



---

**Makale / Research Paper**

---

**Doğrusal Olmayan Malzemeler için Sonlu Eleman Çözümündeki  
Dönüşüm Bozukluklarının Giderilmesi**

Mustafa YAVUZ<sup>1a\*</sup>, Semih KÜÇÜKARSLAN<sup>2b</sup>

İstanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, İstanbul/TÜRKİYE  
[\\*mustafayavuz@itu.edu.tr](mailto:mustafayavuz@itu.edu.tr)

Received/Geliş: 27.04.2020

Accepted/Kabul: 17.06.2020

**Öz:** Sonlu elemanlar yönteminde fiziksel eleman ile mastır eleman arasında yapılan koordinat dönüşümünde meydana gelen dönüşüm bozuklukları, mastır elemanın kenar noktalarının fiziksel elemandaki gibi dönüştürülmesiyle giderilir. Bu çalışmada, mastır elemanın kenar noktaları ayarlanabilir biçimde geliştirilmiş serendip elemanlar kullanılarak elde edilen sonlu eleman algoritması sunulmaktadır. Kurulan bu algoritmada, malzeme davranışını içerecek şekilde von Mises akma kriteri ve elastoplastik gerilme-birim uzama ilişkisi mevcuttur. Önerilen bu algoritma, doğrusal olmayan sonlu eleman analizi olup, örneklerle onaması yapılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sonlu Eleman Analizi; plastisite; doğrusal olmayan davranış; dönüşüm bozuklukları.

---

**For Nonlinear Materials, Eliminations of Node Mapping Distortions  
in Finite Element Solutions**

**Abstract:** In the finite element method, the mapping distortions occurred in the transformation of coordinates of physical elements to the master elements can be fixed by adjusting the side nodes of the master element similar to physical element. In this study, a finite element algorithm is presented with improved serendipity element by adjusting the side nodes of master element. In this developed algorithm, von Mises yield criterion and elastoplastic behavior is adopted. The proposed algorithm is known as nonlinear finite element analysis and it is verified by examples.

**Keywords:** Finite element analysis, nonlinear behavior, mapping distortions.

---

## 1. Giriş

Sonlu elemanlar yönteminde, gerilme yığılmalarının belirlediği bölgelerde çözümün daha doğru elde edilmesi amacıyla ağ inceltmesi yapılır. Bu inceltme genellikle geçiş elemanı olarak bilinen elemanların mertebelerini azaltmak veya yükseltmek yolu ile mümkün olur. Başka bir yolu ise geçiş bölgesinde, sürekliliği etkilemeyecek şekilde düğüm noktalarında bir sınır şartı tanımlanması ile olur.

Ağ inceltmesi düğüm noktasında bir sınır şartı tanımlamakla yapılmaktadır. Buna bir alternatif, genel serendip elemanları tanımlanmıştır [1, 2]. Genel serendip elemanları, sonlu elemanlar yönteminde sıklıkla kullanılan dikdörtgen şeklindeki serendip elemanlardan [3] farklı olmayıp, sadece sonlu elemanların birbiri arasındaki geçişi sağlayan şekil fonksiyonlarını haizdir. Bu tür serendip elemanların kenar düğüm noktaları sabit birer koordinatta tanımlıdır. Kenar iç düğüm noktalarının yerlerinin bir şekilde kayması veya ağ inceltmesi sırasında kenar iç düğüm

*Bu makaleye atıf yapmak için*

Yavuz, M., Küçükarslan, S., "Doğrusal Olmayan Malzemeler için Sonlu Eleman Çözümündeki Dönüşüm Bozukluklarının Giderilmesi" El-Cezeri Fen ve Mühendislik Dergisi 2020, 7(3); 1140-1151.

*How to cite this article*

Yavuz, M., Küçükarslan, S., "For Nonlinear Materials, Eliminations of Node Mapping Distortions in Finite Element Solutions" El-Cezeri Journal of Science and Engineering, 2020,7(3); 1140-1151.

ORCID: <sup>a</sup> 0000-0001-6693-9086, <sup>b</sup> 0000-0001-6696-6696

noktalarının izdüşümlerinin sabitlenmiş olan noktalara denk gelmemesi halinde dönüşüm bozuklukları olarak bilinen hatalar ortaya çıkar.

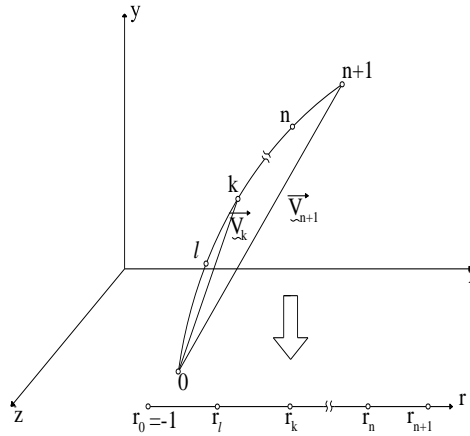
İç düğüm noktaları ayarlanabilir serendip elemanların şekil fonksiyonları matematiksel olarak bir koordinat dönüştürme işlemidir. Yapılan çalışmalarda [4-7], fiziksel elemanla mastır elemanın iç noktaları arasındaki koordinat dönüşümleri orantılı bir şekilde yapılmıştır.

Hem ağ inceltmesi hem de dönüşüm kaynaklı hataları elimine edecek olan şekil fonksiyonları geliştirilmiştir [4-7]. Geliştirilmiş serendip elemanları ile malzeme yönünden doğrusal olmayan problemlere uygulanması bu makale ile gerçekleştirilecektir.

İç düğüm noktaları ayarlanabilir serendip elemanlara ihtiyaç duyulmasının nedeni betonarme kesitler üzerinde yapılan çalışmalarda özetlenmiştir [8, 9]. Doğrusal olmayan elastisite problemleri için serendip elemanlarla bir çalışma yapılmıştır [10], ancak; elastoplastik malzemelerin analizi için ise bugüne kadar geliştirilmiş serendip elemanlar için bir çalışma mevcut değildir. Bu makalede, geliştirilmiş serendip elemanları ile malzeme yönünden doğrusal olmayan problemlere uygulaması yapılarak sonlu elemanlar yöntemindeki dönüşüm bozuklukları kaynaklı hesap hataları giderilecektir.

## 2. Geliştirilmiş Serendip Elemanlar

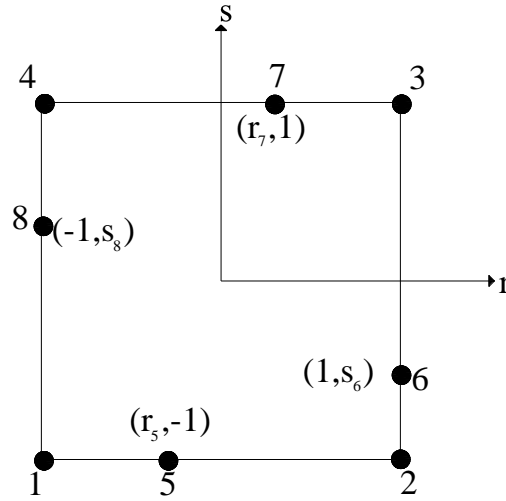
Sonlu elemanlar analizinde, mastır eleman ile fiziksel eleman arasında yapılan dönüşüm Şekil 1’de gösterilmiştir. Mastır elemanda yer alan kenar iç noktaların koordinatları standart sonlu elemanlarda sabit kabul edilir. Fiziksel elemandaki düğüm noktaları mastır elemandaki yerleri ile orantılı olmayan bir biçimde konuşlandırılırsa dönüşüm bozukluğuna neden olur. Bu da doğal olarak sonlu eleman hesaplarında elde edilen deplasman ve gerilmelerin hatalı hesap edilmesi demektir.



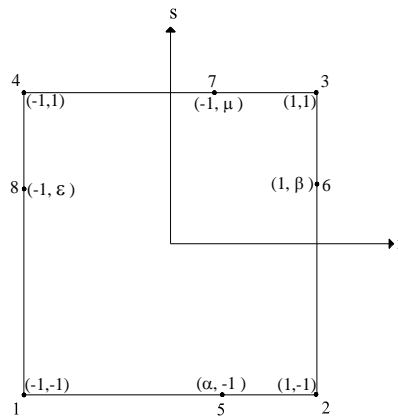
**Şekil 1.** Fiziksel elemanın mastır eleman üzerine dönüşümü

Şekil 2’de kenar iç noktaları sabit olmayan orta noktası kaydırılmış serendip elemanı gösterilmektedir. Şekil 3’te verilen geliştirilmiş serendip elemanı için genelleştirilmek istenirse şekil fonksiyonları [11] aşağıdaki biçimde ifade edilirler.

$$N_1(r, s, r_1, s_1) = \frac{(1-r)(1-s)}{4} \left( \frac{r_1 - \alpha}{-1 - \alpha} + \frac{s_1 - \varepsilon}{-1 - \varepsilon} - 1 \right) \quad (1)$$



Şekil 2. Orta noktası sabit olmayan genel serendip elemanı



Şekil 3. Geliştirilmiş serendip elemanı

$$N_2(r, s, r_2, s_2) = \frac{(1+r)(1-s)}{4} \left( \frac{r_2 - \alpha}{1 - \alpha} + \frac{s_2 - \beta}{-1 - \beta} - 1 \right) \tag{2}$$

$$N_3(r, s, r_3, s_3) = \frac{(1+r)(1+s)}{4} \left( \frac{r_3 - \mu}{1 - \mu} + \frac{s_3 - \beta}{1 - \beta} - 1 \right) \tag{3}$$

$$N_4(r, s, r_4, s_4) = \frac{(1-r)(1+s)}{4} \left( \frac{r_4 - \mu}{-1 - \mu} + \frac{s_4 - \epsilon}{1 - \epsilon} - 1 \right) \tag{4}$$

$$N_5(r, s) = \begin{cases} \frac{(r^2 - 1)(1 - s)}{2(\alpha^2 - 1)}, & \text{Eğer } \alpha \neq 1 \\ 0, & \text{Eğer } \alpha = 1 \end{cases} \tag{5}$$

$$N_6(r,s) = \begin{cases} \frac{(s^2-1)(1+r)}{2(\beta^2-1)}, & \text{Eğer } \beta \neq 1 \\ 0, & \text{Eğer } \beta = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$N_7(r,s) = \begin{cases} \frac{(r^2-1)(1+s)}{2(\mu^2-1)}, & \text{Eğer } \mu \neq 1 \\ 0, & \text{Eğer } \mu = 1 \end{cases} \quad (7)$$

$$N_8(r,s) = \begin{cases} \frac{(s^2-1)(1-r)}{2(\varepsilon^2-1)}, & \text{Eğer } \varepsilon \neq 1 \\ 0, & \text{Eğer } \varepsilon = 1 \end{cases} \quad (8)$$

Denklemler (1) ve (8) arası yer alan  $r_1, r_2, r_3, r_4, s_1, s_2, s_3$  ve  $s_4$  fonksiyonlarının parçalı olarak tanımları ise  $r_i$  ve  $s_i$  fonksiyonları  $i=1, 2, 3$  ve  $4$  için parçalı fonksiyon biçiminde aşağıdaki gibi yazılır.

$$r_1(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \alpha \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \alpha = 1 \end{cases}, \quad r_2(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \alpha \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \alpha = 1 \end{cases} \quad (9.a)$$

$$r_3(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \mu \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \mu = 1 \end{cases}, \quad r_4(r) = \begin{cases} r, & \text{Eğer } \mu \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \mu = 1 \end{cases}$$

$$s_1(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \varepsilon \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \varepsilon = 1 \end{cases}, \quad s_2(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \beta \neq 1 \\ -1, & \text{Eğer } \beta = 1 \end{cases} \quad (9.b)$$

$$s_3(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \beta \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \beta = 1 \end{cases}, \quad s_4(s) = \begin{cases} s, & \text{Eğer } \varepsilon \neq 1 \\ 1, & \text{Eğer } \varepsilon = 1 \end{cases}$$

### 3. Plastisite ve Sonlu Eleman Analizi

Bir yapı, nötr durumdan yüklendiğinde akma gerilmesine ulaşana kadar Hooke yasasına bağlı olarak elastik birim uzamalar ortaya çıkar. Yükleme arttıkça ve malzeme akmaya başladığında

plastik birim uzamalar sistemde gelişecektir. Bir noktada yük taşıma kapasitesi, sonsuz büyüklükteki birim uzamalar oluşması ile yapının göçmesi gerçekleşir. Bu nedenle, plastik davranış başladığında gerilmeler ve birim uzamalar arasında doğrusal bir ilişki yoktur. Toplam artımsal birim uzama, elastik ve plastik birim uzamanın artımsal toplamı kadardır.

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (10)$$

Bu denklemde plastik artımsal birim uzama  $d\varepsilon^p$  plastik potansiyel fonksiyonu,  $g$  ile ilişkilendirilmektedir.

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (11)$$

Denklem 11'de yer alan  $d\lambda$  pozitif orantılılık çarpanıdır.  $g$  fonksiyonunun deneysel olarak elde edilmesi gerektiğinden, uygulamada bu fonksiyonun akma fonksiyonuna eşit olduğu kabul edilir. Literatürde buna eşdeğer akma kuralı denilmektedir. Bu kurala göre denklem (11) yeniden yazılacak olursa

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (12)$$

şeklinde artımsal plastik birim uzama denklemi elde edilir. Hesaplamalı elastoplastik analizde hesaplamalar, artımsal bir yük artışı uygulanarak ilerler. Bu durum bir yer değiştirme artışı ve dolayısıyla da toplam bir gerilme artışı meydana getirir. Artımsal olarak gerilme ile birim uzama arasındaki bünye bağıntısı

$$d\sigma = \mathbf{D}^{ep} d\varepsilon \quad (13)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemde  $\mathbf{D}^{ep}$  elastoplastik davranışı içeren bünye matrisidir. Hooke yasası kullanılarak denklem (13) yeniden yazılacak olursa aşağıdaki formda yazılabilir.

$$d\sigma = \mathbf{D} (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (14)$$

Pozitif orantılılık çarpanı denklem (14)'de yerine yazılarak artımsal gerilme ve birim uzama arasındaki bağıntı aşağıdaki biçimde son halini alır.

$$d\sigma = \left( \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \right) d\varepsilon \quad (15)$$

Bu denklemde parantez içinde kalan kısım elastoplastik bünye matrisi  $\mathbf{D}^{ep}$  olarak tanımlanır [12-14].

$$\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \mathbf{D} \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \quad (16)$$

Sonlu elemanlar ile modellenmiş sistemde global denge denklemi

$$\mathbf{K}u = f \quad (17)$$

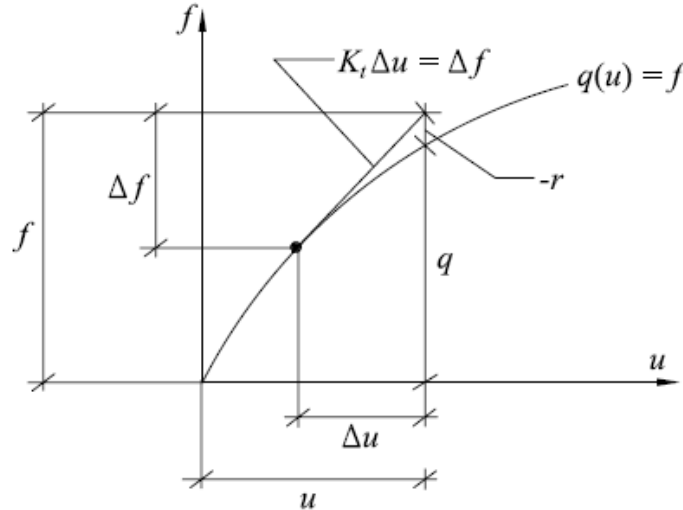
ile ifade edilir. Bu denklemde  $\mathbf{K}$  rijitlik matrisini,  $u$  deplasman matrisini ve  $f$  ise dış yük vektörünü gösterir. Rijitlik matrisi ise

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{D}}^{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (18)$$

biçiminde ifade edilir. Bu denklemde  $\mathbf{B}$  matrisi birim uzamalar ile deplasmanlar arasındaki ilişkiyi,  $\hat{\mathbf{D}}^{ep}$  ise elastoplastik davranıştaki bünye bağıntısını gösterir. Elastoplastik davranışta analizler artımsal bağıntılar ile yapılmaktadır. Başka bir deyişle artımsal yükleme yapılarak bu yüklemdeki deplasmanlar elde edilir.

$$\mathbf{K}_t \Delta u = \Delta f \quad (19)$$

Bu denklemde  $\mathbf{K}_t$  teğet rijitlik matrisi olup, Şekil 4'de gösterildiği üzere hesaplama yapılacak adımdaki teğet çizilerek doğrusallaştırılmış rijitlik matrisini göstermektedir.



Şekil 4. Doğrusal olmayan analizde artımsal adımların grafiksel gösterimi

Denklem (19)'da hesap edilen artık kuvvetler için müsaade edilebilir miktarda sıfıra yakın değerde bir yükleme tanımlanarak belirli bir hassasiyette işlemler yapılır. Bu işlemler Şekil 4'te grafiksel olarak gösterilen ve Newton-Raphson olarak bilinen bir takım ardışık işlemler algoritmasından ibarettir.

#### 4. Sayısal Uygulamalar

Bu bölümde, elastoplastik analiz için kalın halka şeklinde bir silindir iç basınç etkisi altında mevcut analitik çözümler ile karşılaştırılmaktadır. Analizde von Mises akma kriteri kullanılmaktadır. Sonraki örnekte ise iç basınç etkisi altındaki kalın halka şeklindeki silindir örneğinin plastik analizdeki davranışında dönüşüm bozukluklarının etkisi ve bunların düzeltilmesi sonucu elde edilen sonuçlar incelenmektedir.

##### 4.1. Elastoplastik Analiz Örneği

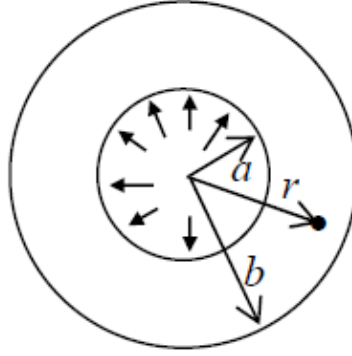
Bu örnekte, iç basınç etkisi altında kalın halka şeklindeki bir silindirin (Şekil 5) elastoplastik analizi için mevcut analitik çözümler ile sonlu elemanlar çözümü karşılaştırılmaktadır. Bu analizde von

Mises akma kriteri kullanılmaktadır. Şekil 5'te verilen problemin elastisite çözümleri [16, 17]'de verilmekte olup, radyal gerilme ( $\sigma_r$ ) ve çembersel gerilme ( $\sigma_\theta$ ) cinsinden  $\sigma_r = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$  ve

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

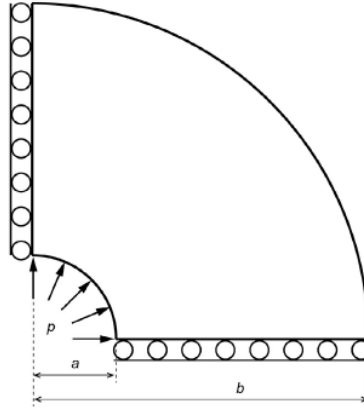
olarak türetilmiştir. Radyal yöndeki deplasman ise analitik olarak

$$\delta_r = \frac{a^2 p r}{E(b^2 - a^2)} \left[ (1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right]$$



Şekil 5. İç basınç etkisi altındaki kalın halka silindir

Şekil 5'te tanımlı problem, simetriden dolayı  $\frac{1}{4}$ 'ü ele alınarak ve Şekil 6'da tanımlı sınır şartları uygulanarak incelenebilir.

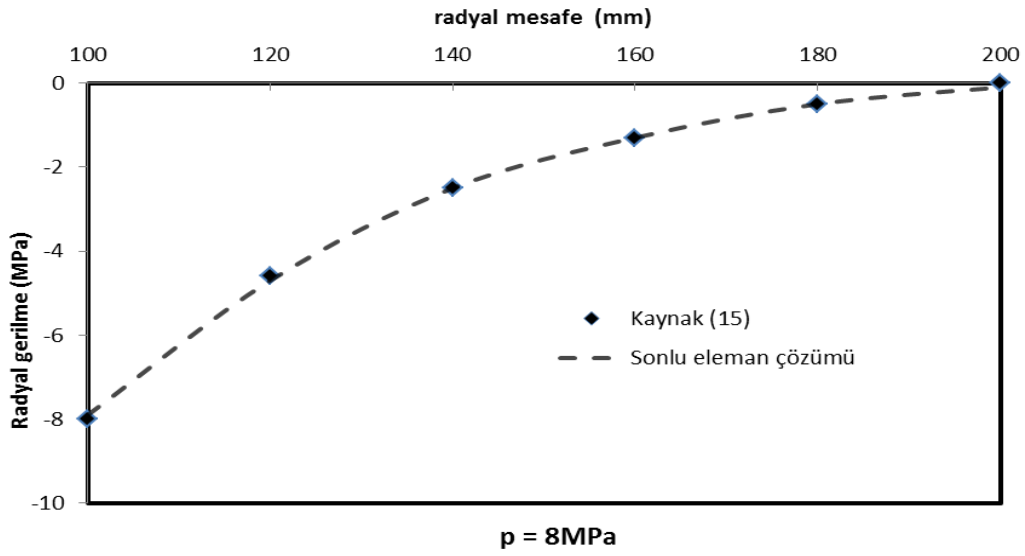


Şekil 6. Kalın halka silindirin  $\frac{1}{4}$ 'ü

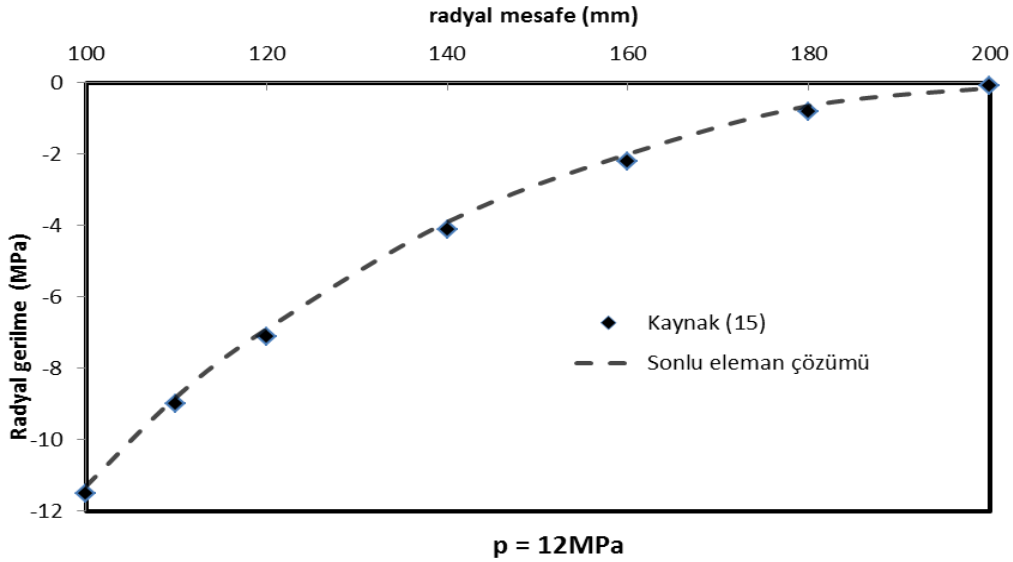
Mevcut algoritmanın onanması için; iç yarıçap  $a = 100$  mm, dış yarıçap  $b = 200$  mm, elastisite modülü  $E = 2.1 \times 10^4$  MPa, Poisson oranı  $\nu = 0.3$ , akma gerilmesi  $\sigma_y = 24.0$  MPa değerleriyle, pekleşme olmadan von Mises akma kriterine göre elastoplastik analiz yapılarak, literatür [15] sonuçları ile karşılaştırılmaktadır.

İç basınç  $p = 8$  MPa olduğu durumda, radyal gerilmenin radyal mesafe ile değişimi Şekil 7'de karşılaştırılmaktadır.  $p = 8$  MPa için sistem elastik davranmakta, dolayısıyla Şekil 7'deki dağılım yukarıda verilen analitik denklemler ile aynı sonuçları vermektedir.

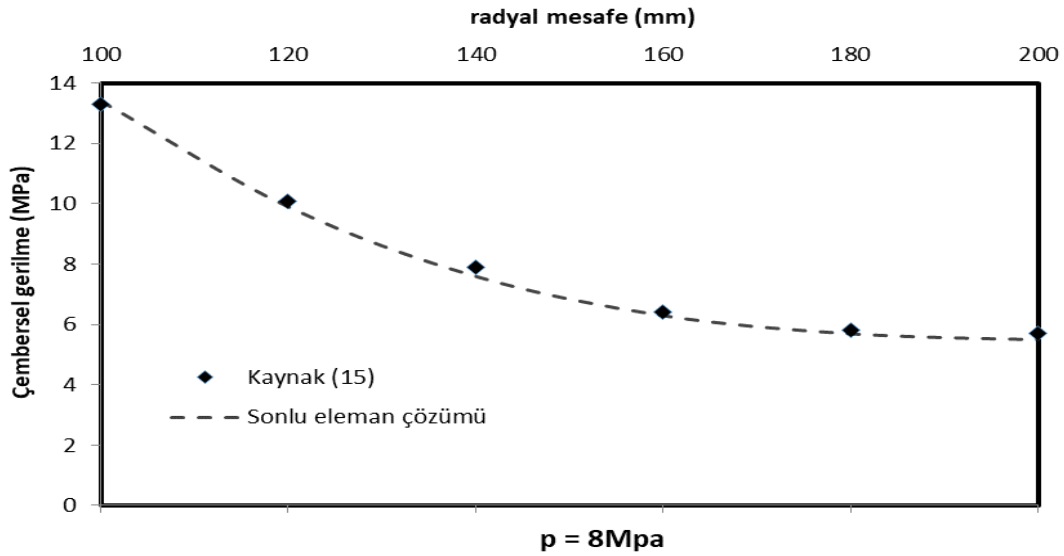
İç basınç  $p = 12$  MPa olduğu durumda radyal gerilmenin radyal mesafe ile değişimi Şekil 8'de, gösterildiği gibi gerilme seviyelerinde plastik bölgeye ulaşılmış olup, sonlu eleman çözümleri ile referans sonuçları [15] birbiriyle örtüşmektedir.



Şekil 7. İç basınç 8MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı



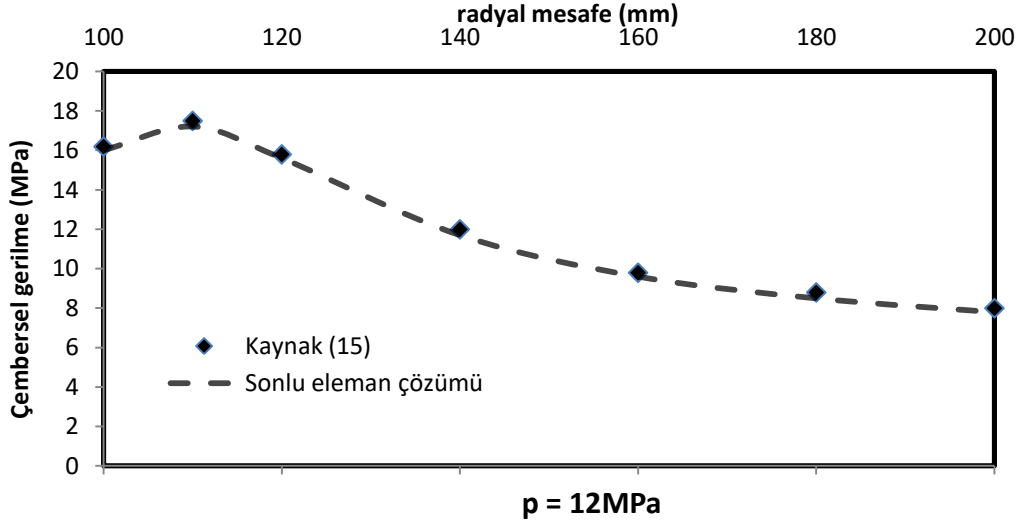
Şekil 8. İç basınç 12MPa olduğunda kenar boyunca radyal gerilme dağılımı



Şekil 9. İç basınç 8MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı



İç basınç  $p$ 'nin 8MPa ve 12MPa olduğu durumda, çembersel gerilme dağılımları sırasıyla Şekil 9 ve Şekil 10'da karşılaştırılmaktadır. Bu karşılaştırmada da elde edilen sonlu eleman çözümleri ile referans sonuçları [15] birbirleriyle örtüşmektedir.



Şekil 10. İç basınç 12MPa olduğunda kenar boyunca çembersel gerilme dağılımı

#### 4.2. Dönüşüm Bozukluğunun Artırılarak İncelenmesi

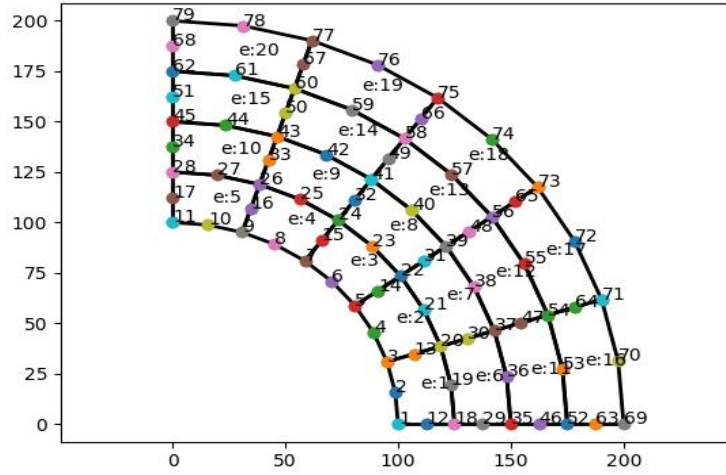
Bu bölümde; Bölüm 4.1'deki örnek kalın halka silindir, geometri ve malzeme özellikleri aynı kalmak suretiyle sonlu eleman ağında 20 ve 24 adet serendip eleman kullanılarak analiz edilmiştir.

Tablo 1. Sonuçların karşılaştırılması

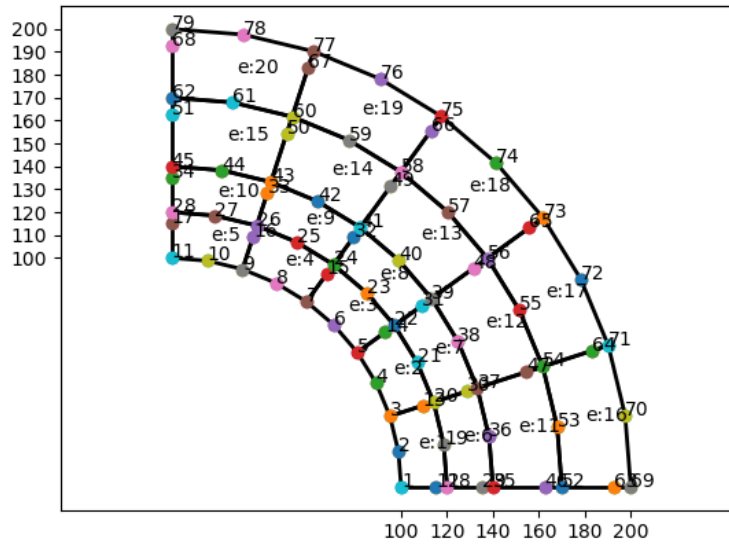
	Şekil 12 (standart formülasyon çözümleri)	Şekil 13 (standart formülasyon çözümleri)	Şekil 11 (kaydırma yok)	Şekil 12 (geliştirilmiş formülasyon çözümleri)	Şekil 13 (geliştirilmiş formülasyon çözümleri)	Şekil 14 (24 elemanlı referans çözüm)
$u_1$	0.117908	0.091585	0.127125	0.127117	0.127122	0.127117
$v_{11}$	0.117909	0.091586	0.127120	0.127108	0.127107	0.127117
Radyal gerilme (MPa)	-9.0406	-5.5062	-9.1617	-9.1294	-9.1126	-9.1991
Çembersel gerilme (MPa)	18.1483	14.4774	18.2514	18.2787	18.2921	18.2893

Şekil 11'de herhangi bir kaydırma yapılmamıştır. Şekil 12'de, orta düğüm noktaları 1/4 oranında aynı yönde kenara yakın, Şekil 13'de orta düğüm noktaları 1/8 oranında aynı yönde kenara yakın olarak dönüşüm bozukluğu elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Tablo 1'de verilmiştir.

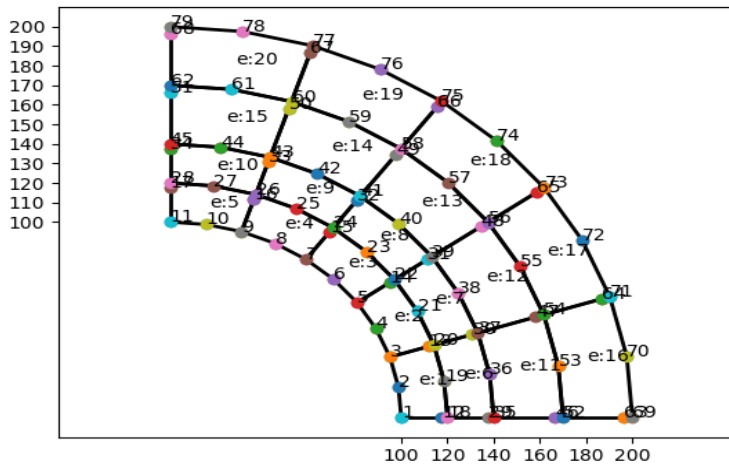
Elde edilen sonuçlar incelenirse; standart şekil fonksiyonlarının kullanıldığı durumda, orta noktalar kenarlara doğru kayarsa sonuçların bozulduğunu görürüz. Kenara çok yakın durumda (1/8 oranında kaydığında) sonuçlar daha da bozulmaktadır. Ancak; geliştirilmiş genel serendip elemanları kullanırsak, dönüşüm bozuklukları yok olmaktadır ve sonuçlar anlamlı derecede birbirine yakındır.



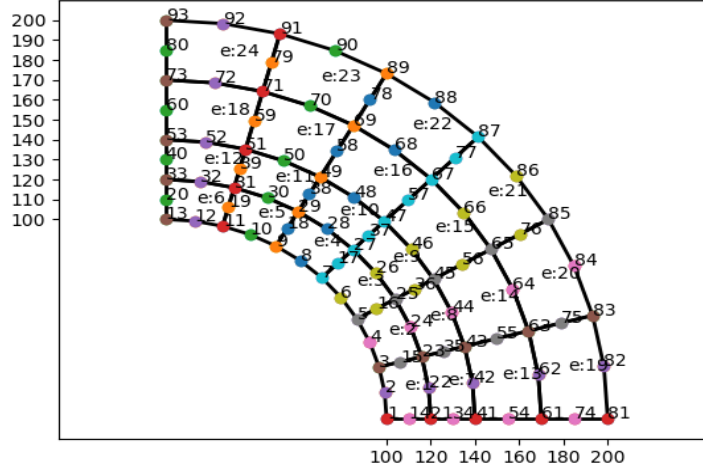
Şekil 11. 20 elemanlı problemin geometrisi, ağ, eleman ve düğüm noktası özellikleri



Şekil 12. 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/4 oranında aynı yönde kenara yakın



Şekil 13. 20 elemanlı problem: orta düğüm noktaları 1/8 oranında aynı yönde kenara yakın



Şekil 14. 24 elemanlı problemin geometrisi, ağ, eleman ve düğüm noktası özellikleri

## 5. Sonuçlar

Bu makalede, dönüşüm bozuklukları orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları ile elastoplastik problemler için giderilmiştir. Bunun için çalışmada, orta noktaları ayarlanabilir şekil fonksiyonları olan parabol mertebeli (8 noktalı) elemanlar kullanılmıştır. Önerilen doğrusal sonlu eleman algoritması ile çok bilinmeyenli yapı sistemlerinin analizinde gerilme ve deplasman değerlerinde doğruluk derecesi artmakta olup, bunun yanında modellemede doğabilecek fiziksel eleman ile mastır eleman arasındaki dönüşüm bozuklukları otomatik olarak elimine edilmektedir. Sayısal uygulamalar ile önerilen algoritmanın doğruluğu sınanarak iyi sonuçlar elde edilmiştir.

## Kaynaklar

- [1]. Nicolas, V.T., Çıtıptıoğlu, E., “A general isoparametric finite element program SDRC-SUPERB”, *Comput Struct*, 1977, 7: 303-313.
- [2]. Çıtıptıoğlu, E., “Universal serendipity elements”, *Int J Numer Meth Engng*, 1983, 19: 803-810.
- [3]. Celia, M.A., Cray. W.G., “An improved isoparametric transformation for finite element analysis”, *Int J Numer Methods Eng*, 1988, 20: 1443-1459.
- [4]. Utku, M., Çıtıptıoğlu, E., Özkan, G., “Isoparametric elements with unequally spaced edge nodes”, *Comput Struct*, 1991, 41: 455-460.
- [5]. Küçükarslan, S., “Universal serendipity elements with unequally spaced edge nodes”, Yüksek Lisans tezi, *ODTÜ*, (1995).
- [6]. Utku, M., “An improved transformation for universal serendipity elements”, *Comput Struct*, 2000, 73: 199-206.
- [7]. Kikuchi, F., Okabe, M., Fujio, H., “Modification of the 8-node serendipity element”, *Comput Methods Appl Mech Eng*, 1990, 179: 91-109.
- [8]. Ho, S.P., Yeh, Y.L., “The use of 2D enriched elements with bubble functions for finite element analysis”, *Comput Struct*, 2006, 84: 2081-2091.
- [9]. El-Mezaini, N., Çıtıptıoğlu, E., “Finite element analysis of prestressed and reinforced structures”, *J Struct Eng*, 1991, 117: 2851-2864.
- [10]. De Bellis, M.L., Wriggers, P., Hudobivnik B., “Serendipity virtual element formulation for nonlinear elasticity”, *Comput Struct*, 2019, 223: 106094.

- [11]. Küçükarslan, S., Demir, A., “Correction of node mapping distortions using universal serendipity elements in dynamical problems”, *Struct Eng Mech*, 2011, 40: 245-256.
- [12]. Owen, D.R.J., Hinton, E., “Finite Elements in Plasticity: Theory And Practice”, Swansea, *Pineridge Press*, (1980).
- [13]. Chen, W.F., Han, D.J., “Plasticity for Structural Engineers”, *Springer*, New York, (1988).
- [14]. Zienkiewicz, O.C., Valliappan, S., King, I.P., “Elasto-plastic solutions of engineering problems; initial stress finite element approach”, *Int J Numer Methods Eng*, 1969, 1: 75-100.
- [15]. Hodge, P.G., White, G.N., “ A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity”, *J Appl Mech*, 1950, 17:180-184.
- [16]. Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., “Theory of elasticity”, *McGraw Hill*, NY, (1970).
- [17]. Sadd, M., “Elasticity, Theory, Applications, and Numerics”, *Academic Press*, Burlington, (2014).