,129505 (0,004922)
Hassasiyet parametresi	-	1000,00 (0,021602)
Belirtme Katsayısı	0,7435	0,8792

Sigortalı kadın kaba ölüm hızlarında dalgalanmanın fazla olması nedeniyle, hassasiyet terimi dağılımının varyansı yüksek olmaktadır. Çizelge 2’deki parametre değerleri ve standart sapma değerleri incelendiğinde parametre tahminlerinin %95 güven düzeyinde anlamlı olduğu görülmektedir.

4.3. Erkek sigortalı ölüm hızlarının incelenmesi

Yaşlara göre sigortalı erkeklerin kaba ölüm hızlarının dayanak ölüm hızının Makeham modeline uyduğu varsayımı altında Kesim 3.3’te verilen yazılım çalıştırıldığında belirtme katsayısının 0,60’ın altında olduğu görülmüştür. Dayanak ölüm hızı olarak Gompertz modeli kullanıldığında ise belirtme katsayısının aldığı en yüksek değer 0,9902 olmaktadır.

Sigortalı erkek kaba ölüm hızları için en uygun modelin Gompertz/Gamma hassasiyet modeli ($\psi = 1$ ve $\alpha = 0$ olduğu durum), olduğu görülmüştür. Gompertz modeli ve Gompertz/Gamma hassasiyet modeline göre elde edilen parametre ve standart sapma değerleri Çizelge 3’te verilmiştir.

Çizelge 3. Sigortalı erkek ölüm hızları için parametre tahminleri

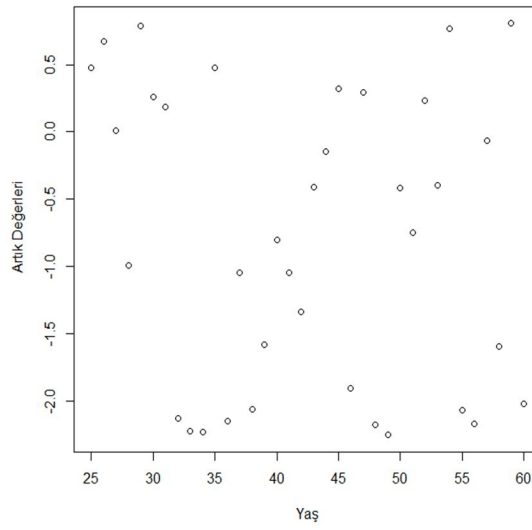
Parametreler	Gompertz	Gompertz-Gamma
ψ	0	1
β	0,000155 (0,124293)	0,000443 (0,104255)
c	1,067255 (0,006107)	1,098022 (0,005701)
Hassasiyet parametresi	-	1,507983 (0,021602)
Belirtme Katsayısı	0,7628	0,9902

Çizelge 3'teki parametre değerleri ve standart sapma değerleri incelendiğinde parametre tahminlerinin %95 güven düzeyinde anlamlı olduğu görülmektedir.

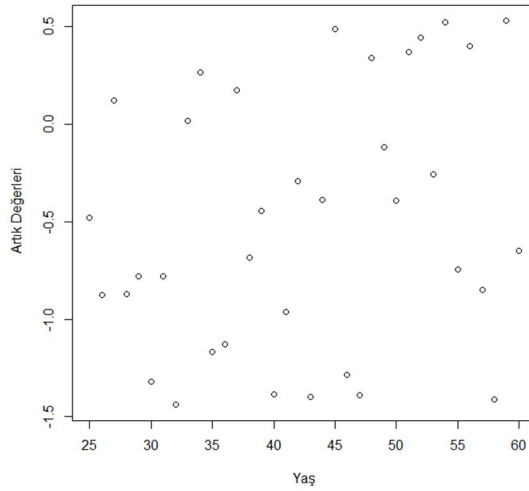
Kadın ve erkek sigortalı kaba ölüm hızları için düzeltilmiş değerler Ek 2'de verilmiştir.

4.4. Uyum iyiliği testleri

Düzeltilme işlemi yapıldıktan sonra kaba ölüm hızları ile geliştirilen formüle göre elde edilen ölüm hızları arasındaki uyumun test edilmesi gerekmektedir. Düzeltilme yöntemlerinde modelin geçerli olup olmadığını test etmek amacıyla artık değerleri incelenmektedir. Sigortalı kadın ölüm hızları için Gompertz/Ters Gauss hassasiyet modeline göre standartlaştırılmış artık değerleri Şekil 3'te ve sigortalı erkek ölüm hızları için Gompertz/Gamma hassasiyet modeline göre standartlaştırılmış artık değerleri Şekil 4'te verilmiştir.



Şekil 3. Sigortalı Kadın- Gompertz / Ters Gauss hassasiyet modeli için artık değerleri



Şekil 4. Sigortalı Erkek- Gompertz /Gamma modeli hassasiyet için artık değerleri

Ölüm hızlarının düzeltilmesinde artıklar arasında korelasyon olması istenmeyen bir durumdur. Şekil 3 ve Şekil 4 incelendiğinde, artıkların rastgele dağıldığı ve artıklar arasında korelasyon olmadığı görülmektedir.

Kadın ve erkek sigortalı bireyler için standartlaştırılmış artık değerlerinin en küçük, en büyük ve ortanca değerleri Çizelge 4’te verilmiştir.

Çizelge 4. Standartlaştırılmış artıklar için bazı karakteristikler

Sigortalı Türü	Minimum değer	Ortanca değer	Maksimum değer
Erkek	-1,52312	0,03264	0,56248
Kadın	-2,49561	0,12459	0,96254

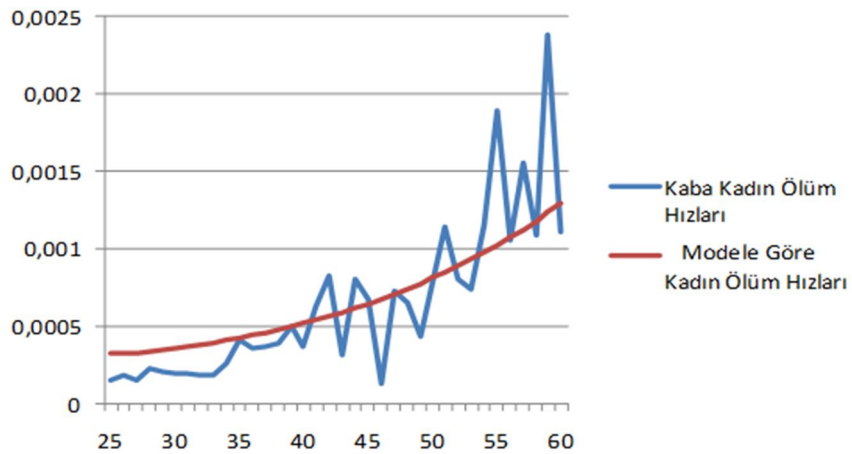
Kadın ve erkek sigortalı ölüm hızları için standartlaştırılmış artık değerleri incelendiğinde tüm değerlerin (-3,+3) aralığında yer aldığı görülmektedir. Sonuç olarak, kadın ve erkek sigortalı ölüm hızları hassasiyet modelleri kullanılarak modellendiğinde aykırı değerler bulunmadığı görülmüştür.

Düzeltilme yönteminde uyum iyiliğinin test edilmesi amacıyla kullanılan diğer iki önemli test, Wilcoxon’ın İşaret Sıralama Testi ve Serisel Korelasyon Testidir. Wilcoxon İşaret Sıralama Testi ile, ölüm hızlarının ortanca değerleri arasında fark olup olmadığı ve Serisel Korelasyon Testi ile artıklar arasında otokorelasyon olup olmadığı test edilmektedir. Kadın ve erkek sigortalı ölüm hızları için bu test değerleri Çizelge 5’te verilmiştir.

Çizelge 5. Artıklar için test değerleri

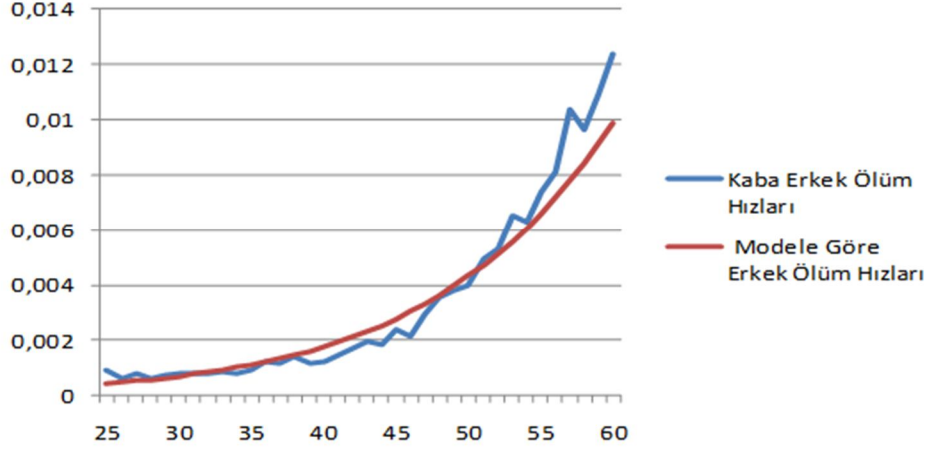
Test	Kadın	Erkek	Test değeri
Wilcoxon işaret sıralama testi	-1,1469	0,09432	2,575 değerinden küçük olmalı
Serisel korelasyon testi	--0,0364	0,0103	Sıfır değerine yakın olmalı

Kadın sigortalıların ölüm hızları için uyum iyiliği testleri incelendiğinde, Gompertz/Ters Gauss hassasiyet modelinin uygun olduğu kabul edilebilir ve bu modele göre tahmin edilen ölüm hızları Şekil 5’te verilmiştir.



Şekil 5. Sigortalı kadın ölüm hızları

Erkek sigortalıların ölüm hızları için uyum iyiliği testleri incelendiğinde, Gompertz/Gamma hassasiyet modelinin uygun olduğu ve bu model ile tahmin edilen ölüm hızları Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 6. Sigortalı Erkek ölüm hızları

5. Tartışma ve Öneriler

Sigortalı portföyündeki risk sınıfları için ölümlülüğün farklı hassasiyet terimi seviyelerine göre tanımlanabilmesi durumunda hassasiyet modelleri, sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasında kullanılabilir [18].

Hassasiyet modelleri ile modellenen ölüm hızlarının, tüm yaşam süresi boyunca bireylerin hassasiyet seviyelerinin sabit olması, bireyler arasındaki ölümlülük eğilimi farklılığını açıklamaya yeterli olmayabilir. Yaş ve cinsiyet dışındaki diğer açıklayıcı değişkenlerin de (psikolojik değişimler, sosyolojik değişimler ve zaman faktöründeki değişim gibi), hassasiyet terimi üzerindeki etkisinin hesaba katıldığı modeller de oluşturulabilir.

Hassasiyet modellerinde her bir gözlemin sisteme girdiği anda hassasiyet seviyesinin belirlendiği ve bu seviyenin sabit kaldığı varsayımının doğru olmadığı insan popülasyonundaki yaşlanma sürecinden de görülmektedir. Stokastik süreçler kullanılarak, hassasiyet seviyesinin zaman içerisindeki bu değişiminin dikkate alındığı hassasiyet modelleri de oluşturulabilir.

Kaynaklar

- [1] Aim S., Fulla S., Laurent J.P., 2005, Mortality Fluctuations Modelling With A Shared Frailty Approach, *Paris Actuarial Congree*, France.
- [2] Butt Z., Haberman S., 2002, Application Of Frailty-Based Mortality Models To Insurance Data, *Actuarial Research Paper No. 142*, Department of Actuarial Science & Statistics , City University, London.
- [3] Butt Z., Haberman S., 2004, Application of Frailty-Based Mortality Models Using Generalized Linear Models, *ASTIN Bulletin*, Vol 34, Issue 1, 175-197.
- [4] Congdon P., 1993, Statistical Graduation In Local Demographic Analysis And Projection, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A, Vol. 156, 237-270.
- [5] Congdon P., 1994, Analyzing Mortality In London: Life Tables With Frailty, *The Statistician*, Vol. 43, 277-308.
- [6] Congdon P., 1995, Modelling Frailty In Area Mortality, *Statistics in Medicine*, Vol 14, 1859-1874.
- [7] Duchateau L., Janssen P., 2008, The Frailty Model, *Statistics for Biology and Health Series*, Springer.
- [8] Haberman S., Renshaw A.E., 1996, Generalized Linear Models And Actuarial Science, *The Statistician*, Vol 45, No:4, 407-436.
- [9] Heligman L., Pollard J.H., 1980, The Age Pattern Of Mortality, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol 107, 49-80.
- [10] Karim M.E., 2008, Frailty Models, *Institute of statistical research and training*, University of Dhaka, Dhaka, Bangladesh.
- [11] Kul F., Sucu M., 2011, Gözlemlenemeyen Risk Faktörlerinin Ölümlülük Üzerindeki Etkisi, *Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, Yüksek Lisans Tezi.
- [12] Makeham W.M., 1867, On the law of mortality, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol 8, 301-310.
- [13] Neill A., 1983, Life Contingencies, *William Heinemann*, London.
- [14] Olivieri A., 2006, Heterogeneity in survival models : Application to pensions and life annuities, *University of Parma*, Italy.
- [15] Perks W., 1932, On some experiments on the graduation of mortality statistics, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol 63, 12-40.
- [16] Renshaw A.E., 1991, Actuarial graduation practice and generalized linear and non-linear models, *Journal of the Institute of Actuaries*, Vol. 118, 295-312.
- [17] Su S., Sherris M., 2012, Heterogeneity of Australian Population Mortality and Implications for a Viable Life Annuity Market, *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 51, Issue 2, 322-332.
- [18] Sigorta Bilgi Merkezi, 2010, Türkiye Hayat ve Hayat Annüite Tablolarının Oluşturulması Projesi, *Hazine Müsteşarlığı*.
- [19] Vaupel J.W., Manton K.G., Stallard E., 1979, The impact of heterogeneity in individual frailty on the dynamics of mortality, *Demography*, Vol 16, 439-454.
- [20] Wang S.S., Brown R.L., 1998, A frailty model for projection of human mortality improvement, *Journal of Actuarial Practice*, Vol. 6, 221-241.

EK 1.

Gompertz/Gamma Hassasiyet Modeli

$$\begin{aligned} \mu_x &= \left(\frac{b \exp(px)}{1 + \theta \frac{b}{p} (\exp(px) - 1)} \right) \left(\frac{1 - \theta \frac{b}{p}}{1 - \theta \frac{b}{p}} \right) = \frac{\left(\frac{b}{1 - \theta \frac{b}{p}} \right) b \exp(px)}{\left(1 + \frac{\left(\frac{\theta b}{p} \right)}{\left(\frac{p - \theta b}{p} \right)} \exp(px) \right)} \\ &= \frac{\frac{b p}{(p - \theta b)} b \exp(px)}{\left(1 + \frac{\left(\frac{\theta b}{p} \right)}{\left(\frac{p - \theta b}{p} \right)} \exp(px) \right)} = \frac{\frac{b p}{(p - \theta b)} b \exp(px)}{\left(1 + \left(\frac{\theta b}{p - \theta b} \right) \exp(px) \right)} \\ &= \frac{\exp(-g + p x)}{1 + \exp(-s + p x)} \end{aligned}$$

$$\exp(-g) = \frac{b p}{(p - \theta b)}$$

$$\exp(-s) = \frac{\theta b}{p - \theta b}$$

Gompertz/Ters Gauss Hassasiyet Modeli

$$\mu_x = \frac{b \exp(px)}{\left(1 + \frac{2b}{p\alpha} (\exp(px) - 1)\right)^{1/2}} = \frac{b \exp(px)}{\left(1 + \frac{2b}{p\alpha} \exp(px) - \frac{2b}{p\alpha}\right)^{1/2}}$$

$$= \left(\frac{b \exp(px)}{\left(1 + \frac{2b}{p\alpha} \exp(px) - \frac{2b}{p\alpha}\right)^{1/2}} \right) \frac{\sqrt{1 - \frac{2b}{p\alpha}}}{\sqrt{1 - \frac{2b}{p\alpha}}}$$

$$= \frac{b \exp(px) / \sqrt{1 - \frac{2b}{p\alpha}}}{\left(\left(1 + \frac{2b}{p\alpha} \exp(px) - \frac{2b}{p\alpha}\right) / \left(1 - \frac{2b}{p\alpha}\right) \right)^{1/2}}$$

$$= \frac{\frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2b}{p\alpha}}} \exp(px)}{\left(\left(1 + \frac{2b}{p\alpha} \exp(px) - \frac{2b}{p\alpha}\right) \right)^{1/2}} = \frac{\exp(-g + px)}{(1 + \exp(-s + px))^{1/2}}$$

$$\exp(-g) = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{2b}{p\alpha}}}, \quad \frac{2b}{p\alpha} < 1$$

$$\exp(-s) = \frac{2b}{p\alpha - 2b}$$

Gompertz / Pozitif Durağan Dağılım Hassasiyet Modeli

$$\begin{aligned} \mu_x &= \theta b \exp(px) \left[\frac{b}{p} (\exp(px) - 1) \right]^{0-1} = \frac{\theta b \exp(px)}{\left[\frac{b}{p} (\exp(px) - 1) \right]^{1-\theta}} \\ &= \left(\frac{\theta b \exp(px)}{\left[\frac{b}{p} (\exp(px) - 1) \right]^{1-\theta}} \right) \frac{(-b/p)^{1-\theta}}{(-b/p)^{1-\theta}} \\ &= \frac{(\theta b / (-b/p)^{1-\theta}) \exp(px)}{\left[\left(\frac{b}{p} (\exp(px) - 1) \right) / \left(-\frac{b}{p} \right) \right]^{1-\theta}} \\ &= \frac{(\theta b / (-b/p)^{1-\theta}) \exp(px)}{[1 - \exp(px)]^{1-\theta}} \\ &= \frac{\exp(-g + px)}{(1 + \exp(-s + px))^{1-\theta}} \end{aligned}$$

$$\exp(-g) = \theta b / (-b/p)^{1-\theta}, \quad -p < b$$

$$\exp(-s) = -1$$

$$\theta \approx (0,1]$$

Gompertz / Bileşik Poisson Dağılım Hassasiyet Modeli

$$\mu_x = \frac{kb \exp(px)}{\left(\lambda + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} \exp(px)\right)^{1-\gamma}} = \left[\frac{kb \exp(px)}{\left(\lambda + \frac{b}{p} - \frac{b}{p} \exp(px)\right)^{1-\gamma}} \right] \frac{\left(\lambda + \frac{b}{p}\right)^{1-\gamma}}{\left(\lambda + \frac{b}{p}\right)^{1-\gamma}}$$

$$= \frac{kb \exp(px) \left(\lambda + \frac{b}{p}\right)^{\gamma-1}}{\left(1 + \left(\frac{-b}{\lambda p + b}\right) \exp(px)\right)^{1-\gamma}} = \frac{\exp(-g + px)}{\left(1 + \exp(-s + px)\right)^{1-\gamma}}$$

$$\exp(-g) = kb \left(\lambda + \frac{b}{p}\right)^{\gamma-1}, \lambda + \frac{b}{p} > 0$$

$$\exp(-s) = \frac{-b}{\lambda p + b}$$

$$\gamma < 0$$

Gompertz / Güç Varyans Fonksiyonu Hassasiyet Modeli

$$\begin{aligned} \mu_x &= \frac{b \exp(px)}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{1-\gamma} \frac{b}{p} (\exp(px) - 1)\right)^{1-\gamma}} = \left[\frac{b \exp(px)}{\left(1 + \frac{\sigma^2}{1-\gamma} \frac{b}{p} (\exp(px) - 1)\right)^{1-\gamma}} \right] \left[\frac{\left(1 - \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}\right)^{1-\gamma}}{\left(1 - \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}\right)^{1-\gamma}} \right] \\ &= \frac{b \left(1 - \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}\right)^{\gamma-1} \exp(px)}{\left(\left(1 + \frac{\sigma^2}{1-\gamma} \frac{b}{p} (\exp(px) - 1)\right) / \left(1 - \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}\right)\right)^{1-\gamma}} \\ &= \frac{b \left(1 - \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}\right)^{\gamma-1} \exp(px)}{\left(1 + \left(\frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p - \sigma^2 b}\right) \exp(px)\right)^{1-\gamma}} \\ &= \frac{\exp(-g + px)}{(1 + \exp(-s + px))^{1-\gamma}} \end{aligned}$$

$$\exp(-g) = b \left(1 - \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}\right)^{\gamma-1}, 1 > \frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p}$$

$$\exp(-s) = \left(\frac{\sigma^2 b}{(1-\gamma)p - \sigma^2 b}\right)$$

$$\gamma > 0$$

EK 2.

Yaş	Kadın Sigortalı İçin Ölüm Hızı	Erkek Sigortalı İçin Ölüm Hızı
25	0,000182	0,000443
26	0,000188	0,000487
27	0,000196	0,000534
28	0,000206	0,000586
29	0,000216	0,000643
30	0,000228	0,000705
31	0,000241	0,000773
32	0,000256	0,000848
33	0,000272	0,000930
34	0,000289	0,001019
35	0,000308	0,001117
36	0,000329	0,001225
37	0,000351	0,001342
38	0,000375	0,001471
39	0,000401	0,001611
40	0,000429	0,001765
41	0,000459	0,001932
42	0,000492	0,002115
43	0,000527	0,002315
44	0,000564	0,002532
45	0,000605	0,002769
46	0,000648	0,003028
47	0,000695	0,003309
48	0,000745	0,003614
49	0,000799	0,003946
50	0,000857	0,004696
51	0,000920	0,005118
52	0,000986	0,005575
53	0,001058	0,006068
54	0,001136	0,006599
55	0,001219	0,007171
56	0,001308	0,007786
57	0,001403	0,008445
58	0,001506	0,009151
59	0,001616	0,009905
60	0,001735	0,010851