

Öğretmen Adaylarının İspatla İlgili Görüşlerinin Geliştirilmesi: Bir Tasarım Çalışması *

Fikret Cihan^a ve Hatice Akkoç^b

^aKırklareli Üniversitesi, Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu, Kırklareli / Türkiye (ORCID: 0000-0001-8783-4136)

^bMarmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, İstanbul / Türkiye (ORCID: 0000-0002-0223-1158)

Makale Geçmişi: Geliş tarihi: 4 Eylül 2019; Yayına kabul tarihi: 2 Mart 2020; Çevrimiçi yayın tarihi: 28 Nisan 2020

Öz: İspat matematiğin hem öğrenimi hem de öğretimi için önemli bir yere sahiptir. Lisans eğitimlerinde ispat yapmayı öğrenen matematik öğretmeni adayları, öğretmenlik mesleğine başladıklarında ise matematiğin öğretiminde ispatı belli düzeyde kullanmaktadırlar. Bu yüzden öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşleri önemlidir. Bu çalışmada ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmek amacıyla tasarlanan bir lisans dersinin öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerine etkisi incelenmiştir. Tasarım tabanlı araştırma yöntemini benimseyen bu çalışmanın nicel aşaması İstanbul'daki bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümü ikinci sınıfında öğrenim gören 22 öğretmen adayıyla, nitel aşaması ise üç öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Araştırmanın verileri 2017-2018 Eğitim-Öğretim yılı bahar döneminde toplanmıştır. Araştırmanın nicel verileri likert tipi ölçekle, nitel verileri ise yarı yapılandırılmış mülakatlarla toplanmıştır. Nicel verilerin analizinde Wilcoxon işaretli sıralar testi ile Marjinal homojenlik testi, nitel verilerin analizinde ise betimsel analiz kullanılmıştır. Araştırmanın nicel bulguları, ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşleri üzerine anlamlı ve büyük etkisinin olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmanın nitel bulguları da nicel bulgularını desteklemektedir. Bu bulgulara göre öğretmen adaylarının uygulama öncesindeki olumlu olmayan görüşleri uygulama sonrasında pozitif yönde değişime uğramıştır. Araştırmanın sonuçları doğrultusunda öğretmen adaylarının ispatla ilgili farklı duyuşsal davranışlarını geliştirecek müdahale araştırmalarının yapılması önerilebilir.

Anahtar Kelimeler: İspat, matematik öğretmeni adayları, öğretmen yetiştirme, ispat öğretimi, ispatla ilgili görüş

DOI: 10.16949/turkbilmat.615594

Abstract: Proof has an important place both for the learning and teaching of mathematics. Pre-service mathematics teachers who learn about proof during undergraduate courses will use proofs during their teaching when they enter the profession. This is why the pre-service teachers' views about proof are important. In this study, the effects of an intervention study that aims to improve pre-service mathematics teachers' content and pedagogical content knowledge of proof on pre-service teachers' views about proof were examined. The quantitative phase of this design-based research study was conducted in a teacher preparation program at a state university in Istanbul with 22 pre-service mathematics teachers, and the qualitative phase was conducted with three pre-service teachers. Data from the study were obtained during the spring semester of the 2017-2018 academic year. The quantitative data of the study were collected by a Likert-type scale, while the qualitative data were collected by semi-structured interviews. For the analysis of quantitative data, Two tests, Wilcoxon signed ranks test and marginal homogeneity test, were used. For qualitative data analysis, descriptive analysis was used. The quantitative findings of the study revealed that course intervention had a significant impact on pre-service teachers' views about proof. The qualitative findings of the study also support quantitative findings. According to the qualitative findings of the study, the non-positive views of the participants before the implementation changed positively after the implementation. In line with the findings of the research, it may be suggested to conduct intervention studies to improve the different affective behaviors of pre-service teachers related to proof.

Keywords: Proof, pre-service mathematics teachers, teacher preparation, teaching proof, views about proof

[See English Version](#)

1. Giriş

Matematik biliminin ilerlemesi matematiksel hiyerarşi içinde yeni teoremlerin keşfedilmesi ve bunların ispat edilmesine bağlı olduğundan ispat matematiğin zirvesi olarak ifade edilmektedir (Tall ve ark., 2012). İspat matematiğin merkezinde konumlandırılmakta (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002; Samkoff ve Weber, 2015) ve matematiğin kalbi (Güven, Çelik ve Karataş, 2005) olarak nitelendirilmektedir.

İspat matematikte önemli olduğu kadar matematik eğitiminde de önemli bir yere sahiptir (Selden ve Selden, 1987). İspat matematik eğitimine hem amaç hem de araç olarak hizmet eder. İspat matematikte birçok pedagojik amaca hizmet ettiğinden (Dickerson ve Doerr, 2014) matematik eğitiminde önemli bir bileşendir (Ball ve ark.,

Sorumlu Yazar: Fikret Cihan  e-posta: fikret_cihan@hotmail.com

* Bu çalışma ikinci yazarın danışmanlığında birinci yazarın tamamlanmış doktora tezinden üretilmiştir. Bu çalışma Marmara Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından EGT-C-DRP-120418-0202 proje numarası ile desteklenen araştırma projesinin bir parçasıdır. Bu çalışmanın bir kısmı 06-08 Eylül 2018 tarihleri arasında Edirne'de düzenlenen 13. Uluslararası Balkan Eğitim ve Bilim Kongresi'nde sözlü bildiri olarak sunulmuş ve özet olarak basılmıştır.

Citation Information: Cihan, F. ve Akkoç, H. (2020). Öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerinin geliştirilmesi: bir tasarım çalışması. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 11(1), 280-311.

2002). Açıklayıcı işlevi sayesinde ispat, matematiğin anlamlandırılarak öğrenilmesine katkı sağlayan bir araçtır (Knuth, 2002a). Hatta ispat matematik öğreniminde bir eşik olarak düşünülebilir (Duval, 2007).

İspat, bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını nedenleriyle ve niçinleriyle ikna edici ve açık bir şekilde gösteren mantıksal ve matematiksel argümanlar dizisidir (Baki, 2015; Hanna, 1991, 2000; Hersh, 1993; Rossi, 2006). İspatlama ise bir önermenin doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermeye çalışan bir bireyin zihinsel eylem sürecidir (Harel ve Rabin, 2010; Harel ve Sowder, 1998, 2007). Matematik ve matematik eğitimi literatüründe “ispatlama” ve “ispat yapma” ifadeleri birbirlerinin yerine kullanılmaktadır. İspat zihinsel bir süreç olan ispatlamanın sonunda ortaya çıkan bilişsel bir üründür (Harel, 2008). Bu süreç ne kadar iyi yönetilirse ortaya çıkan ürün de o denli iyi olur.

1.1. Kuramsal Çerçeve

Matematiğe ait bir konunun öğreniminde öğrencilerin o konuya yönelik görüşleri ne kadar önemliyse, matematik öğretiminde de öğretmenlerin o konuya yönelik görüşleri önemli bir faktördür. Özellikle epistemolojik olarak öğrenilmesi zor olan konularda öğrenciler, pedagojik olarak öğretilmesi zor olan konularda da öğretmenler olumlu olmayan görüşlere sahip olabilmektedirler. Çünkü öğretim programlarındaki zor konular öğrencilerde (Yüksel-Ayten ve Hayırsever, 2019) ve öğretmenlerde (Bayrakdar-Çiftçi, Akgün ve Deniz, 2013) olumsuz görüşlere sebep olmaktadır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının hem matematikte hem de matematik eğitiminde oldukça önemli bir yere sahip olan ispata ve ispatlamaya yönelik görüşlerinin incelendiği çalışmalar önem arz etmektedir.

Ülkemizde (Doruk ve Güler, 2014) ve uluslararası literatürde (Almeida, 2000; Lee, 1999) öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerini belirlemek amacıyla ölçekler geliştirilmiştir. Uluslararası literatürde geliştirilen ölçeklerin Türkçe’ye uyarlandığı çalışmalar da (İskenderoğlu, 2010; Aydoğdu- İskenderoğlu, Baki ve Palancı, 2011; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006) bulunmaktadır. İspatlama yönelik görüşler ölçekteki farklı içerik veya faktörlere göre incelenmektedir. İskenderoğlu (2010) doktora tezinde bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü sınıfında öğrenim gören öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini incelemiş ve araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüşlerinin olumlu düzeyde olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmanın diğer bir bulgusu da “zihinsel süreç”, “güven”, “özdeğerlendirme” ve “tutum-inanç” gibi dört faktörden oluşan ölçekte (s. 83); zihinsel süreç faktörü dışındaki diğer üç faktörün sınıf seviyesine göre istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık oluşturmadığıdır. Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere (2006) ise çalışmalarında öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerini; ispat yapmaya yönelik kavramsal yeterliliklere yönelik görüşler, ispat yapma benlik algısına ilişkin görüşler, ispat yapmanın önemine ilişkin görüşler, ispat yapmaya ilişkin genel görüşler ve ispat yapma ile ilgili duygulara yönelik görüşler olmak üzere (bu çalışmada da incelenen) beş temel içerikte saptamaya çalışmışlardır.

İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşler; herhangi bir matematiksel bilginin veya matematiksel sonuçların doğruluğu için sadece örneklerin ikna edici olup olmadığı, sonuçların doğruluğu için ispata gerek olup olmadığı, ispatın açıklama ve gerçekleştirme gibi işlevlerinin olup olmadığı, farklı ispatlar görmenin teoremi anlamaya yardımcı olup olmadığı, ispatın başka matematiksel sonuçlara bağlı olup olmadığı ve ispatın aşamaları üzerinde çalışmanın ispatı anlamaya yardımcı olup olmadığı ile ilgili görüşleri içermektedir (Moralı ve ark., 2006). *İspat yapma benlik algısına ilişkin görüşler*; kişilerin kendi başlarına ispat yapabilme becerilerine güvenip güvenmedikleri ve ispatları anlayıp anlamadıkları ile ilgili görüşleri içermektedir (Moralı ve ark., 2006). *İspat yapmanın önemine ilişkin görüşler*; ispatın teorik matematik ve matematikteki sonuçların anlaşılması için önemli olup olmadığı, ispatın gerekliliği, ispat yapmanın önermeleri bilmek kadar önemli olup olmadığı ile ilgili görüşleri içermektedir (Moralı ve ark., 2006). *İspat yapmaya ilişkin genel görüşler*; ispatlarda kullanılan stratejilerin anlaşılabilir anlaşılmadığı, ispat yapmanın bir yönüyle problem çözme olup olmadığı, ispat yapmanın sadece matematikçilere özgü bir iş olup olmadığı, katılımcıların sınıfta öğretim elemanı yapmadan ispatları anlayıp anlamadıkları veya teoremi anlamalarına rağmen ispatını anlayıp anlamadıkları ile ilgili görüşleri içermektedir (Moralı ve ark., 2006). *İspat yapma ile ilgili duygulara ilişkin görüşler* ise kişilerin ispat yapmayı sevip sevmedikleri ve ispat yaparken sıkılıp sıkılmadıkları ile ilgili görüşleri içermektedir (Moralı ve ark., 2006).

Literatürdeki araştırmalar matematik öğretmeni adaylarının ve matematik öğretmenlerinin ispatlamaya yönelik görüşlerinin istenilen düzeyde olmadığını (Almeida, 2000; Doruk ve Güler, 2014; Doruk, Özdemir ve Kaplan, 2014; Gökkurt ve Soylu, 2012; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Kaplan, Doruk, Öztürk ve Duran, 2016; Kayagil, 2012; Knuth, 2002b; Moralı ve ark., 2006; Turgut, Yenilmez ve Uygan, 2013) belirtmektedir. Bu çalışma literatürde bahsedilen çalışmalardan farklı olarak öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerinin nasıl geliştirilebileceğine dair fikir sunan bir müdahale çalışmasıdır. Aşağıda bu müdahalenin esasını oluşturan alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi kısaca açıklanmıştır.

Shulman (1986) çalışmasında öğretmenlerin sahip olması gereken bilgi formlarını alan bilgisi, pedagojik alan bilgisi ve öğretim programı bilgisi olarak üç kategoriye ayırmıştır. Alan bilgisi “öğretmenin zihnindeki bilginin miktarı ve onun düzenlenmesi” (Shulman, 1986, s. 9) olarak tanımlanmıştır. Alan bilgisi kapsamında düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini bilip uygulayabilmeleri gerekmektedir. Ayrıca öğretmen adayları, ispatlamalarını Harel ve Sowder’in (1998) sınıflamasına göre analitik şemada gerçekleştirmeleri gerekmektedir. Pedagojik alan bilgisi ise alan ve pedagojinin özel bir karışımıdır (Shulman, 1986, 1987). Shulman’ın (1986) makalesinde pedagojik alan bilgisi ile ilgili; öğrenci güçlükleri ile öğretim stratejileri bileşenleri dikkat çeken iki bileşendir (Park ve Oliver, 2008). Öğretmenler öğrenci güçlüklerinin dışında bu güçlüklerin nedenlerini (Cornu, 1991) de bilmelilerdir. Pedagojik alan bilgisi kapsamında düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının ispatla ilgili öğrenci güçlüklerini tespit edebilmeleri, bu güçlüklerin nedenlerini açıklayabilmeleri ve ispatla ilgili öğretim stratejilerini belirleyebilmeleri gerekmektedir. Aynı zamanda öğretmenler, öğrencilerin yaptıkları gerekçelendirmeleri Harel ve Sowder’in (1998) sınıflamasına göre tespit edebilmelilerdir. Ancak literatürdeki çalışmalar öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan (İmamoğlu ve Yontar-Toğrol, 2010, 2015; Köğce, 2012; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Stylianou, Chae ve Blanton, 2006) ve pedagojik alan bilgilerinde eksiklikler olduğuna (Bieda, 2010; Lesseig, 2016; Paigna ve Herrera, 2014; Tabach ve ark., 2010) vurgu yapmaktadır. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgileri gibi bilişsel davranışları ile onların ispatlamaya yönelik görüş, tutum ve inanç gibi duyuşsal davranışları birbirlerini karşılıklı olarak etkilemektedirler. Çünkü bilişsel ve duyuşsal davranışlar arasında bir bağ olduğu düşünülmektedir (Gömlüksiz ve Kan, 2012). Bu nedenle öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi, onların ispatla ilgili görüşlerini de geliştirebilir.

1.2. Araştırma Soruları

Bu araştırma öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeyi amaçlayan doktora tezinin bir parçasıdır. Doktora tezi kapsamında matematik öğretmeni adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinin geliştirmeye yönelik kapsamlı ve sürdürülebilir bir lisans dersi tasarlanıp, uygulaması ve değerlendirmesi yapılmıştır. Bu çalışma kapsamında ise uygulanan bu ders tasarımının, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerine etkisi incelenmiştir. Bu bağlamda çalışmanın araştırma sorusu ve alt araştırma soruları aşağıdaki gibidir:

İspatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgisi geliştirmeye yönelik tasarlanan ders öğretmen adaylarının *ispatla ilgili görüşlerine* nasıl etki etmiştir?

Tasarlanan ders öğretmen adaylarının *ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşlerine* nasıl etki etmiştir?

Tasarlanan ders öğretmen adaylarının *ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşlerine* nasıl etki etmiştir?

Tasarlanan ders öğretmen adaylarının *ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerine* nasıl etki etmiştir?

Tasarlanan ders öğretmen adaylarının *ispat yapmaya ilişkin genel görüşlerine* nasıl etki etmiştir?

Tasarlanan ders öğretmen adaylarının *ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüşlerine* nasıl etki etmiştir?

2. Yöntem

Bu bölümde araştırmanın yönteminden, modelinden, aşamalarından, çalışma grubundan, veri toplama araçları ve veri analizinden bahsedilecektir.

2.1. Araştırmanın Yöntemi

Bu çalışmada yöntem olarak tasarım tabanlı araştırma yöntemi tercih edilmiştir. Tasarım tabanlı araştırmanın bir gereği olarak bu araştırma karma yöntem araştırma desenlerine göre desenlenmiştir. Model olarak ise analiz, tasarım, geliştirme, uygulama ve değerlendirme aşamalarından oluşan ADDIE (Analysis, Design, Development, Implementation, Evaluation) Modeli (Branch, 2009) kullanılmıştır.

2.2. Araştırmanın Aşamaları

Analiz aşamasında ihtiyaç analizi yapılmış ve öğretmen adaylarının ispatla ilgili ihtiyaçları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatla ilgili ihtiyaçlarını belirlemek için öğrenci standartları (Department for education 2013a, 2013b, 2014; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGA Center & CCSSO], 2010) ve öğretmen yeterlikleri (Department of Education & Training of Australia [DETA], 2004; Millî Eğitim Bakanlığı [MEB], 2017a, 2017b; National Board for Professional Teaching Standards [NBPTS], 2010) incelenmiştir. Öğretmen adaylarının öğretmenlik eğitimi bağlamında ispat ve ispatlama konusunda pedagojik alan bilgisini geliştiren müdahalelerin tasarlanması ve analiz edilmesi çağrılarını da değerlendirdik (Cihan ve Akkoç, 2019). İhtiyaç analizi sonucunda öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerinin geliştirilmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. Bu ihtiyaçlar doğrultusunda öğretmen adaylarının duyuşsal ve bilişsel özellikleri de göz önüne alınarak dersin hedef ve kazanımları oluşturulmuştur. Alan bilgisine yönelik iki ve

pedagojik alan bilgisine yönelik dört kazanım oluşturulmuştur (Cihan, 2019). İspatla ilgili görüşlere yönelik olarak ise beş kazanım hedeflenmiştir: a) Öğretmen adayı ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik olumlu görüşler kazanır. b) Öğretmen adayı ispat yapma benlik algısına ilişkin olumlu görüşler kazanır. c) Öğretmen adayı ispat yapmanın önemine ilişkin olumlu görüşler kazanır. d) Öğretmen adayı ispat yapmaya ilişkin olumlu genel görüşler kazanır. e) Öğretmen adayı ispat yapma ile ilgili olumlu duygular kazanır (Cihan ve Akkoç, 2018).

Tasarım aşamasında ne öğretilim, nasıl öğretilim ve nasıl değerlendirilim sorularına yanıt aranmıştır. Bu aşamada dersin hedefleri ve kazanımları göz önüne alınarak ders içeriği ve akışı, dersin öğrenme-öğretme durumları ve dersin değerlendirme sistemi ile değerlendirme araçları oluşturulmuştur (Cihan, 2019; Cihan ve Akkoç, 2018). Geliştirme aşamasında ise bunlarla ilgili uzman görüşleri alınarak ders tasarımına son hali verilmiştir. Ders tasarımının son hali öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirmeye yönelik olarak ispatın modern bileşenleri, ispat yöntemleri, ispat türleri, ispat şemaları gibi modülleri, öğretmen adaylarının ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik olarak ispatlamaya yönelik öğrenci güçlükleri, ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerinin nedenleri, ispatlamaya yönelik öğretim stratejileri ve öğrencilerin sahip oldukları ispat şemaları gibi modülleri içermektedir (Cihan, 2019; Cihan ve Akkoç, 2018).

Uygulama aşamasında (Cihan, 2019) birinci yazar dersin yürütücüsü, ikinci yazar ise dersin koordinatörü olarak görev yapmıştır. Ayrıca ikinci yazar da uygulama aşamasında katılımcı olmayan gözlemci görevini üstlenmiş olup uygulama esnasında anlık notlar tutmuştur. Uygulama aşaması bir eğitim-öğretim dönemi (15 hafta) sürmüştür. Uygulama aşaması bir önceki aşamadaki ders içeriği ve akışına, dersin öğrenme-öğretme durumlarına sadık kalınarak doğru sıralanmış anlatım, soru-cevap, tartışma, problem çözme, kavram haritası, örnek olay ve senaryo-temelli öğretim yöntemleri (Altun, 2001; Tok, 2017) kullanılmıştır. Uygulama aşamasına ispatın modern bileşenleri ile başlanmıştır. İspatın modern bileşenleri öğretmen adaylarına geniş bir yelpazede sunulmuştur. İspatın modern bileşenleri öncelikle terimler ve önermeler başlıklarına ayrılarak, terimler; tanımsız terimler ve tanımlar olmak üzere iki alt başlıkta incelenmiştir. Önermeler ise doğru önermeler (teoremler), yanlış önermeler, varsayımlar (kestirimler) olmak üzere üç alt başlıkta incelenmiştir. Yine teoremler alt başlığı aksiyomlar, postulatlar, lemmalar ve sonuçlar gibi başlıklarla detaylandırılmıştır. Öğretmen adaylarından tüm bu kavramları içeren kavram haritası çizmeleri istenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarına gerekçelendirme, ispat, ispatlama ve çürütme kavramları, bu kavramlar arasındaki ilişkiler ve farklar, ispatlama süreci, ispatın işlevleri (Bell, 1976; Hanna, 2000), ispatın türleri ve iyi bir ispatta olması gereken özellikler sunulup, örneklendirilmiştir. Kötü ve iyi ispat örneklerine yer verilmiştir. Farklı araştırmacılara ait ispat ve ispatlama sınıflamaları (Balacheff, 1987, 1988; Harel ve Sowder, 1998; Miyazaki, 2000; Raman, 2003; Van Hiele, 1986; Vinner, 1991; Waring, 2000; Weber, 2004) anlatılıp Sowder ve Harel'in (1998) dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları sınıflaması yedi alt ispat şemasıyla (otoriter, ritüel, sembolik, algısal, örnek-temelli, dönüşümcü ve analitik) birlikte detaylı olarak incelenmiştir. Ortaöğretim öğrencilerinin ve öğretmen adaylarının yaptıkları ispatlar ilgili literatürden derlenerek çalışma yapıları üzerinde ispat şema belirleme etkinlikleri yapılmıştır. Bunu araştırmacıların oluşturduğu senaryo çalışmaları takip etmiştir. Öğretmen adaylarına bir önerme verilip bu önermeyi yedi alt ispat şemasını kullanarak yedi farklı cevapla gerekçelendirmeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarına yedi ispat yöntemi yedi ayrı haftada anlatılmıştır. İspat yöntemlerine tümevarımla ispat yöntemi ile başlanmıştır. Daha sonra tümdengelimle ispat yöntemi doğrudan ve dolaylı ispat yöntemleri olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Dolaylı ispat yöntemleri ise durum yoluyla ispat, tüketerek ispat, çelişki yoluyla ispat, olmayana ergi ile ispat ve aksine örnek verme yoluyla ispat yöntemi olmak üzere beşe ayrılmıştır. Bu yöntemlerin ne olduğu, ne zaman ve hangi tip sorularda başvurulması veya başvurulmaması gerektiği, bu yöntemlerin kullanılacağı önermelerin yapısı, önermeler hesabıyla bu yöntemlerin mantığı tek tek anlatılmıştır. Çalışma yapıları yardımıyla her bir ispat yöntemi ile ilgili farklı matematik konularına ait ispatlama etkinlikleri yapılmıştır. Çalışma yapıları öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini öğrenmelerine katkı sağlayacak şekilde önermenin (varsa) hipotezinin, hükmünün, yöntemi de içeren ispata başlama cümlesinin, her yöntem için farklı olacak şekilde ispatta atılan adımların ve bitiş cümlesinin yer aldığı bölümlere ayrılmıştır. Derslerde yapılan tüm ispatlar analitik ispat şeması kullanılarak yapılmıştır. Analitik şemalardan dönüşümcü şemalara yer verilse de genellikle aksiyomatik şema kullanılmıştır. Tüm bu çalışmalar önce grup sonra bireysel olarak yapılmış ve daha sonra da tartışma ortamına geçilmiştir. Bu çalışmalar öğretmen adaylarının pedagojik alan bilgilerini geliştirecek biçimde her bir ispat yöntemine özgü ispatlamaya yönelik öğrenci güçlüklerini tespit etme, bu güçlüklerin nedenlerini açıklama ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemeye yönelik örnek olay ve senaryo-temelli etkinlikler izlemiştir (Cihan, 2019).

Değerlendirme aşamasında ise öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşleri ile ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerindeki gelişimler incelenmiştir. Bu araştırma kapsamında ise öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerindeki gelişim incelenmiştir.

2.3. Çalışma Grubu

Çalışmanın nicel aşaması için örneklem uygun örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. Örneklemin kolay ulaşılabılır olması nedeniyle bu örnekleme tekniği seçilmiştir. Araştırmanın nicel verilerinin toplandığı çalışma grubu İstanbul'da bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü ikinci sınıfına devam eden 22 (14 kadın, 8 erkek) matematik öğretmeni adaydır. Çalışmanın nitel aşaması için çalışma grubu teorik örnekleme tekniği ile belirlenmiştir. Alan ve pedagojik alan bilgileri iyi, orta ve zayıf olan 3 (2 kadın, 1 erkek) öğretmen adayı nitel veri çalışma grubu olarak belirlenmiştir. Bunun nedeni teorimiz çerçevesinde öğretmen adaylarının görüşlerini incelemektir. Çünkü tasarlanan ders öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeyi hedefleyen bir müdahaledir. Bu araştırmanın amacı da bu müdahalenin öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerine etkisini incelemektir. Nitel çalışma grubundaki katılımcılara bu üç öğretmen adayını simgeleyen ÖA1 (iyi), ÖA2 (orta) ve ÖA3 (zayıf) şeklinde kodlar verilmiştir.

2.4. Veri Toplama Araçları

Nicel veriler likert tipi ölçekle, nitel veriler yarı yapılandırılmış mülakatlar aracılığıyla toplanmıştır.

2.4.1. İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği

Öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerini ölçmek amacıyla nicel veri toplama aracı olarak Morali ve arkadaşlarının (2006) Almeida'nın (2000) çalışmasından Türkçe'ye uyarlayıp geliştirdikleri likert tipi ölçek çalışmanın tüm yazarlarından gerekli izinler alınarak kullanılmıştır. Bu ölçeğin tercih edilme sebebi geçerlik ve güvenilirlik çalışmalarının yazarlar tarafından yapılmış olmasıdır.

20 maddelik ölçeğin on maddesi (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 15) olumlu, on maddesi de (5, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 20) olumsuz görüş içermektedir (Morali ve ark., 2006). Bu ölçeğin maddeleri ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşler (1, 2, 3, 5, 11, 12, 13), ispat yapma benlik algısına yönelik görüşler (10, 14), ispat yapmanın önemine ilişkin görüşler (4, 6, 8, 17), ispat yapmaya ilişkin genel görüşler (7, 15, 16, 19, 20) ve ispat yapma ile ilgili duygulara ilişkin görüşler (9, 18) olmak üzere beş temel içerikten oluşmaktadır (Morali ve ark., 2006, s. 153-156). İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşler (KYG), ispat yapma benlik algısına ilişkin görüşler (BAG), ispat yapmanın önemine ilişkin görüşler (ÖG), ispat yapmaya ilişkin genel görüşler (GG) ve ispat yapma ile ilgili duygulara ilişkin görüşlerin (DG) tamamı; yani tüm ölçek maddeleri ispat yapmaya yönelik görüşleri oluşturmaktadır.

Bu ölçek dersin uygulamasından önce ve sonra olmak üzere 22 öğretmen adayına iki kez uygulanmıştır. Bu ölçeğin iki kez uygulanmasının amacı ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerine etkisini incelemektir.

Ölçek öğretmen adaylarına uygulanmadan önce onlara araştırmanın içeriği ve katılımcı hakları anlatılıp, soru sormalarına fırsat tanınmış ve araştırmaya katılıp katılmamaya karar vermeleri için gerekli süre tanınmıştır. Araştırmaya gönüllü olarak katılan öğretmen adaylarına bilgilendirilmiş gönüllü rıza formu imzalatılmıştır.

2.4.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakatlar

Yarı yapılandırılmış mülakatların amacı, öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerini derinlemesine incelemektir. Mülakatlar için beş adet sorudan oluşan yarı yapılandırılmış mülakat formu hazırlanmıştır. Bu sorular yukarıda bahsedilen ölçekteki beş temel içeriğe yönelik öğretmen adaylarından detaylı bilgi almak için hazırlanmıştır. Bu beş temel içerikte yer alan terminolojide kastedilmek istenen görüşlerin neleri kapsadığı öğretmen adaylarına açıklanmıştır. Öğretmen adaylarının mülakatlarda görüşlerini detaylandırmaları için sorulan her sorunun ardına "açıklayınız" ifadesi eklenmiştir.

- 1) İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerinize ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız.
- 2) İspat yapmaya ilişkin benlik algılarımıza ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız.
- 3) İspat yapmanın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız.
- 4) İspat yapmaya ilişkin genel görüşleriniz nelerdir? Açıklayınız.
- 5) İspat yaparken ne hissediyorsunuz? Açıklayınız.

Yarı yapılandırılmış mülakat formunun geçerlik çalışmaları için 10 uzmandan görüş alınmıştır. Formun güvenilirlik çalışmaları, araştırmanın yapıldığı üniversiteden farklı bir üniversitede öğrenim gören üç matematik öğretmeni adayıyla pilot çalışmaları yapılarak tamamlanmıştır. Pilot çalışmadan elde edilen veriler araştırmacılar tarafından kodlandıktan sonra başka bir uzman tarafından da kodlanmıştır. Bu iki kodlama arasındaki uyum Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) $Güvenirlik = Görüş Birliği / (Görüş Birliği + Görüş Ayrılığı)$ formülü ile hesaplanmış ve $\approx 93\%$ bulunmuştur.

Yarı yapılandırılmış mülakatın özelliği olarak öğretmen adaylarının beş temel içerikte yer alan terminolojideki görüşlerini derinlemesine değerlendirebilmek için bu ana sorulara takiben farklı sorular da sorulmuştur. Ayrıca öğretmen adaylarının ölçekteki görüşleri ile yarı yapılandırılmış mülakatlarda belirttikleri

görüşleri karşılaştırılmış akabinde onların gerçek görüşlerini ortaya çıkaracak ve onların görüşlerini derinlemesine ölçecek nitelikte sorular yöneltilmiştir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlar, nitel veri çalışma grubu olarak belirlenen üç öğretmen adayıyla uygulama öncesi ve sonrası olmak üzere iki kez yapılmıştır. Mülakatların iki kez uygulanmasının amacı, ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerine etkisini derinlemesine incelemektir.

Mülakatlara gönüllü olarak katılan öğretmen adaylarına yarı yapılandırılmış mülakat protokolü imzalatılmıştır. Mülakatlar, katılımcılardan yazılı ve sözlü izin alınmak suretiyle ses kayıt cihazıyla kaydedilmiştir.

2.5. Veri Analizi

Nicel analiz için nicel betimsel analiz ve nicel kestirimsel analiz, nitel analiz için ise nitel betimsel analiz yapılmıştır.

2.5.1. İspat Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeğinin Analizi

Nicel veriler hem nümerik hem de kategorik olarak değerlendirilmiştir.

Nicel veriler analiz edilirken ölçeğin maddelerine verilen “kesinlikle katılıyorum” yanıtları olumlu görüş içeren maddelerde 5 puan, olumsuz görüş içeren maddelerde 1 puan, “katılıyorum” yanıtları olumlu görüş içeren maddelerde 4 puan, olumsuz görüş içeren maddelerde 2 puan, “kararsızım” yanıtları olumlu ve olumsuz görüş içeren maddelerde 3 puan, “katılmıyorum” yanıtları olumlu görüş içeren maddelerde 2 puan, olumsuz görüş içeren maddelerde 4 puan, “kesinlikle katılmıyorum” yanıtları ise olumlu görüş içeren maddelerde 1 puan, olumsuz görüş içeren maddelerde 5 puan olarak puanlanmıştır (Moralı ve ark., 2006). Öğretmen adaylarının yukarıda bahsedilen beş temel içerikteki görüşlerini belirlemek için ölçeğin ilgili maddeleri analiz edilmiştir.

100 puan üzerinden 70 puan üstü alan katılımcıların görüşleri kategorik olarak olumlu, 60 ve altı puan altı alan katılımcıların görüşleri kategorik olarak olumsuz, arada kalan katılımcıların görüşleri ise kategorik olarak kararsız olarak değerlendirilmektedir (Moralı ve ark., 2006).

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerine nümerik açıdan istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olup olmadığını belirlemek için Wilcoxon işaretli sıralar testi (Wilcoxon, 1945) kullanılmıştır. Non-paramaterik bir test olan Wilcoxon işaretli sıralar testi bu çalışmada a) örneklem sayısının az olması ve b) verilerin normal dağılım göstermemesi nedenleriyle, bağımlı örneklem t-testinin alternatifi (Can, 2017) olarak kullanılmıştır. Bu test, aynı örneklemin farklı iki zamana ait puanlarını sıralara dönüştürür ve onları karşılaştırıp istatistiksel olarak anlamlı bir fark olup olmadığını saptar (Pallant, 2007).

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüş puanlarına anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için test istatistiği Z ve olasılık p değerleri göz önüne alınmıştır. $p < 0,05$ ise %95 güven düzeyinde istatistiksel açıdan anlamlı bir etkinin olduğuna karar verilmiştir. Anlamlı bir etkinin var olduğuna karar verildiğinde bu etkinin yönünü saptamak için fark puanlarının sıra ortalaması ve sıra toplamı incelenmiştir. Fark puanlarının sıra ortalaması ve sıra toplamı negatif sıralar lehineyse bu anlamlı etkinin uygulama öncesi lehine olduğuna, pozitif sıralar lehineyse bu anlamlı etkinin uygulama sonrası lehine olduğuna karar verilmiştir. Ders tasarımının görüşler üzerine anlamlı bir etkisi varsa bu etkinin büyüklüğü $r = Z/\sqrt{n}$ formülüyle hesaplanmıştır (Pallant, 2007, s. 225). Etki büyüklüğü $r = 0,1$ ise küçük etki, $r = 0,3$ ise orta etki, $r = 0,5$ ise büyük etkidir (Cohen, 1988, s. 79-81). Etki büyüklüğü, belirlenen etkinin nesnel bir ölçüsüdür ve bir standartizasyon sağlar.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerine kategorik açıdan anlamlı bir etkisinin olup olmadığını belirlemek için Marjinal Homojenlik Testi (Agresti, 1983, 1990) kullanılmıştır. Marjinal homojenlik testi, aynı örneklemin farklı iki zamana ait kategorik verileri arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark olup olmadığını saptar (Agresti, 1990). $p < 0,05$ ise %95 güven düzeyinde istatistiksel açıdan anlamlı bir etkinin olduğuna karar verilmiştir.

2.5.2. Yarı Yapılandırılmış Mülakatların Analizi

Mülakatlardan elde edilen ses kayıtları metin haline getirilerek betimsel analiz yapılmıştır. Betimsel analiz için belirlenen tematik çerçeve ölçekteki kategorik görüşlerdir. Öğretmen adaylarıyla yapılan mülakatlardan elde edilen veriler olumsuz, kararsız ve olumlu kategorilerine göre analiz edilmiştir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlarda sorulan beş soruya verilen anlamlı, doğru ve olması gereken yönde kesinlik içeren yanıtlar “olumlu”, anlamsız, yanlış ve olmaması gereken yönde kesinlik içeren yanıtlar “olumsuz” ve arada kalan, kesinlik içermeyen çelişkili yanıtlar “kararsız” olarak kodlanmıştır. Örneğin “İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliklerinize ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız” sorusuna “İspat yapmaya

ilişkin kavramsal yeterliklerime bazen güveniyorum bazen güvenmiyorum” cevabını veren öğretmen adayının yanıtı kararsız olarak kodlanmıştır.

3. Bulgular

Bu bölümde öncelikle ölçekteki beş temel içeriğe ait uygulama öncesi ve sonrasına ait nümerik görüş puan ortalamaları ve kategorik görüşler madde bazlı olarak ele alınmış ve öğretmen adaylarındaki gelişim incelenmiştir. Öğretmen adaylarının görüşlerindeki gelişimleri derinlemesine incelemek için yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen verilere yer verilmiştir.

Tablo 1. Öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşlerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait madde bazlı puan ortalamaları ve kategorik görüşler

Madde	Uygulama Öncesi Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Öncesi Kategorik Görüş	Uygulama Sonrası Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Sonrası Kategorik Görüş
1. Matematiksel bir ispat olguları hem gerçekler, hem de açıklar.	83,64	Olumlu	91,82	Olumlu
2. Matematiksel bir sonuç ispatlandığında doğru olduğuna inanırım.	77,27	Olumlu	90,91	Olumlu
3. Bir sonucun örnekle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olmaz.	69,09	Kararsız	90,00	Olumlu
5. Matematikte sadece örnekler yardımcı ile bir şeyin doğru olup olmadığını anlayabiliriz.	74,55	Olumlu	95,45	Olumlu
11. Bir ispatın aşamaları üzerinde çalışmak, neden doğru olduğunu anlamama yardımcı oluyor.	80,91	Olumlu	95,45	Olumlu
12. Bir teoremin farklı ispatlarını görmek onu daha iyi anlamama yardımcı oluyor.	81,82	Olumlu	97,27	Olumlu
13. Matematiksel bir ispat, başka matematiksel sonuçlara da bağlıdır.	84,55	Olumlu	92,73	Olumlu
Ortalama	78,83	Olumlu	93,38	Olumlu

Tablo 1’den görüldüğü gibi ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklere yönelik görüşleri ölçen tüm maddelerde öğretmen adaylarının puan ortalamaları artış göstermiştir. Ancak en yüksek artış (3. madde 20,91 puan) “Bir sonucun örnekle gösterildiğini görmek, o sonucun neden doğru olduğunu anlamama her zaman yardımcı olmaz” (s. 159) maddesinde meydana gelmiştir. Öğretmen adayları uygulama öncesinde bir sonucun ispatlanmadan doğruluğunun örnekle gösterilmesinin o sonucun neden doğru olduğunu anlamalarına yardımcı olup olmadığı konusunda kararsız kalmışlardır. Bu soruda uygulama öncesi kararsız görüş bildiren öğretmen adayları uygulama sonrasında olumlu görüş bildirmişlerdir. Bir sonucun neden doğru olduğunun anlaşılmasına her zaman örnekler yeterli olmaz, o sonucun ispatı gerekebilir. Çünkü ispat bir sonucun sadece doğru olduğunu göstermekle kalmaz, onun neden doğru olduğunu da açıklar, böyle bir işlevi de vardır. Bu maddede öğretmen adaylarının olumlu görüş bildirmesi önemlidir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan öğretmen adayları, kavramsal yeterliliklerine yönelik ölçekteki görüşlerinin aksine mülakatlarda daha olumlu olmayan görüşler beyan etmişlerdir. Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan üç öğretmen adayının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşleri analiz edildiğinde bir öğretmen adayının görüşü uygulama öncesinde kararsız, uygulama sonrasında ise olumlu, diğer iki öğretmen adayının görüşleri de uygulama öncesinde olumsuz iken uygulama sonrasında da olumludur.

İspatlamaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşleri uygulama öncesinde kararsız, uygulama sonrasında ise olumlu olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde “kavramsal yeterliliklerime bazen güveniyorum bazen güvenmiyorum” diyerek kararsız bir görüş bildirirken, uygulama sonrasında ise “kavramsal yeterliliklerime çok güveniyorum” diyerek tamamen olumlu bir görüş bildirmiştir.

M: İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerinize ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)

ÖA1: İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerime bazen güveniyorum bazen güvenmiyorum. Çünkü bazen bilmediğim şeyler oluyor. O zaman da ispat eksik kalıyor. Kavramları tam olarak bilmeden ispatı tamamlayamayız. O yüzden kavramları bilmek önemli.

M: İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerinize ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

ÖA1: Bu dersten sonra ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerime çok güveniyorum. Bu ders sayesinde ispat yapmak için gerekli olan kavramları öğrendim.

İspatlamaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşleri uygulama öncesinde olumsuz, uygulama sonrasında ise olumlu olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde kavramsal yeterliliklerine “hiçbir şekilde güvenmiyorum” diyerek tamamen olumsuz bir görüş bildirirken, uygulama sonrasında ise “kavramsal yeterliliklerime çok güveniyorum” diyerek tamamen olumlu bir görüş bildirmiştir.

M: İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerinize ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)

ÖA3: Hiçbir şekilde güvenmiyorum. Çünkü hiçbir şey bilmiyorum.

M: İspat nedir? Ne değildir? Onlarla ilgili kavramsal bilgin var mı?

ÖA3: Hiçbir bilgim yok.

M: İspat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerinize ne kadar güveniyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

ÖA3: Dersten önce ispatla ilgili hiçbir kavramı bilmiyorken, tek bir cümle kuramıyorken, şimdi kavramsal yeterliliklerine çok güveniyorum.

Tablo 2. Öğretmen adaylarının ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşlerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait madde bazlı puan ortalamaları ve kategorik görüşler

Madde	Uygulama Öncesi Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Öncesi Kategorik Görüş	Uygulama Sonrası Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Sonrası Kategorik Görüş
10. Kendi kendime ispat yapabilme becerime güveniyorum.	62,73	Kararsız	81,82	Olumlu
14. İspatları anlamada genellikle zorlanıyorum.	64,55	Kararsız	83,64	Olumlu
Ortalama	63,64	Kararsız	82,73	Olumlu

Tablo 2’den görüldüğü gibi öğretmen adaylarının ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüş puanlarında iki maddede 19,09 puanlık bir artış meydana gelmiştir. “Kendi kendime ispat yapabilme becerime güveniyorum” ve “İspatları anlamada genellikle zorlanıyorum” maddelerinde (s. 160) uygulama öncesinde kararsız görüş bildiren öğretmen adayları, uygulama sonrasında olumlu görüş bildirmişlerdir. Uygulamanın öğretmen adaylarının kendi kendilerine ispat yapabilme becerilerine güvenmelerine ve ispatları anlamalarına kategorik etkisinin olduğu görülmektedir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan üç öğretmen adayının ispat yapmaya ilişkin benlik algılarına yönelik görüşleri analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesinde görüşleri kararsız, uygulama sonrasında ise olumlu, diğer öğretmen adayının da uygulama öncesinde görüşleri olumsuz iken uygulama sonrasında da kararsızdır.

İspatlamaya ilişkin benlik algılarına yönelik görüşleri uygulama öncesinde kararsız, uygulama sonrasında ise olumlu olan bir öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde genelde kendine güvendiğini belirtse de bazen de kendine güvenmediğini belirterek kararsız bir görüş bildirmiştir. Uygulama sonrasında ise benlik algılarına kesinlikle güvendiğini belirterek olumlu görüş bildirmiştir.

M: İspat yapmaya ilişkin benlik algılarınıza ne kadar güveniyorsunuz? (Uygulama Öncesi)

ÖA1: İspat yapmak için insanın kendine güvenmesi gerekir. Kendime güveniyorum. Aslında o biraz da öğreten kişiye bağlı. Nasıl anlatsam matematiği seviyorum. Bugüne kadar hep bilgilerimi geliştirdim. Bilgilerime de o yüzden güveniyorum. İspatın genelde üstesinden gelirim diye düşünüyorum. Genelde ispatı yapıyorum kendime güveniyorum. Ama bazen de yapamıyorum o zaman da güvenmiyorum.

M: İspat yapmaya ilişkin benlik algılarınıza ne kadar güveniyorsunuz? (Uygulama Sonrası)

ÖA1: Dersten önce ispat yapmaya ilişkin benlik algılarımda kararsızdım. Ben yapamam vardı açıkçası. Dersten önce bir soru beni korkuttuğu zaman, görüntü olarak korkuttuğu zaman, o soruyu es geçebiliyordum. Şimdi çözerim diyorum ama bu ders sayesinde.

İspatlamaya ilişkin benlik algılarına yönelik görüşleri uygulama öncesinde olumsuz, uygulama sonrasında ise kararsız olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde kendine güvenmediğini belirterek olumsuz görüş bildirmiştir. Uygulama sonrasında ise dersten

öncesine göre kendine daha çok güvendiğini belirtse de hala eksikleri olduğunu söyleyerek kararsız görüş bildirmiştir.

M: İspat yapmaya ilişkin benlik algularınıza ne kadar güveniyorsunuz? (Uygulama Öncesi)

ÖA3: Ben üniversiteye gelene kadar hiçbir ispat yapmamış bir kişiyim. Hatta aksiyom vesaire 9. sınıfta bize veriyorlardı ama onları bile hiç okumamıştım. Yazılıda çıkması bile umurumda değildi. Hiç bakmadım. Hiç hoşuma gitmedi çünkü. Yani matematiğin hep sayısal kısmıyla ilgilenmiş bir kişiyim. Ama ispatı yapmam gerektiğini biliyorum öğretmen adayı olarak. İnşallah yapacağıma inanıyorum. Çalışırsam yaparım yani.

M: Peki şu an için?

ÖA3: Şu an için kendime güvenmiyorum, pek yapamıyorum, bilgilerime de güvenmiyorum.

M: İspat yapmaya ilişkin benlik algularınıza ne kadar güveniyorsunuz? (Uygulama Sonrası)

ÖA3: Eskisine göre daha iyi. Ama hala kararsızlıklarım var.

M: Ne zaman kararsızlık yaşıyorsun?

ÖA3: İlk defa gördüğüm farklı ispat sorularında.

Tablo 3. Öğretmen adaylarının ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait madde bazlı puan ortalamaları ve kategorik görüşler

Madde	Uygulama Öncesi Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Öncesi Kategorik Görüş	Uygulama Sonrası Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Sonrası Kategorik Görüş
4. İspat, teorik matematik için vazgeçilmezdir.	87,27	Olumlu	94,55	Olumlu
6. İspatları neden yapmamız gerektiğini <u>anlamıyorum</u> ; derste gördüğümüz bütün sonuçlar daha önceden ünlü matematikçiler tarafından şüphe götürmez bir şekilde kanıtlanmış.	74,55	Olumlu	95,45	Olumlu
8. Eğer matematikte bir sonuç açıkça doğruysa ispatlanmasının bir anlamı yoktur.	75,45	Olumlu	90,91	Olumlu
17. Bence teoremi (ya da önermeyi) bilmek ispatını yapmaktan daha önemlidir.	71,82	Olumlu	89,09	Olumlu
Ortalama	77,27	Olumlu	92,50	Olumlu

Tablo 3'ten görüldüğü gibi öğretmen adaylarının ispat yapmanın önemine ilişkin görüş puanlarında en yüksek artış (6. madde 20,9 puan) “İspatları neden yapmamız gerektiğini anlamıyorum; derste gördüğümüz bütün sonuçlar daha önceden ünlü matematikçiler tarafından şüphe götürmez bir şekilde kanıtlanmış” maddesinde (s. 159) meydana gelmiştir. İspat yapmanın önemine ilişkin görüşleri ölçen diğer üç maddede de öğretmen adaylarının puan ortalamaları artış göstermiştir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan üç öğretmen adayının ispat yapmanın önemine ilişkin görüşleri analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrasında görüşleri olumlu, diğer öğretmen adayının da uygulama öncesinde görüşleri olumsuz iken uygulama sonrasında da olumludur.

İspat yapmanın önemine ilişkin görüşleri uygulama öncesinde olumsuz, uygulama sonrasında olumlu olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde “ispatın fazla önemli olduğunu düşünmüyorum” diyerek olumsuz bir görüş bildirirken, uygulama sonrasında ise ispatın önemli olduğuna vurgu yaparak olumlu görüş bildirmiştir.

M: İspat yapmanın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)

ÖA2: İspatın fazla önemli olduğunu düşünmüyorum. Yani bizim için ortaöğretim öğretmenleri için.

M: Kimin için önemli?

ÖA2: Akademisyen için önemli. Akademisyenlerin bu konuda çalışma yapması lazım. Ama bizim okulda da dâhil bize gösterilmesine karşıyım. Bizden de akademik kariyer yapmak isteyenlere yönelik çalışma zaten bu. Ben şu an hiç kullanmayacağım şeyleri görüyorum alan derslerinde. Ben öğretmen olduğum zaman benim işime yaramayacak.

M: Şu an işine yarıyor mu öğrenirken?

ÖA2: Öğrenirken de yaramıyor sadece pratik.

M: Matematiğin öğrenilmesinde, öğrenilmesinde bir etkisi var mı?

ÖA2: Matematiğin öğrenilmesinde de bazı şeylerin öğrenilmesine yarıyor aslında ama bunu anlatamadıktan sonra yine kendi içinde kalıyor. Bir yerden sonra yine unutulup gider. Ben ispatı kullanabileceğimi bilsem buna daha çok sarılırdım aslında.

M: İspat yapmanın önemi hakkında ne düşünüyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

ÖA2: Öğretmen olarak bence önemli. Öğrenci her şeyi sorabilir. Öğrenciye bir şey olmaz, ispat yapmadan da ilerleyebilir belki ama öğretmen ispatlarsa öğrencinin kafasında daha iyi yer eder. O yüzden öğretmen, öğretmen adayının daha çok dikkat etmesi lazım.

M: Üniversitedeki öğrenciler için lazım mı?

ÖA2: Çoğu bölüm için değil ama bizim bölüm için lazım.

M: Neden önemli bu ispat?

ÖA2: Çünkü kafada soru işareti bırakmıyor.

M: Kesinleştiriyor mu?

ÖA2: Aynen. İspatın olayı o zaten.

Tablo 4. Öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin genel görüşlerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait madde bazlı puan ortalamaları ve kategorik görüşler

Madde	Uygulama Öncesi Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Öncesi Kategorik Görüş	Uygulama Sonrası Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Sonrası Kategorik Görüş
7. İspatlar bazen pek de açıkça anlaşılmayan stratejiler içerirler.	42,73	Olumsuz	69,09	Kararsız
15. İspat yapmak bir anlamda problem çözmedir.	78,18	Olumlu	88,18	Olumlu
16. Matematiksel ispatları yalnızca profesyonel matematikçiler yapabilir.	79,09	Olumlu	94,55	Olumlu
19. Genelde bir teoremin ne ifade ettiğini anlamama rağmen ispatını anlamada zorlanıyorum.	57,27	Olumsuz	81,82	Olumlu
20. Bir ispatı ancak sınıfta hoca yapınca anlayabiliyorum.	67,27	Kararsız	89,09	Olumlu
Ortalama	64,91	Kararsız	84,55	Olumlu

Tablo 4'ten görüldüğü gibi öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin genel görüş puanlarında en yüksek artış (7. madde 26,36 puan) "İspatlar bazen pek de açıkça anlaşılmayan stratejiler içerirler" maddesinde (s. 159) meydana gelmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adayları ispatların anlaşılmayan stratejiler içerdiğini düşünmektedirler. Uygulama sonrasında ise kararsız kalmışlardır. İspatlarda yer alan stratejilerin öğretmen adayları tarafından anlaşılması önemlidir. Kategorik görüşün değiştiği diğer bir madde (19. madde 24,55 puan) "Genelde bir teoremin ne ifade ettiğini anlamama rağmen ispatını anlamada zorlanıyorum" maddesinde (s. 160) uygulama öncesinde olumsuz görüş bildiren öğretmen adayları, uygulama sonrasında olumlu görüş bildirmişlerdir. Uygulama öncesinde öğretmen adayları teoremleri anlasalar bile ispatlarını anlamada zorlandıklarını düşünmekteydiler. Uygulama sonrasında ise ispatları da anladıkları görüşüne hâkim olmuşlardır. Öğretmen adayları teoremler kadar ispatlarını da anlamalıdır. Son olarak kategorik görüşün değiştiği başka bir madde (20. madde 21,82 puan) ispatı ancak sınıfta öğretim elemanı yapınca anlayabiliyorum maddesidir. Uygulama öncesinde kararsız görüş bildiren öğretmen adayları, uygulama sonrasında olumlu görüş bildirmişlerdir. Uygulama öncesinde öğretmen adayları öğretim elemanı yapmadan ispatı anlayamayacakları konusunda kararsız görüşe hâkimdiler. Ancak uygulama sonrasında kendi başlarına da ispatı anlayabilecekleri düşüncesindeydiler. Öğretmen adayları ispatları kendi uğraşları ile anlayabilmelidirler. Kategorik değişimin olmadığı diğer iki maddede de öğretmen adaylarının puan ortalamalarında yadsınamayacak bir artışın olduğu görülmektedir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan üç öğretmen adayının ispat yapmaya ilişkin genel görüşleri analiz edildiğinde iki öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrasında görüşleri olumlu, diğer öğretmen adayının da uygulama öncesinde görüşleri olumsuz iken uygulama sonrasında da olumludur. Ancak görüşleri olumlu olan öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin görüşlerinin, uygulama sonrasında daha da netleştiği görülmektedir.

İspat yapmaya ilişkin genel görüşleri uygulama öncesinde olumsuz, uygulama sonrasında olumlu olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayı uygulama öncesinde teoremlerin faydasız olduğunu ispatlardan bir şey elde edilmediğini belirterek tamamen olumsuz görüş bildirmiştir. Uygulama sonrasında ise görüşlerinin olumlu olduğunu belirtmiştir.

M: İspat yapmaya ilişkin genel görüşlerinizi açıklayınız. (Uygulama Öncesi)

ÖA2: ... Bizim gördüğümüz ispatlar da aslında biraz o olaya bakış açımızı değiştiriyor, yani biz çok farklı teoremlerin ispatını görüyoruz. Biraz daha faydalı şeyler görsek biraz daha faydalı teoremler görsek.

M: Bir tane faydalı teorem söyley misin?

ÖA2: Hocam bu mesela hani ne olabilir, bu şey Fibonacci falan.

M: Onlar faydalı mı?

ÖA2: Fibonacci gibi bir örnekle akla yatan. O kadar karmaşık ispatlarla uğraşıyoruz sonra bir şey elde etmiyoruz. İspatlasak da bir şey elde edemiyoruz. İspatlıyoruz ama ne oldu yani! Neyi ispatladık!

M: İspat yapmaya ilişkin genel görüşlerinizi açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

ÖA2: İspatlamaya ilişkin genel görüşlerim olumlu oldu dersten sonra. Çünkü ispatın bana bir şeyler kattığını hissettim bana. Zihinsel açıdan geliştirdiğini hissettim. İspatları anlayabiliyorum, kendi kendime yapabiliyorum.

Tablo 5. Öğretmen adaylarının ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüşlerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait madde bazlı puan ortalamaları ve kategorik görüşler

Madde	Uygulama Öncesi Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Öncesi Kategorik Görüş	Uygulama Sonrası Nümerik Görüş Puan Ortalaması	Uygulama Sonrası Kategorik Görüş
9. Matematiksel ispat yapmayı seviyorum.	71,82	Olumlu	89,09	Olumlu
18. İspatlarla uğraşmak çok sıkıcıdır.	69,09	Kararsız	90,00	Olumlu
Ortalama	70,46	Olumlu	89,55	Olumlu

Tablo 5'ten görüldüğü gibi öğretmen adaylarının ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüş puanlarında en yüksek artış (18. madde 20,91 puan) "İspatlarla uğraşmak çok sıkıcıdır" maddesinde (s. 160) meydana gelmiştir. Bu soruda uygulama öncesi kararsız görüş bildiren öğretmen adayları uygulama sonrasında olumlu görüş bildirmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispatlarla uğraşmaktan sıkılmaması ispat öğrenimi ve öğretimi açısından oldukça önemlidir. İspat yapma ile ilgili duyguları ölçen diğer maddede de öğretmen adaylarının ortalama puanlarının önemli bir artış gösterdiği görülmektedir.

Yarı yapılandırılmış mülakatlara katılan üç öğretmen adayının ispat yapmaya ilişkin duyguları incelendiğinde bir öğretmen adayının uygulama öncesi ve sonrasında duyguları olumlu, bir öğretmen adayının uygulama öncesinde duyguları olumsuz, uygulama sonrasında ise olumlu, diğer öğretmen adayının da uygulama öncesinde duyguları kararsız iken uygulama sonrasında da olumludur.

Uygulama öncesinde görüşleri kararsız uygulama sonrasında ise görüşleri olumlu olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayının uygulama öncesindeki görüşlerinde kararsızlık görülmüştür. Uygulama sonrasında ise öğretmen adayının olumlu görüşlere sahip olduğu görülmüştür.

M: İspat yaparken ne hissediyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)

ÖA2: İspat yaparken hafif mutlu oluyorum.

M: Niye hafif?

ÖA2: Bir şey yapamadığımı hissediyorum. Yaparken heyecanlanıyorum, ispatladığım zaman mutlu oluyorum, yapamadığım zamanlarda başka kişilere danışıyorum. Yaptığım zaman rahatlıyorum. Yapamadığım zaman sıkıntıya giriyorum. Gece falan uyumadığım oldu, birkaç kez internette videolara bakıyorum, hoca var açıyorum yapamadığım zamanlarda.

M: İspat yaparken ne hissediyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

ÖA2: Sene başında ben ispata dair hiçbir şey bilmiyordum. İspatın ne olduğunu dâhi bilmiyordum. Gereksiz ve saçma geliyordu açıkçası. Sonra ispat yöntemlerini gördük derste yedi tane. Çoğu şeyin mantıklı bir şekilde yürüdüğünü ve ilerlediğini gördüm. Mantığını oturtuktan sonra ispatı daha çok sevmeye başladım. Hem ispatı yapmaya başladım hem sevmeye başladım. Örneğin kök 7 sayısının irrasyonel olduğunun ispatı beni çok etkiledi. Onu hiç düşünmüyordum. Bu nasıl ispatlanır hiçbir şey aklıma gelmiyordu. Başlarken heyecanlanıyorum, işlem yaparken zevk alıyorum.

Uygulama öncesinde duyguları olumsuz, uygulama sonrasında ise duyguları olumlu olan öğretmen adayına ilişkin mülakat diyaloglarına aşağıda yer verilmiştir. Öğretmen adayını uygulama öncesinde ispat yapamadığı için kendini kötü hissettiğini belirterek tamamen olumsuz görüş bildirirken, uygulama sonrasında eğlendiğini ve mutlu olduğunu belirterek tamamen olumlu görüş bildirmiştir.

M: İspat yaparken ne hissediyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Öncesi)

ÖA3: İspat yaparken sanki hiç yapamayacakmışım gibi geliyor. İspat yaparken kendimi çok bilgisiz hissediyorum ya da kendini hiçbir şey üretemeyen biri gibi görüyorum. Herhangi bir çözüm yolu bulamıyorum. Ne bileyim kafamda olan bilgiler var ama onu yazıya dökemiyorum. Kendimi ifade edemiyorum.

M: Peki bunlar sana nasıl yansıyor?

ÖA3: Kötü hissediyorum.

M: İspat yaparken ne hissediyorsunuz? Açıklayınız. (Uygulama Sonrası)

ÖA3: Güzelmiş ispat yapmak. Dersten önce ispat yapamadığım için sıkılıyordum. Hoşlanmıyordum. Ama dersten sonra sevmeye başladım eğlenceliymiş.

M: Nedir eğlenceli yanı?

ÖA3: Bir şeyler bulmak, onu oradan çekmek, bir şeye ulaşmak, sonuca ulaşmak insanı mutlu ediyor.

M: Ders öncesi ve sonrası arasında fark var mı?

ÖA3: Şimdi daha çok yapabildiğim için daha çok seviyorum.

M: Yapabilir misin yani?

ÖA3: Soruya ilk baktığımda bunu bu yöntemle, şunu şu yöntemle yapabilirim diye aklımdan geçiriyor.

Buraya kadar ifade edilenlerden ders tasarımının öğretmen adaylarının nümerik ve kategorik görüşlerine bir etkisinin olduğu görülmektedir. Ancak bu etkinin istatistiksel açıdan anlamlı olup olmadığını incelemek için kestirimsel çözümler yapılmıştır. Öncelikle ders tasarımının öğretmen adaylarının nümerik görüşlerine istatistiksel açıdan anlamlı bir etkisinin olup olmadığını saptamak için Wilcoxon işaretli sıralar testi uygulanmıştır.

Tablo 6. Öğretmen adaylarının görüş puanlarına ilişkin uygulama öncesi ve sonrasına ait Wilcoxon İşaretli Sıralar Test Çıktıları tablosu

İçerik	Uygulama Sonrası- Uygulama-Öncesi	N	Sıra Ortalaması	Sıra Toplamı	Z	p	Etki Büyüklüğü
KYG	Negatif Sıralar	0 ^a	0,00	0,00	-4,113*	<0,001	-0,88
	Pozitif Sıralar	22 ^b	11,50	253,00			
	Eşit	0 ^c					
BAG	Negatif Sıralar	2 ^a	3,00	6,00	-3,488*	<0,001	-0,74
	Pozitif Sıralar	16 ^b	10,31	165,00			
	Eşit	4 ^c					
ÖG	Negatif Sıralar	0 ^a	0,00	0,00	-3,841*	<0,001	-0,82
	Pozitif Sıralar	19 ^b	10,00	190,00			
	Eşit	3 ^c					
GG	Negatif Sıralar	0 ^a	0,00	0,00	-3,834*	<0,001	-0,82
	Pozitif Sıralar	19 ^b	10,00	190,00			
	Eşit	3 ^c					
DG	Negatif Sıralar	2 ^a	4,00	8,00	-3,530*	<0,001	-0,75
	Pozitif Sıralar	17 ^b	10,71	182,00			
	Eşit	3 ^c					
Tüm Ölçek	Negatif Sıralar	0 ^a	0,00	0,00	-4,018*	<0,001	-0,86
	Pozitif Sıralar	21 ^b	11,00	231,00			
	Eşit	1 ^c					

* Negatif Sıralar Temeline Dayalı, ^a uygulama sonrası görüş puanı < uygulama öncesi görüş puanı, ^b uygulama sonrası görüş puanı > uygulama öncesi görüş puanı, ^c uygulama sonrası görüş puanı = uygulama öncesi görüş puanı.

Tablo 6'dan görüldüğü gibi ders tasarımının, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüş puanlarına, uygulama sonrası lehine (sıra ortalaması ve sıra toplamı) anlamlı ($Z = -4,113, p < 0,001$) ve büyük bir etkisi ($|-0,88| > 0,5$) vardır. Ayrıca tablodan tüm öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüş puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir.

Ders tasarımının, öğretmen adaylarının ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüş puanlarına, uygulama sonrası lehine (sıra ortalaması ve sıra toplamı) anlamlı ($Z = -3,488, p < 0,001$) ve büyük bir etkisi ($|-0,74| > 0,5$) vardır. Ayrıca tablodan 16 öğretmen adayının ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüş puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. 4 öğretmen adayının puanları uygulama öncesi ve sonrasında aynı kalmış, sadece 2 öğretmen adayının puanlarında düşüş olmuştur.

Ders tasarımının, öğretmen adaylarının ispat yapmanın önemine ilişkin görüş puanlarına, uygulama sonrası lehine (sıra ortalaması ve sıra toplamı) anlamlı ($Z = -3,841, p < 0,001$) ve büyük bir etkisi ($|-0,82| > 0,5$) vardır. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarından 19'unun ispat yapmanın önemine ilişkin görüş puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. Kalan 3 tanesinin de puanı uygulama öncesi ve sonrasında aynı kalmıştır. Puanında düşüş olan öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Ders tasarımının, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin genel görüş puanlarına, uygulama sonrası lehine (sıra ortalaması ve sıra toplamı) anlamlı ($Z = -3,834, p < 0,001$) ve büyük bir etkisi ($|-0,82| > 0,5$) vardır. Ayrıca tablodan öğretmen adaylarından 19'unun ispat yapmaya ilişkin genel görüş puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. Kalan 3 tanesinin de puanı uygulama öncesi ve sonrasında aynı kalmıştır. Puanında düşüş olan öğretmen adayı bulunmamaktadır.

Ders tasarımının, öğretmen adaylarının ispat yapma ile ilgili duygularına yönelik görüş puanlarına, uygulama sonrası lehine (sıra ortalaması ve sıra toplamı) anlamlı ($Z = -3,530, p < 0,001$) ve büyük bir etkisi ($|-0,75| > 0,5$) vardır. Ayrıca tablodan 17 öğretmen adayının ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüş

puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. 3 öğretmen adayının puanları uygulama öncesi ve sonrasında aynı kalmış, sadece 2 öğretmen adayının puanlarında düşüş olmuştur.

Ders tasarımının, öğretmen adaylarının ispat yapma ile ilgili görüş puanlarına, uygulama sonrası lehine (sıra ortalaması ve sıra toplamı) anlamlı ($Z = -4,018, p < 0,001$) ve büyük bir etkisi ($|-0,86| > 0,5$) vardır. Ayrıca tablodan 21 öğretmen adayının ispat yapmaya yönelik görüş puanlarının uygulama sonrasında arttığı görülmektedir. Görüş puanı uygulama sonrası düşen hiçbir öğretmen adayı bulunmazken uygulama öncesi ve sonrası görüş puanı aynı olan 1 öğretmen adayı bulunmaktadır.

Ders tasarımının öğretmen adaylarının nümerik görüşlerine anlamlı etkisinin olduğu saptandıktan sonra kategorik görüşlerine anlamlı etkisinin olup olmadığını saptamak için Marjinal homojenlik testi uygulanmıştır.

Tablo 7. Öğretmen adaylarının kategorik görüşlerine dair uygulama öncesi ve sonrasına ait Marjinal Homojenlik Test çıktıları tablosu

İçerik	Uygulama Sonrası- Uygulama-Öncesi	N	p
KYG	Negatif Sıralar	0 ^a	Hesaplanamadı
	Pozitif Sıralar	3 ^b	
	Eşit	19 ^c	
BAG	Negatif Sıralar	1 ^a	0,001
	Pozitif Sıralar	15 ^b	
	Eşit	6 ^c	
ÖG	Negatif Sıralar	0 ^a	0,020
	Pozitif Sıralar	6 ^b	
	Eşit	16 ^c	
GG	Negatif Sıralar	0 ^a	0,001
	Pozitif Sıralar	13 ^b	
	Eşit	9 ^c	
DG	Negatif Sıralar	0 ^a	0,001
	Pozitif Sıralar	12 ^b	
	Eşit	10 ^c	
Tüm Ölçek	Negatif Sıralar	0 ^a	0,003
	Pozitif Sıralar	9 ^b	
	Eşit	13 ^c	

^a uygulama sonrası görüş puanı < uygulama öncesi görüş puanı, ^b uygulama sonrası görüş puanı > uygulama öncesi görüş puanı, ^c uygulama sonrası görüş puanı = uygulama öncesi görüş puanı.

Tablo 7'den ders tasarımının öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşlerine kategorik açıdan pozitif yönde etkisi olduğu görülmektedir. Tablodan 3 öğretmen adayının görüşlerinin kategorik olarak yükseldiği, diğer 19 öğretmen adayının görüşlerinde kategorik olarak değişim olmadığı görülmektedir. Ancak test istatistiği hesaplanamamıştır. Bunun nedeni her seviye (olumsuz, kararsız ve olumlu) için uygun veya önemli sonuçlar toplamak için yeterli katılımcı olmamasıdır. Kategorik açıdan hesaplama yapılması için gerekli olan sayıda kategorik değişim olmadığı için hesaplama yapılamamıştır. Ancak ders tasarımının öğretmen adaylarının, ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşlerine ($p = 0,001$), ispat yapmanın önemine ilişkin görüşlerine ($p = 0,020$), ispat yapmaya ilişkin genel görüşlerine ($p = 0,001$), ispat yapma ile ilgili duygularına ($p = 0,001$) kategorik açıdan istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğu görülmektedir. Ayrıca tablodan görüşlerdeki kategorik değişimlerin yönüne bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin uygulama sonrası lehine olduğu görülmektedir.

Yine tablodan ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşler incelendiğinde 15 öğretmen adayının, ispat yapmanın önemine ilişkin görüşler incelendiğinde 6 öğretmen adayının, ispat yapmaya ilişkin genel görüşler incelendiğinde 13 öğretmen adayının, ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüşler incelendiğinde 12 öğretmen adayının kategorik olarak yükseldiği görülmektedir. Uygulama öncesi ve sonrası 6 öğretmen adayının ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşleri, 16 öğretmen adayının ispat yapmanın önemine ilişkin görüşleri, 9 öğretmen adayının ispat yapmaya ilişkin genel görüşleri, 10 öğretmen adayının da ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüşleri aynı kalmıştır. Sadece 1 öğretmen adayının ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşünde kategorik olarak düşüş olduğu görülmektedir. Diğer hiçbir içerikte hiçbir öğretmen adayının kategorik görüşünde düşüş yaşanmamıştır.

Sonuç olarak ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatlamaya yönelik görüşlerine kategorik açıdan istatistiksel olarak anlamlı bir etkisinin olduğu ($p = 0,003$) görülmektedir. Ayrıca tablodan görüşlerdeki kategorik değişikliklere bakıldığında istatistiksel olarak anlamlı bulunan bu etkinin uygulama sonrası lehine

olduğu görülmektedir. Tablodan 9 öğretmen adayının ispatlamaya yönelik görüşlerinin kategorik olarak yükseldiği görülmektedir. 13 öğretmen adayının görüşleri kategorik olarak uygulama öncesi ve sonrasında aynı kalmıştır. Bunun nedeni bu 13 öğretmen adayının uygulama öncesinde de olumlu görüşe sahip olmalarıdır. O yüzden görüş puanlarındaki artışlar bu öğretmen adaylarında kategorik olarak değişime sebep olmamıştır.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Uygulama öncesinde ölçekten elde edilen nicel bulgular incelendiğinde, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüşlerini, ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüşlerini, ispat yapmaya ilişkin genel görüşlerini ve ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüşlerini oluşturan bazı maddelerde olumlu olmayan görüşlere sahip oldukları görülmektedir.

Uygulama sonrasında 20 maddelik ölçekte öğretmen adaylarının nümerik görüş puan ortalamalarının 60 puan ve altında kaldığı, yani kategorik olarak olumsuz görüşe denk düşen hiçbir madde kalmamıştır. Ancak kategorik olarak kararsız görüşe denk düşen tek bir madde vardır o da “İspatlar bazen pek de açıkça anlaşılmayan stratejiler içerirler” maddesidir. Weber (2001) üniversite öğrenimine devam eden öğrencilerin ispatlamada yaşadıkları güçlüğü stratejik bilgi eksikliğinden kaynaklandığını belirtmiş ve bunun üstesinden gelmek için stratejik bilgi kazandırmanın önemini vurgulamıştır. Bu yüzden bir sonraki döngüde, ders tasarımına, öğretmen adaylarına stratejik bilgi kazandırılmasına yönelik, her bir ispat yöntemi için ayrı çalışmalar eklenmesine karar verilmiştir. Matematikçilere göre her ispat, farklı anahtar fikirler içermektedir (Doruk ve Kaplan, 2013). Her ispat yöntemi için bu fikirlere uygun stratejilerin benimsendiği ve bu stratejilerden hareketle ispatlamaların yapıldığı çalışmalar, öğretmen adaylarının bu maddedeki kararsızlıklarının üstesinden gelebilir.

Uygulama öncesi ve sonrası ölçekten elde edilen nicel bulgular karşılaştırıldığında, ders tasarımının öğretmen adaylarının, ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüş puanlarına, ispat yapma benlik algılarına ilişkin görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine, ispat yapmanın önemine ilişkin görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine, ispat yapmaya ilişkin genel görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine, ispat yapma ile ilgili duygularına yönelik görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine ve ispat yapma ile ilgili görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine uygulama sonrası lehihe anlamlı bir etkisinin olduğu görülmektedir.

Uygulama öncesinde yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen nitel bulgular incelendiğinde, öğretmen adaylarının, ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik kategorik görüşlerinde, ispat yapma benlik algılarına ilişkin kategorik görüşlerinde, ispat yapmanın önemine ilişkin kategorik görüşlerinde, ispat yapmaya ilişkin genel kategorik görüşlerinde ve ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin kategorik görüşlerinde bazı olumlu olmayan görüşlere sahip oldukları görülmektedir.

Uygulama sonrası yapılan yarı yapılandırılmış mülakatlarda, üç öğretmen adayı ispat yapma benlik algısına yönelik görüşleri dışındaki tüm içeriklerde olumlu görüşlere erişmişlerdir. İspat yapma benlik algısına yönelik görüşlerde de sadece bir öğretmen adayı kararsız görüş bildirmiştir. Bu öğretmen adayının kararsız olmasının sebebi ilk defa gördüğü önermeleri ispatlamada güçlük yaşamasıdır. Bu ispatın karmaşık yapısından kaynaklı olarak aslında her ispatlayıcının yaşayabileceği bir endişedir.

Uygulama öncesi ve sonrası yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen nitel bulgular karşılaştırıldığında, ders tasarımının öğretmen adaylarının, ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik kategorik görüşlerine, ispat yapma benlik algılarına ilişkin kategorik görüşlerine, ispat yapmanın önemine ilişkin kategorik görüşlerine, ispat yapmaya ilişkin genel kategorik görüşlerine, ispat yapma ile ilgili duygularına yönelik kategorik görüşlerine ve ispat yapma ile ilgili kategorik görüşlerine uygulama sonrası lehihe olumlu etkisinin olduğu görülmektedir.

Uygulama öncesi ve sonrası ölçekten ve yarı yapılandırılmış mülakatlardan elde edilen veriler karşılaştırıldığında, ders tasarımının öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerine pozitif etkisinin olduğu görülmektedir. Bu etkinin sebebi, uygulamanın öğretmen adaylarının, ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmiş olması olabilir. Alan ve pedagojik alan bilgisi gelişen öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüşlerinin gelişmiş olması muhtemeldir. Öğretmen adaylarının bir konudaki bilişsel davranışlarındaki gelişimlerin, onların duyuşsal davranışlarını da geliştirmiş olması olasıdır. Tyler'in (1973) çalışmasında belirttiği gibi bireylerde bilişsel öğrenmeler sağlanırken, bunun sonucu olarak duyuşsal gelişimlerde ortaya çıkabilir (Tyler, 1973'den akt., Yakar ve Duman, 2017, s. 44).

Öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik eksikliklerini gidermek için uygulama sürecine *ispatın modern bileşenleri* adlı bir modülle başlanmıştır. Bu modülde, öğretmen adaylarına aksiyomatik yapı içerisinde, terimler (tanımsız terimler ve tanımlar), önermeler (varsayımlar, teoremler ve yanlış önermeler), ayrıca teoremler başlığı altında aksiyomlar, postulatlar, lemmalar ve sonuçlar ayrıntılı aktarılmıştır. Tüm bunların, onların ispat yapmaya ilişkin kavramsal yeterliliklerine yönelik görüş puanlarına katkı sağladığı düşünülmektedir. Çünkü ispatın bu bileşenlerinin iyi kavranması, öğretmen adaylarının kavramsal yeterliklerine daha çok güvenmelerini sağlamış olabilir. Derslerde ispatın işlevlerinden bahsedilmesi, öğretmen adaylarının

ispat olguları hem gerçekler hem de açıklar maddesindeki görüşlerini geliştirmiş olabilir. Öğretmen adaylarına ispat şemalarının anlatılması ve derslerde ispatların analitik şemada yapılması onları dışsal ve deneysel şemalardan uzaklaştırmış olabilir. Böylece öğretmen adayları ispat için örneklerin, şekillerin veya dışsal kaynakların yeterli olmadığını idrak etmiş olabilirler. Derslerde bir teoremin analitik şemada farklı ispatlarının yapılması öğretmen adaylarının o teoremleri daha iyi anlamalarına katkı sağlamış olabilir. Yine derslerde ispatlar yapılırken, ihtiyaç duyulduğunda başkaca lemma ve sonuçların kullanılması da öğretmen adaylarının bir ispatın başka sonuçlara da bağlı olduğu maddesindeki görüşlerini geliştirmiş olabilir.

Öğretmen adaylarının benlik algılarına ilişkin görüşlerini geliştirmek için uygulama sürecinde, çalışma yapılarıyla onların bireysel ispat yapmalarına ve bu yaptıkları ispatları tartışarak içselleştirmelerine olanak sağlanmıştır. Uygulama sürecinde ürün odaklı ispat öğretimi yerine süreç odaklı ispat öğretimi benimsenmiştir. Yoo (2008) çalışmasında, etkili ispat öğretiminde süreç odaklı ispat öğretiminin tercih edilmesinin gerekliliğine vurgu yapmıştır. Bu yaklaşım öğretmen adaylarının benlik algılarını geliştirmiş olabilir.

Uygulama sürecinde farklı konulara ait farklı ispatların yapılması, öğretmen adaylarının ispatın önemi ile ilgili görüş puanlarını ve kategorik görüşlerini etkilediği düşünülmektedir. Çünkü matematiğin farklı konularına yönelik çok farklı ispatlama etkinliklerinin yapılmasının, ispatın matematik konularını anlamada etkili bir araç olduğu ve ispatların matematikte teoremler kadar önemli olduğu görüşlerini geliştirdiği düşünülmektedir. Çünkü matematiğin içselleştirilerek öğrenilmesinde ispat etkili bir araçtır (Knuth, 2002a). Derslerde lisans düzeyindeki teorik matematik konularına ait ispatlamalar yapılması, onların; ispatın teorik matematikte vazgeçilmez bir yeri olduğu ile ilgili görüşlerini geliştirmiş olabilir.

Ders tasarımının içerdiği ispat ve ispatlama ile ilgili kapsamlı bilgilerin öğretmen adaylarına öğrenci merkezli yaklaşımla aktarılması onların ispatla ilgili genel görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine katkı sağladığı düşünülmektedir. Çünkü Marlowe ve Page'ye (2005) göre öğrenci süreçte ne kadar aktif ise öğrenmede o denli etkili ve kalıcı olur. Ayrıca derslerde her bir ispat yöntemine özgü atılacak adımların ayrı ayrı anlatılması ve örneklerinin yapılması, öğretmen adaylarının ispatlardaki stratejileri anlamalarını geliştirmiş olabilir. İspatların çalışma yapılarında aşamalara bölünmesi, öğretmen adaylarının ispatın problem çözme gibi aşamalarının olduğu yönündeki görüşlerini güçlendirmiş olabilir.

Öğretmen adaylarının ispat yapma ile ilgili duygularına yönelik görüşlerini geliştirmek adına öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan bilgilerini geliştirecek ve onların ilgisini çekecek çalışma yapılarıyla etkinlikler, ispatla ilgili pedagojik alan bilgilerini geliştirecek örnek olay ve senaryolar üzerinden grup ve bireysel çalışmalar yapılmıştır. Öğretmen adaylarının bu çalışmalarda geleneksel ispat öğretiminin dışında sınıfta hem öğrenci hem de öğretmen rolünü üstlenmelerinin, onların ispat yapma ile ilgili duygularına ilişkin görüş puanlarına ve kategorik görüşlerine katkı sağladığı düşünülmektedir. Öğretmen adaylarının ispatlama yapmak dışında çalışma yapılarındaki öğrenci güçlüklerini tespit etmeleri, bu güçlüklerin nedenlerini açıklamaları ve bu güçlüklerin üstesinden gelecek öğretim stratejilerini belirlemeye çalışmaları onların duygularını olumlu yönde etkilemiş olabilir. Sınıf senaryoları üzerinden ispat şemalarını tespit etme çalışmaları da yine öğretmen adaylarının duygularını geliştirmiş olabilir.

Bu müdahale çalışması, sadece bir üniversitedeki ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarına uygulanmış ve bu müdahalenin onların ispatlamaya yönelik görüşlerine etkisi incelenmiştir. Bu müdahale çalışması farklı bölgelerdeki farklı üniversitelerin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinde öğrenim gören öğrencilere uygulanıp, onların ispatla ilgili görüşlerine etkisi incelenebilir. Yapılacak bu çalışmaların farklı sınıf seviyelerinde öğrenim gören daha fazla katılımcıyla yürütülmesi önerilebilir.

Bu müdahale çalışmasında öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerindeki gelişmelerinin onların sadece ispatla ilgili görüşlerine etkisi incelenmiştir. Son olarak araştırmacılara öğretmen adaylarının ispatla ilgili görüş, tutum ve inanç gibi farklı duyuşsal davranışlarını geliştirmeye yönelik daha farklı fikirler ve müdahaleler sunan çalışmalar yapmaları önerilebilir.

Improving Pre-Service Mathematics Teachers' Views on Proof: A Design Study

1. Introduction

Since the progress of mathematics as a science discipline depends on the discovery and proof of new theorems in the mathematical hierarchy, proof is the peak of mathematics (Tall et al., 2012). It is positioned in the center of mathematics (Ball, Hoyles, Jahnke, & Movshovitz-Hadar, 2002; Samkoff & Weber, 2015) and is described as the heart of mathematics (Güven, Çelik, & Karataş, 2005).

Proof has an important place in mathematics education as well as in mathematics (Selden & Selden, 1987). It serves mathematics education both as a goal and as a tool. Since proof serves many pedagogical purposes in mathematics teaching (Dickerson & Doerr, 2014) it is an important component of mathematics education (Ball et al., 2002). With its explanatory function, proof is a tool that contributes to the learning and understanding of mathematics (Knuth, 2002a). It can be considered as a threshold in mathematics learning (Duval, 2007).

Proof is a series of logical and mathematical arguments that convincingly and clearly show the truth or falsity of a proposition with reasons (Baki, 2015; Hanna, 1991, 2000; Hersh, 1993; Rossi, 2006). Proving, on the other hand, is the mental action processes of an individual trying to show the truth or falsity of a proposition (Harel & Rabin, 2010; Harel & Sowder, 1998, 2007). In mathematics and mathematics education literature, the terms “proof” and “proving” are used interchangeably. Proof is a cognitive product of proving, which is a mental process (Harel, 2008). The better this process is managed, the better the resulting product.

1.1. Theoretical Framework

When learning certain mathematical topics, students' views regarding these topics are important. Likewise, teachers' views also affect the way they teach mathematics. In particular, students can have negative views on topics that are difficult to learn epistemologically and teachers might have negative views on topics that are difficult to teach pedagogically. In other words, both students (Yüksel-Ayten & Hayırsever, 2019) and teachers (Bayrakdar-Çiftçi, Akgün, & Deniz, 2013) might have negative opinions about certain topics in the curriculum. In this context, studies examining views of pre-service teachers about proof and proving, which have an important place in both mathematics and mathematics education, are of importance.

In the literature in Turkey where this study is situated (Doruk & Güler, 2014) and in the international literature (Almeida, 2000; Lee, 1999), scales have been developed to determine pre-service teachers' views about proof. In the Turkish context, the scales developed in the international literature were adapted to Turkish language and the views about proving were measured (İskenderoğlu, 2010; Aydoğdu-İskenderoğlu, Baki, & Palancı, 2011; Moralı, Uğurel, Türnüklü, & Yeşildere, 2006). Views about proof have been examined according to different content or factors in the scales. In his doctoral dissertation, İskenderoğlu (2010) examined views of pre-service teachers studying in the first, second, third and fourth grades of a mathematics teaching department in a public university, and the findings of the research revealed that their views about mathematical proof are positive. The scale they used had four factors “mental process”, “trust”, “self-assessment” and “attitude-belief” (p. 83). Among them, the three factors other than the “mental process” did not make a statistically significant difference according to the grade levels.

Moralı, Uğurel, Türnüklü, and Yeşildere (2006), on the other hand, identified five basic content (also examined in this study): views on conceptual competencies related to proving, views on self-perception of proving, views on the importance of proving, general views related to proving and feelings regarding proving.

Views on conceptual competencies related to proving consist of views about whether examples are convincing for the validity of mathematical knowledge or mathematical conclusions, whether proof is required for the accuracy of the conclusions, whether the proof has functions such as explanation and justification, whether the proof is dependent on other mathematical conclusions, whether working on the phases of proof promotes understanding (Moralı et al., 2006). *Views on self-perceptions of proving* include opinions about whether individuals trust their ability to prove on their own and whether they understand proofs (Moralı et al., 2006). *Views on the importance of proving* are concerned with whether proof is important for understanding pure mathematics and mathematical corollary, the necessity of proof, and whether proving is as important as knowing propositions (Moralı et al., 2006). *General views related to proving* include views on whether the strategies used in proofs are understood, whether proving is a problem-solving task in a way, whether proving is a specific task for mathematicians, whether the students understand proof without expert guidance in the classroom or whether they understand proofs without understanding theorems (Moralı et al., 2006). *Views about feelings regarding proving* are related to whether individuals like proving and whether they get bored with proofs (Moralı et al., 2006).

When the literature of mathematics education about proof is examined, it is seen that the views of undergraduate students (both in mathematics departments and mathematics teaching departments) about proof or proving are examined, and it can be seen that the studies were carried out to determine the status quo. Most of the studies reported that the views of the participants were not at the desired level (Almeida, 2000; Doruk & Güler, 2014; Doruk, Özdemir, & Kaplan, 2014; Gökkurt & Soylu, 2012; Güler, Özdemir, & Dikici, 2012; Kaplan, Doruk, Öztürk, & Duran, 2016; Kayagil, 2012; Knuth, 2002b; Morali et al., 2006; Turgut, Yenilmez, & Uygan, 2013). This current study, unlike the studies mentioned in the existing literature, is an intervention study that proposes to provide insight into how pre-service teachers' views on proof can be improved. Content and pedagogical content knowledge that form the basis of this intervention are briefly explained below.

In his study, Shulman (1986) categorized the teacher knowledge forms into three categories: content knowledge, pedagogical content knowledge, and curricular knowledge. Content knowledge is defined as “the amount and organization of knowledge per se in the mind of the teacher” (Shulman, 1986, p. 9). When considered within the scope of the content knowledge, pre-service teachers should be able to know and apply the methods of proof. Besides, they should do proofs in an analytical scheme which is one of the proof schemes defined by Harel and Sowder (1998). Pedagogical content knowledge is a special amalgam of content and pedagogy (Shulman, 1986, 1987). Students' difficulties and teaching strategies are two remarkable components of pedagogical content knowledge as defined in Shulman's (1986) article (Park & Oliver, 2008). Teachers should know not only students' difficulties but also the reasons behind these difficulties. Within the context of pedagogical content knowledge, pre-service teachers should be able to identify student difficulties with proofs, explain the reasons behind these difficulties and choose the appropriate teaching strategies for proving. At the same time, they should be able to identify the justifications made by students according to the classification of Harel and Sowder (1998). However, the studies in the literature show that pre-service teachers do not have an adequate content knowledge of proof (İmamoğlu & Yontar-Toğrol, 2010, 2015; Köğçe, 2012; Stylianides, Stylianides, & Philippou, 2007; Stylianou, Chae, & Blanton, 2006) and pedagogical content knowledge of proof (Bieda, 2010; Lesseig, 2016; Passigna & Herrera, 2014; Tabach et al., 2010). Pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge of proof as to the cognitive dimension, and their views, attitudes, and beliefs as to the affective dimension, mutually influence each other since there is a link between cognitive and affective behaviors (Gömleksiz & Kan, 2012). Therefore, developing pre-service teachers' content and pedagogical content knowledge of proof might affect their views on proof positively.

1.2. Research Questions

This study is part of a doctoral dissertation that aims to develop pre-service teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge of proof. Within the scope of the dissertation, a comprehensive and sustainable undergraduate course was designed, implemented, and evaluated to improve participants' content knowledge and pedagogical content knowledge. In this study, the effect of this course design on the views of pre-service mathematics teachers about proving was examined. In this context, the research question and sub-questions of the study are as follows:

How did the course designed to develop content and pedagogical content knowledge of proof affect the pre-service teachers' *views on proof*?

How did the designed course affect the pre-service teachers' *views on their conceptual competencies related to proving*?

How did the designed course affect the pre-service teachers' *views about self-perceptions of proving*?

How did the designed course affect the pre-service teachers' *views on the importance of proving*?

How did the designed course affect the pre-service teachers' *general views related to proving*?

How did the designed course affect the pre-service teachers' *views about the feelings regarding proving*?

2. Methodology

In this section, we will explain the research method, research model, participants, data collection tools and data analysis.

2.1. Research Model

In this research, the design-based research method was preferred. As a requirement of design-based research, this study is designed based on the principles of mixed-method research. ADDIE (Analysis, Design, Development, Implementation, Evaluation) model, which consists of analysis, design, development, implementation, and evaluation stages, was used in this study (Branch, 2009).

2.2. Phases of Research

As part of the analysis phase, needs analysis was considered. We identified pre-service teachers' needs concerning proof through investigating standards for students (Department for Education 2013a, 2013b, 2014;

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGA Center & CCSSO], 2010) and teachers (Department of Education & Training of Australia [DETA], 2004; Ministry of National Education [MoNE], 2017a, 2017b; National Board for Professional Teaching Standards [NBPTS], 2010) regarding proof. We also considered the calls for the design and analysis of interventions that foster pedagogical content knowledge of proof and proving in the context of pre-service teacher education (Cihan & Akkoç, 2019). As a result of the needs analysis, the need for the improvement of content and pedagogical content knowledge of pre-service teachers emerged. In line with these needs, considering the affective and cognitive characteristics of pre-service teachers, the course objectives were identified. Two objectives regarding content knowledge and four objectives regarding pedagogical content knowledge were identified (Cihan, 2019). Regarding the views on proof, five objectives are targeted: a) Pre-service teachers will develop positive views on the conceptual competencies related to proving. b) Pre-service teachers will develop positive views about the self-perception of proving. c) Pre-service teachers will develop positive views on the importance of proving. d) Pre-service teachers develop positive views about proving. e) Pre-service teachers develop positive feelings regarding proving (Cihan & Akkoç, 2018).

In design phase, what to teach, how to teach and how to evaluate questions were sought. At this stage, considering the objectives of the course, course content, learning-teaching situations, assessment system, and assessment tools were determined (Cihan, 2019; Cihan & Akkoç, 2018). During the development phase, the course design was finalized by taking expert opinions. The final version of the course included various modules to enhance the content knowledge of pre-service teachers such as modern components of proof, proof methods, proof types, proof schemes, and modules to develop their pedagogical content knowledge such as student difficulties with proving, the reasons behind these difficulties, instructional strategies for teaching how to prove and students' proof schemes (Cihan, 2019; Cihan & Akkoç, 2018).

In the implementation phase (Cihan, 2019), the first author served as the course instructor and the second author was the coordinator of the course. Also, the second author undertook the role of a non-participant observer during the implementation phase and made instant notes during the lessons. The implementation phase lasted for a term (15 weeks). The implementation phase was carried out by adhering to the course content and the teaching and learning situations of the course as determined in the previous phase. Instructional techniques such as questioning, discussion, problem-solving, using concept map, case study, and scenario-based teaching methods (Altun, 2001; Tok, 2017), that are lined up from the traditional teacher-centered approach to the student-centered approach, were used during the implementation phase. The implementation phase started with the modern components of proof. The components of proof were primarily divided into two: terms and propositions. Terms are examined under two subtitles: undefined terms and definitions. Propositions, on the other hand, were examined under three sub-titles: correct propositions (theorems), false propositions, and assumptions. Again, the subtitles of theorems are detailed with titles such as axioms, postulates, lemmas, and corollaries. Pre-service teachers were asked to draw a concept map containing all these concepts. Then, the concepts of justification, proof, proof and refutation, relations and differences between these concepts, the proof process, functions of the proof (Bell, 1976; Hanna, 2000), the types of proof and the features that should be in a good proof were presented and exemplified. Good and bad examples of proof were included. The proof classifications of different researchers (Balacheff, 1987, 1988; Harel & Sowder, 1998; Miyazaki, 2000; Raman, 2003; Van Hiele, 1986; Vinner, 1991; Waring, 2000; Weber, 2004), then Sowder and Harel's (1998) external, empirical and analytical proof schemes together with its sub-classification of authoritarian, ritual, symbolic (for external), perceptual, example-based (for empirical), transformational and axiomatic (for analytic) proof schemes were discussed. A task called "identification of proof schemes" was designed and worksheets were prepared including students' and pre-service teachers' written works taken from the literature. This was followed by a scenario work designed by the authors of this paper. The pre-service teachers were given a proposition and asked to justify this proposition using seven sub-proof schemes with seven different answers. Seven proof methods were explained to the participants in seven weeks. The methods of proof started with induction. Then the deductive proof method including direct and indirect proofs was explained. Indirect proof, on the other hand, was discussed in five parts: proof by cases, proof by exhaustion, proof by contradiction, proof by contrapositive and proof by counter-example. These methods, when and for what types of questions to use them, the structures of the propositions to be proven using these methods were explained one by one. With the help of worksheets, proving activities related to different mathematics topics were carried out for each proof method. The worksheets were divided into sections that include the hypothesis of the proposition (if any), the sentence that also includes the method, the steps taken in the proof and the finishing sentence which are all different for each proof method. All proofs in the course were made using the analytical proof scheme. Although transformational schemes (which is one of the analytical schemes) were included, usually the axiomatic scheme was used. All these tasks were carried out first as a group, then individually, and then a discussion was started. These activities were followed by case studies and scenario-based activities aimed at identifying student difficulties for each proof method, explaining the reasons behind these difficulties, and determining the teaching strategies to overcome these difficulties, to develop course participants' pedagogical content knowledge (Cihan, 2019).

At the evaluation stage, the pre-service teachers' views about proof and improvement in their content knowledge and pedagogical content knowledge were examined. In the scope of this research, the development of pre-service teachers' views about proof was examined.

2.3. Participants

The study has both quantitative and qualitative phases. For the quantitative stage of the study, the sample was determined by an appropriate sampling technique. This sampling technique was chosen because the sample was easily accessible. The study group was 22 pre-service mathematics teachers (14 female, eight male) attending the second year of an upper-secondary mathematics teaching program of a public university in Istanbul. For the qualitative phase of the study, the study group was determined by a theoretical sampling technique. Three (two female and one male) pre-service teachers were selected based on the level of their content and pedagogical content knowledge as we determined as adequate, moderate, and weak. The reason for the selection criterion is that the designed course is an intervention aimed at improving participants' content and pedagogical content knowledge of proof. This research aims to examine the effects of this intervention on pre-service teachers' views about proof. The participants in the qualitative study group were assigned codes such as PT1 (good), PT2 (medium) and PT3 (weak).

2.4. Data Collection Tools

Quantitative data were collected by Likert-type scale and qualitative data were collected through semi-structured interviews.

2.4.1. The Scale for Views about Proving

Likert-type scale adopted by Morali, Uğurel, Türnüklü, and Yeşildere (2006) from Almeida's (2000) study was used as a quantitative data collection tool to measure the views of pre-service teachers about proving. The necessary permissions from all authors of the study were taken. The reason for choosing this scale is that the validity and reliability studies were made by the authors of the scale.

Ten items (1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 15) of the 20-item scale contain positive views, and ten items (5, 6, 7, 8, 14, 16, 17, 18, 19, 20) contain negative views (Morali et al., 2006). The items of this scale consist of five main categories: conceptual competencies related to proving (1, 2, 3, 5, 11, 12, 13), views about self-perception of proving (10, 14), views about the importance of proving (4, 6, 8, 17), general views related to proving (7, 15, 16, 19, 20) and views about the feelings regarding proving (9, 18) (Morali et al., 2006, p. 153-156). Views about proving consist of views on their conceptual competencies related to proving (VCC), views about self-perceptions of proving (VSP), views about the importance of proving (VI), general views related to proving (GV) and views about the feelings regarding proving (VF).

This scale was applied twice to 22 pre-service teachers before and after the course. The purpose of applying this scale twice is to examine the effects of the course implementation on participants' views on proofs. Before the scale was applied to pre-service teachers, they were informed about the study and their consent was taken. They were allowed to ask questions, and given the time required to decide whether to participate in the research or not. Informed consent forms were signed by pre-service teachers who participated in the study voluntarily.

2.4.2. Semi-structured Interviews

The purpose of the semi-structured interviews is to examine the pre-service teachers' views on proof. A semi-structured interview form consisting of five questions was prepared for the interviews. These questions were prepared to get detailed information from pre-service teachers for the five basic contents of the scale mentioned above. The terminology included in these five basic contents regarding the views and what they meant were explained to the participants. The phrase "explain" was added after each question to elaborate on their views during the interviews. Interview questions are presented below:

- 1) How much do you trust your conceptual competencies related to proving? Please explain.
- 2) How much do you trust your self-perception of proving? Please explain.
- 3) What do you think about the importance of proving? Please explain.
- 4) What are your general views related to proving? Please explain.
- 5) How do you feel when you do proofs? Please explain.

To ensure the validity of the study, expert opinion was taken for the interview questions. For the reliability of the form, a pilot study was conducted with three pre-service teachers from a different university. Data obtained from the pilot study were coded by the authors of this study and by an expert. The agreement between these two codes was calculated by the formula of Reliability = Agreements / (Agreements + Disagreements) by Miles and Huberman (1994, p. 64) and was found approximately 93%.

During the semi-structured interviews, different questions were asked following the five main contents as described above. Follow-up questions were asked to elaborate on pre-service teachers' views on proofs and proving. Besides, the views of pre-service teachers as explored with the scale were compared to their views reported in the semi-structured interviews, then further questions were raised to reveal their views in depth.

Three pre-service teachers who participated in the qualitative study were interviewed twice, before and after the implementation. The purpose of conducting the interviews twice is to examine the impact of the course on the pre-service teachers' views about proof. Interviews were recorded with a voice recorder. Written and verbal permission were taken from the participants.

2.5. Data Analysis

Quantitative descriptive analysis and quantitative inferential analysis were conducted for the quantitative part, and qualitative descriptive analysis was conducted for the qualitative part of the study.

2.5.1. The analysis of the data obtained from the scale

Quantitative data were analyzed categorically and numerically. When analyzing the quantitative data, the responses given to the items of the scale were five points for positive views and one point for negative views in the case of "totally agree"; four points for the items with positive views, two points for the items for negative views in the case of "agree"; three points for both positive and negative views in the case of "neutral"; two points for the items with positive views and four points for the items with negative views in the case of "disagree"; and one point for the items with positive views and five points for the items with negative views in the case of "totally disagree" (Morali et al., 2006). The relevant items of the scale were analyzed to determine the pre-service teachers' views for the five basic contents mentioned above.

The views of the participants scoring 70 points out of 100 points are categorically positive, the views of the participants scoring 60 points or below are categorically negative, and the views of the remaining participants are categorically neutral (Morali et al., 2006).

Wilcoxon signed rank test (Wilcoxon, 1945) was used to determine whether the course implementation had a statistically significant effect on pre-service teachers' views. Wilcoxon signed rank test, which is a non-parametric test, was used as an alternative to dependent sample t-test (Can, 2017) because of a) the low number of participants and b) the data did not show normal distribution. This test converts two different points of the same sample at different times into rows and compares them to determine whether there is a statistically significant difference (Pallant, 2007).

Test statistic Z and probability p values were taken into consideration to determine whether the course has a significant effect on pre-service teachers' scores. Since $p < 0.05$, it was decided that there was a statistically significant effect at the 95% confidence level. When it was decided that a significant effect exists, the mean rank and rank sum of the difference scores were examined to determine the direction of this effect. It was decided that if the mean rank and the sum of ranks of the difference scores were in favor of negative ranks, this significant effect was in favor of pre-implementation, and if positive ranks, this meaningful effect was in favor of post-implementation. If the course has a significant effect on views, the magnitude of this effect was calculated with the formula $r = Z/\sqrt{n}$ (Pallant, 2007, p. 225). If the effect size is $r = 0.1$ then it is a small effect, if $r = 0.3$ then it is a medium effect, if $r = 0.5$ then it is a large effect (Cohen, 1988, p. 79-81). Effect size is an objective measure of the impact identified and provides a standardization.

The marginal homogeneity test (Agresti, 1983, 1990) was used to determine whether the course implementation had a categorically significant effect on the pre-service teachers' views about proof. The marginal homogeneity test determines whether there is a statistically significant difference between the categorical data of two different times of the same sample (Agresti, 1990). Since $p < 0.05$, it was decided that there was a statistically significant effect at a 95% confidence level.

2.5.2. The analysis of data obtained from the semi-structured interviews

Recordings of interviews were verbatim transcribed and were subject to descriptive analysis. The thematic framework for descriptive analysis is the categorical views on the scale. The data obtained from the interviews with participants were analyzed according to their negative, neutral and positive categories.

Meaningful, correct and precise answers to the five questions asked in the semi-structured interviews were coded as "positive"; meaningless, false, and imprecise answers were coded as "negative", and intermittent, non-exact contradictory answers which are unclear were coded as "neutral". For example, a response to the question "How much do you trust your conceptual competencies related to proving? Please explain" which is "Sometimes I trust and sometimes do not trust my conceptual competencies related to proving" was coded as "neutral".

3. Findings

In this section, the numerical mean of view points and categorical views regarding the main five contents in the scale for pre- and post-implementation will be presented and the development of pre-service teachers will be illustrated. Data from semi-structured interviews were included to examine the developments in the views of pre-service teachers in depth.

Table 1. Item-based point means and categorical views in pre-and post-implementation regarding pre-service teachers' views about their conceptual competencies related to proving

Item	Pre-Implementation Numerical Mean of View Points	Pre-Implementation Categorical View	Post-Implementation Numerical Mean of View Points	Post-Implementation Categorical View
1. A proof in mathematics both verifies and explains.	83.64	Positive	91.82	Positive
2. If a result in mathematics is proved I can be certain that it is true.	77.27	Positive	90.91	Positive
3. Examples illustrating a result do not always help me understand why the result is true.	69.09	Neutral	90.00	Positive
5. In mathematics evidence from examples tells you what is true.	74.55	Positive	95.45	Positive
11. Working on the stages of proof helps me understand why it is true.	80.91	Positive	95.45	Positive
12. Different proofs of a theorem help me to understand it better.	81.82	Positive	97.27	Positive
13. Proof in mathematics depends on other mathematical results.	84.55	Positive	92.73	Positive
Mean	78.83	Positive	93.38	Positive

As can be seen in Table 1, the means of the points increased for all items in the scale regarding the views about their conceptual competencies related to proving. However, the highest increase (the 3rd item, 20.91 points) occurred for the item “Examples illustrating a result do not always help me understand why the result is true” (p. 159). Before the implementation, the pre-service teachers were unsure about whether showing the correctness of a proposition without being proved and by examples helps them understand why that proposition is correct. For this item, pre-service teachers who demonstrated negative views before the implementation declared positive views after the implementation. Examples are not always sufficient to understand why a proposition is correct. Proof of that proposition may be required since the proof does not only show that a proposition is true but also explains why it is true.

Pre-service teachers participating in semi-structured interviews declared less positive views in the interviews, contrary to their views about their conceptual competence in the scale. When the views of three pre-service teachers participating in semi-structured interviews were analyzed, one of the pre-service teachers' views was neutral before the implementation, positive after the implementation and the views of the other two were negative before the implementation, but also positive after the implementation.

The interview dialogues with participants whose views on the conceptual competencies related to proving are neutral before the implementation and positive after the implementation are given below. While the pre-service teacher expressed a neutral view before the implementation saying “I sometimes trust my conceptual competencies, sometimes I don't”, after the implementation, he said “I trust my conceptual competencies very much” and declared a completely positive view.

R: How much do you trust your conceptual competencies related to proving? Please explain. (Before the implementation)

PT1: I sometimes trust my conceptual competencies related to proving, sometimes I don't. Because sometimes things happen that I don't know. Then the proof is lacking in a sense. We cannot complete the proof without knowing the concepts exactly. That's why it's important to know the concepts.

R: How much do you trust your conceptual competencies related to proving? Please explain. (After the implementation)

PT1: After this course, I trust my conceptual competencies regarding proving. Thanks to this course, I learned the concepts necessary for proof.

The interview dialogue of a pre-service teacher whose views on the conceptual competencies related to proving were negative before the implementation and positive after it is given below. While the pre-service teacher expressed a completely negative view by saying “I don’t trust in any way to my conceptual competences” before the implementation, he expressed a completely positive view by saying “I trust my conceptual competencies very much”.

R: How much do you trust your conceptual competencies related to proving? Please explain. (Before the implementation)

PT3: I do not trust in any way. Because I don't know anything.

R: What is a proof? What is not? Do you have any conceptual knowledge about it?

PT3: I have no idea.

R: How much do you trust your conceptual competencies related to proving? Please explain. (After the implementation)

PT3: I didn't know any concept of proof before the course, I couldn't establish a single sentence, now I am very confident in my conceptual competencies.

Table 2. Item-based point means and categorical views in pre-and post-implementation regarding pre-service teachers' views about self-perceptions of proving

Item	Pre-Implementation Numerical Mean of View Points	Pre-Implementation Categorical View	Post-Implementation Numerical Mean of View Points	Post-Implementation Categorical View
10. I am confident in my ability to prove results for myself.	62.73	Neutral	81.82	Positive
14. I usually find it difficult to understand proof.	64.55	Neutral	83.64	Positive
Mean	63.64	Neutral	82.73	Positive

As can be seen from Table 2, there was an increase of 19.09 points in the two items in the view scores of the pre-service teachers' self-perception of proving. The pre-service teachers who expressed neutral views before the implementations for the items “I am confident in my ability to prove results for myself” and “I usually find it difficult to understand proof” (p. 160), expressed positive views after the implementation. It is seen that the implementation has a categorical effect on pre-service teachers' trust in their ability to prove and understanding proofs.

When the views of three pre-service teachers who participated in semi-structured interviews about self-perception of proving are analyzed, it was found that the views of the two were neutral before the implementation and became positive after it, and the views of the other were negative before the implementation and became neutral after the implementation.

Interview dialogues of a pre-service teacher whose views on self-perception of proving were neutral before the implementation and positive after it was given below. Although this participant stated that he generally trusted himself before the implementation, he stated that he sometimes did not feel confident and expressed a neutral view. After the implementation, he stated that he trusted his self-perceptions and expressed a positive view.

R: How much do you trust your self-perception of proving? (Before the implementation)

PT1: To prove, one has to trust himself. I'm confident. It depends on a little bit on the person who teaches. How do I explain it? I love maths. I have always improved my knowledge until today. That's why I trust my knowledge. I think that I will usually handle proofs. I usually can do proofs. I trust myself. But sometimes I can't, then I don't trust myself.

R: How much do you trust your self-perception of proving? (After the implementation)

PT1: I was neutral in my self-perception of proving before the course. Frankly, there was this thing that I couldn't. When a question frightened me before the course, I used to skip that question. Now I say I will solve it, thanks to this course.

The interview dialogues of the pre-service teacher whose views on self-perception of proving were negative before the implementation and neutral after the implementation were given below. The pre-service teacher expressed negative views by stating that he did not trust himself before the implementation. After the implementation, although he stated that he trusted himself more than before, he stated that he still had deficiencies and expressed a neutral view.

R: How much do you trust your self-perception of proving? (Before the implementation)

PT3: I am a person who has not done any proof until I came to university. They gave us axioms in 9th grade, but I never even read them. I didn't even care if it was on exams. I've never looked at it. I don't like it at all. So I am a person who has always been interested in the numerical part of mathematics. But I know I need to prove as a teacher candidate. I believe I will do it. I do if I study.

R: What about now?

PT3: For now, I don't trust myself, I can't do much, I don't trust my knowledge.

R: How much do you trust your self-perception of proving? (After the implementation)

PT3: Better than before. But I still have indecision.

R: When do you experience indecision?

PT3: During different proof questions I have seen for the first time.

Table 3. Item-based point means and categorical views in pre-and post-implementation regarding pre-service teachers' views about the importance of proving

Item	Pre-Implementation Numerical Mean of View Points	Pre-Implementation Categorical View	Post-Implementation Numerical Mean of View Points	Post-Implementation Categorical View
4. Proof is essential in pure mathematics.	87.27	Positive	94.55	Positive
6. I can't see the point of doing proofs: all the results in the course have already been proved beyond doubt by famous mathematicians.	74.55	Positive	95.45	Positive
8. If a result in mathematics is obviously true then there's no point in proving it.	75.45	Positive	90.91	Positive
17. I think knowing a theorem (or a preposition) is more important than proving it.	71.82	Positive	89.09	Positive
Mean	77.27	Positive	92.50	Positive

As can be seen from Table 3, the highest increase in the view scores of pre-service teachers about the importance of proving occurred for the item (the 6th item, 20.9 points) “I can't see the point of doing proofs: all the results in the course have already been proved beyond doubt by famous mathematicians” (p. 159). In three other items measuring the views about the importance of proving, the average score of the participants increased.

When the views of the three pre-service teachers who participated in the semi-structured interviews about the importance of proving were analyzed, the views of the two before and after the implementation are positive, while the views of the third were negative before the implementation and positive after it.

The interview dialogues with the pre-service teacher whose views about the importance of proving were negative before the implementation and positive after the implementation were given below. While the pre-service teacher stated a negative view saying “I do not think proof is too important” before the implementation, he stated a positive view by emphasizing that proof was important after the implementation.

R: What do you think about the importance of proving? Please explain. (Before the implementation)

PT2: I don't think proof is too important. So for us, secondary teachers.

R: Important for whom?

PT2: Important for the academician. Academics should work on this subject. But I am against teaching us proofs, in the school. This is the work for those who want to have an academic career. I see things in the mathematics courses that I will never use. It won't work for me when I'm a teacher.

R: Is it working at the moment, when you learn maths?

PT2: No it doesn't. Just practical work.

R: Does it have an effect on teaching and learning mathematics??

PT2: It helps to learn some things when learning of mathematics but if you don't teach it nothing left. After a while, it goes away again. If I knew I could use proof, I would try more.

R: What do you think about the importance of proving? Please explain. (After the implementation)

PT2: I think it is important as a teacher. The student can ask anything. It is OK. He may proceed without proofs, but if the teacher proves, it will have a better place in the student's mind. So the teacher, the pre-service teachers should pay more attention.

R: Is it necessary for students at the university?

PT2: Not for most departments, but it is for our department.

R: Why proofs are important?

PT2: Because it doesn't leave a question mark in the mind.
 R: Does it make it certain?
 PT2: Exactly. That is what the proof is about.

Table 4. Item-based point means and categorical views in pre-and post-implementation regarding pre-service teachers' general views related to proving

Item	Pre-Implementation Numerical Mean of View Points	Pre-Implementation Categorical View	Post-Implementation Numerical Mean of View Points	Post-Implementation Categorical View
7. Proofs sometimes involve strategies that are not at all obvious.	42.73	Negative	69.09	Neutral
15. Proving is in a sense problem-solving.	78.18	Positive	88.18	Positive
16. Only professional mathematicians can make mathematical proofs.	79.09	Positive	94.55	Positive
19. Although I generally understand what a theorem means, I am having difficulty understanding its proof.	57.27	Negative	81.82	Positive
20. I can only understand a proof when a teacher does it in class.	67.27	Neutral	89.09	Positive
Mean	64.91	Neutral	84.55	Positive

As can be seen from Table 4, the highest increase in pre-service teachers' general views related to proving occurred for the item (the 7th item, 26.36 points) “Proofs sometimes involve strategies that are not at all obvious” (p. 159). Before the implementation, pre-service teachers’ views were that the proofs included incomprehensible strategies. After the intervention, they were neutral. The strategies in proofs must be understood by pre-service teachers. Another item in which the categorical view was changed was the item (the 19th item, 24.55 points) “Although I generally understand what a theorem means, I am having difficulty understanding its proof” (p. 160) for which pre-service teachers declared positive views after the implementation. Before the implementation, pre-service teachers thought that they had difficulty in understanding proofs even if they understood the theorems. After the implementation, the dominant view was that they understood the proofs. Finally, another item (the 20th item, 21.82 points), where the categorical view changed, is the item “I can only understand a proof when a teacher does it in class” (p. 160). The pre-service teachers who declared neutral views before the implementation expressed positive views afterward. Before the implementation, pre-service teachers had a neutral view about whether they can understand the proof without the help of the instructor. However, after the implementation, they thought that they could understand the proof on their own. It is seen that there is an undeniable increase in the mean scores in the other two items for which there were no categorical changes.

When the general views of three pre-service teachers participating in the semi-structured interviews were analyzed, the views of the two before and after the implementation were positive, while the views of the other pre-service teacher were negative before and after the implementation. However, it is seen that the pre-service teachers' views about proving have become clearer after the implementation.

Interview dialogues with the pre-service teachers whose views were negative before the implementation and positive after the implementation are given below. The pre-service teacher stated that theorems were useless and there was no point for proofs. However, his views were positive after the implementation.

R: Explain your general views related to proving (Before the implementation)
 PT2: ... The proofs we see change our view a little bit, so we see proofs of many different theorems. I wish we see some more useful things, some more useful theorems.
 R: Can you tell me one useful theorem?
 PT2: What can it be? For example, Fibonacci or something.
 R: Is it useful?
 PT2: Conceived with an example like Fibonacci. We are dealing with such complicated proofs, then we get nothing. Even if we prove, we cannot get anything. We prove, but what happens!

R: Explain your general views related to proving (After the implementation)
 PT2: My general views related to proving were positive after the course. Because I felt that proof meant a lot to me. I felt that it improved me cognitively. I can understand proofs, I can do it on my own.

Table 5. Item-based point means and categorical views in pre-and post-implementation regarding pre-service teachers' views about the feelings regarding proving

Item	Pre-Implementation Numerical Mean of View Points	Pre-Implementation Categorical View	Post-Implementation Numerical Mean of View Points	Post-Implementation Categorical View
9. I like doing proofs in mathematics.	71.82	Positive	89.09	Positive
18. Dealing with proofs if very boring.	69.09	Neutral	90.00	Positive
Mean	70.46	Positive	89.55	Positive

As can be seen from Table 5, the highest increase in the view scores of pre-service teachers was the item (the 18th item, 20.91 points) “Dealing with proofs if very boring” (p. 160). For this item, pre-service teachers who gave neutral views before the implementation expressed positive views afterward. It is seen that the mean scores of pre-service teachers showed an important increase in the other item that measures the feelings regarding proving.

When the feelings of three pre-service teachers participating in the semi-structured interviews are examined, it was found that one of the pre-service teachers' feelings before and after the implementation were positive, the second one was negative before and positive after the implementation, the third one's views were neutral before and positive after the implementation. The interview dialogues with the pre-service teacher whose views were neutral before the implementation was positive afterward:

R: How do you feel when you do proofs? Please explain. (Before the implementation)

PT2: I feel slightly happy when I do proofs.

R: Why slightly?

PT2: I feel I can't do anything. I get excited while doing it, I am happy when I prove something. When I cannot, I consult with other people. I feel relieved when I do it. I am in trouble when I can't. I did not sleep at night or something, I look at the videos on the internet a few times, there is a teacher there, I watch it.

R: How do you feel when you do proofs? Please explain. (After the implementation)

PT2: At the beginning of the year, I did not know anything about proof. I didn't even know what the proof was. It seemed unnecessary and absurd, frankly. Then we saw the proof methods, seven in the course. I have seen that most things fit logically and move forward. After I established the logic, I started to like proof more. I started to prove and started to love it. For example, the proof that the root number 7 is irrational impressed me a lot. I never thought of it before. I couldn't think of anything about how to prove this. I get excited to get started, I enjoy doing the process.

The interview dialogues with the pre-service teacher whose feelings were negative before the implementation and positive afterward were given below. While he stated that he felt bad because he could not do proof before the implementation, he declared completely positive views stating that he had fun and was happy after the implementation.

R: How do you feel when you do proofs? Please explain. (Before the implementation)

PT3: When proving, it feels like I could never do it. I feel very ignorant when I do proofs. I can't find any solution. I know I have something in my head, but I can't write it down. I can not express myself.

R: How this thing effect you?

PT3: I feel bad.

R: How do you feel when you do proofs? Please explain. (After the implementation)

PT3: Proving is good. Before the course, it was boring because I couldn't do it. I used to not like it. But after the course, I started to have fun.

R: What is the fun bit?

PT3: Finding something new, to reach something. It makes me happy to find out something.

R: Is there any difference before and after the course?

PT3: I love it more because I can do better now.

R: So can you do it?

PT3: When I look at the question for the first time, I think that I can do this with this method.

It can be seen that the course design, which has been mentioned so far, has an impact on pre-service teachers' numerical and categorical views. Inferential analysis has been made to examine whether this effect is statistically significant. First, the Wilcoxon signed rank test was applied to determine whether the course had a statistically significant effect on pre-service teachers' numerical views.

Table 6. Wilcoxon Signed Rank Test Outputs Regarding Pre-service Teachers' viewpoints in Pre- and Post-Implementation

Content	Post implementation-Pre implementation	N	Mean Rank	Sum of Ranks	Z	p	Effect size
VCC	Negative ranks	0 ^a	0.00	0.00	-4.113*	<0.001	-0.88
	Positive ranks	22 ^b	11.50	253.00			
	Ties	0 ^c					
VSP	Negative ranks	2 ^a	3.00	6.00	-3.488*	<0.001	-0.74
	Positive ranks	16 ^b	10.31	165.00			
	Ties	4 ^c					
VI	Negative ranks	0 ^a	0.00	0.00	-3.841*	<0.001	-0.82
	Positive ranks	19 ^b	10.00	190.00			
	Ties	3 ^c					
GV	Negative ranks	0 ^a	0.00	0.00	-3.834*	<0.001	-0.82
	Positive ranks	19 ^b	10.00	190.00			
	Ties	3 ^c					
VF	Negative ranks	2 ^a	4.00	8.00	-3.530*	<0.001	-0.75
	Positive ranks	17 ^b	10.71	182.00			
	Ties	3 ^c					
Whole Scale	Negative ranks	0 ^a	0.00	0.00	-4.018*	<0.001	-0.86
	Positive ranks	21 ^b	11.00	231.00			
	Ties	1 ^c					

* Based on Negative Rank, ^a view point post-implementation < view point pre-implementation, ^b view point post-implementation > view point pre-implementation, ^c view point post-implementation = view point pre-implementation.

As seen in Table 6, the course has a meaningful ($Z = -4.113, p < 0.001$) and significant effect ($|-0.88| > 0.5$). Besides, it can be seen from the table that the view scores of all pre-service teachers about their conceptual competencies related to proving increased after the implementation.

The course had a meaningful ($Z = -3.488, p < 0.001$) and significant effect ($|-0.74| > 0.5$) on pre-service teachers' views about their self-perception of proving in favor of post-implementation (rank mean and rank total). In addition, it can be seen from the table that the view scores of sixteen pre-service teachers about self-perception of proving increased after the implementation. The scores of the four pre-service teachers remained the same before and after the implementation, and only the scores of the two pre-service teachers decreased.

The course had a meaningful ($Z = -3.841, p < 0.001$) and significant effect ($|-0.82| > 0.5$) on pre-service teachers' views about the importance of proving in favor of post-implementation (rank mean and rank total). Also, it can be seen from the table that the view scores of nineteen pre-service teachers regarding the importance of proving increased after the implementation. The scores of the other three remained the same before and after the implementation. There is no pre-service teacher with a decrease in score.

The course had a meaningful ($Z = -3.834, p < 0.001$) and significant effect ($|-0.82| > 0.5$) on pre-service teachers' general views related to proving in favor of post-implementation (rank mean and rank total). Besides, it can be seen from the table that the view scores of nineteen pre-service teachers increased after the implementation. The score of the other three remained the same before and after the implementation. There is no pre-service teacher with a decrease in score.

The course had a meaningful ($Z = -3.530, p < 0.001$) and significant effect ($|-0.75| > 0.5$) on pre-service teachers' feelings regarding proving in favor of post-implementation (rank mean and rank total). Besides, it can be seen from the table that the views scores of seventeen pre-service teachers about the feelings regarding proving increased after the implementation. The score of the other three remained the same before and after the implementation. Scores decreased only for two pre-service teachers.

When the data obtained from the scale is considered, it was found that the course had a meaningful ($Z = -4.018, p < 0.001$) and significant effect ($|-0.86| > 0.5$) on pre-service teachers' views about proof in favor of post-implementation (rank mean and rank total). Also, it can be seen from the table that the views scores of twenty-one pre-service teachers increased after the implementation. There is no pre-service teacher with a decrease in the score while there is only one pre-service teacher with an unchanging score.

After determining that the course implementation has a significant effect on the pre-service teachers' numerical view points, the marginal homogeneity test was applied to determine whether there was a significant effect on their categorical views.

Table 7. Marginal Homogeneity Test Outputs Regarding Pre-service Teachers' Categorical Views in Pre- and Post-Implementation

Content	Post implementation- Pre implementation	N	<i>p</i>
VCC	Negative ranks	0 ^a	No statics are computed
	Positive ranks	3 ^b	
	Ties	19 ^c	
VSP	Negative ranks	1 ^a	0.001
	Positive ranks	15 ^b	
	Ties	6 ^c	
VI	Negative ranks	0 ^a	0.020
	Positive ranks	6 ^b	
	Ties	16 ^c	
GV	Negative ranks	0 ^a	0.001
	Positive ranks	13 ^b	
	Ties	9 ^c	
VF	Negative ranks	0 ^a	0.001
	Positive ranks	12 ^b	
	Ties	10 ^c	
Whole Scale	Negative ranks	0 ^a	0.003
	Positive ranks	9 ^b	
	Ties	13 ^c	

^a view point post-implementation < view point pre-implementation, ^b view point post-implementation > view point pre-implementation, ^c view point post-implementation = view point pre-implementation.

It can be seen from Table 7 that the course implementation has a categorically positive effect on the pre-service teachers' views on conceptual competencies related to proving. It can be seen from the table that the three pre-service teachers' views have improved categorically, and there was no categorical change in the views of the other nineteen pre-service teachers. However, the test statistics could not be calculated. This is because there are not enough participants for each level (negative, neutral and positive) to reach appropriate or important results. Since there was no categorical change required for categorical calculations, the calculation could not be made. However, the course implementation has a statistically significant effect on the pre-service teachers' views about self-perception of proving ($p = 0.001$), their views on the importance of proving ($p = 0.020$), their general views related to proving ($p = 0.001$), their feelings regarding proving ($p = 0.001$) categorically. Also, when looking at the direction of categorical changes in views, it is seen that this statistically significant effect is in favor of post-implementation.

It is again seen from the table that categorical views improved for 15 participants regarding the self-perception of proving, six for the importance of proving, 13 for general views related to proving and 12 for feelings regarding proving. Views remained the same pre- and post-implementation for six participants regarding self-perception of proving, 16 participants regarding the importance of proving, nine participants regarding general views related to proving, 10 participants regarding the feelings regarding proving. One only pre-service teacher had a categorical decrease regarding views about self-perception of proving. None of the participants had a categorical decrease regarding the other contents.

As a result, it is seen that the course implementation had a categorically significant effect ($p = 0.003$) on the pre-service teachers' views about proof. Also, when we look at the categorical changes for the views from the table, it is seen that this statistically significant effect is in favor of post-implementation. It can be seen from the table that the views of nine pre-service teachers about proof have improved categorically. The views of the 13 pre-service teachers categorically remained the same before and after the implementation. The reason for this is that these 13 pre-service teachers had a positive view before the implementation. Therefore, the improvement of the view scores did not cause any categorical change for these pre-service teachers.

4. Discussion, Conclusion and Implications

When the quantitative findings obtained from the scale are examined before the implementation, it is seen that pre-service teachers have positive views for some items that constitute their views on their conceptual competencies related to proving, their views on self-perception of proving, their general views related to proving and their feelings regarding proving.

After the implementation, there were no items in the 20-item scale, where the number of pre-service teachers' numerical view scores remained 60 points or below, that is, categorically negative. However, there is only one item that categorically corresponds to neutral views, which is the item "Proofs sometimes involve strategies that

are not at all obvious". Weber (2001) stated that the difficulty of undergraduate students in proving is due to the lack of strategic knowledge and emphasized the importance of strategic knowledge to overcome this difficulty. Therefore, in the next cycle, it was decided to add separate tasks for each proof method, which aims to develop strategic knowledge of pre-service teachers. According to mathematicians, each proof contains different key ideas (Doruk & Kaplan, 2013). Tasks that adopt strategies suitable for these ideas for each proof method and tasks that require proving using these strategies can overcome pre-service teachers' instability in the context of this item.

When the quantitative findings obtained from the scale before and after the implementation were compared, it is seen that there is a significant effect on the pre-service teachers' view scores about their conceptual competencies related to proving, their view scores regarding their self-perception of proving and their categorical views, their view scores regarding the importance of proving and their categorical views, their view scores regarding general views related to proving and their categorical views, their view scores regarding feelings regarding proving and their categorical views.

When the qualitative findings obtained from the semi-structured interviews were examined before the implementation, it is seen that pre-service teachers had some negative views regarding their categorical views on their conceptual competencies related to proving, their categorical views on the importance of proving, their categorical views on general views related to proving and their feelings regarding proving.

In the semi-structured interviews conducted after the intervention, three pre-service teachers had positive views in all contents except their views on self-perception of proving. For views about self-perception, only one pre-service teacher expressed neutral views. The reason for this pre-service teacher's instability might be due to his difficulty in proving the propositions he saw for the first time. Due to the complex nature of proof, it is a concern that every student can experience in proving activities.

When the qualitative findings obtained from the semi-structured interviews before and after the implementation were compared, it is seen that the course had a positive effect on categorical views of the pre-service teachers regarding the conceptual competencies related to proving, their categorical views about the importance of proving, their general categorical views related to proving, their categorical views regarding feelings regarding proving and the categorical views about proving in favor of post-implication.

When the data obtained from the scale and semi-structured interviews before and after the implementation are considered together, it is seen that the course had a positive effect on the pre-service teachers' views about proof. The reason for this effect may be that the pre-service teachers developed their content knowledge and the pedagogical content knowledge related to proof. Participants who have developed content and pedagogical content knowledge have probably improved their views about proof. Pre-service teachers' improvement in their cognitive behavior on a subject may have also improved their affective behavior. As Tyler (1973) stated in his study, while individuals' learning occurs cognitively, it may also occur in affective developments as a result (Tyler, 1973 as cited in Yakar & Duman, 2017).

To improve pre-service teachers' views about their conceptual competencies, the implementation process started with a module called *modern components of proof*. This module focused on terms (undefined terms and definitions), propositions (assumptions, theorems, and false propositions), as well as axioms, postulates, lemmas, and corollaries. When designing the course we assumed that this module would contribute to the improvement in view scores about their conceptual competencies related to proving. Comprehending these proof components well may have provided pre-service teachers to have more confidence in their conceptual competencies. Talking about the functions of proof during the course may have improved participants' views about proof. Explanation of proof schemes and proving tasks using the analytical scheme may have distanced them from external and experimental proof schemes. Therefore, pre-service teachers may have noticed that examples, figures or external sources are not sufficient for proving. Dealing with different proofs of a theorem in the analytical scheme may have contributed to pre-service teachers' understanding of these theorems. Again, the use of lemmas and corollaries, if necessary, may have improved the views of participants.

In the implementation process, pre-service teachers were allowed to work individually using worksheets and internalize these proofs by discussing them with their peers. Instead of product-oriented proof teaching, process-oriented proof teaching was adopted. Likewise, in his study, Yoo (2008) emphasized the necessity of choosing a process-oriented proof approach for effective proof teaching. This approach may have improved pre-service teachers' self-perception of proving.

It is thought that dealing with a variety of proofs about different subjects during the course might have had affected the pre-service teachers' view scores and categorical views about the importance of proving. Because performing very different proving activities for different subjects of mathematics is an effective tool for understanding mathematics subjects and proofs are as important as theorems in mathematics. Likewise proof might be an effective tool for learning mathematics by comprehending it (Knuth, 2002a). Proving theorems in

the context of undergraduate level subjects may have developed participants' view that proof has an indispensable place in theoretical mathematics.

The course had comprehensive content and a student-centered teaching approach. This might have contributed to participants' general view scores and categorical views about proof. According to Marlowe and Page (2005), the more active the student is in the process, the more effective and permanent the learning is. Besides, explaining the steps to be taken specifically for each proof method during the course and having a lot of examples may have improved the pre-service teachers' understanding of the strategies to be used in proofs. Dividing the stages of proofs in the worksheets may have strengthened the pre-service teachers' views that the proof has stages such as problem-solving.

To improve the views of pre-service teachers about their feelings regarding proving, group and individual tasks have been conducted through worksheets and activities that would improve pre-service teachers' content knowledge of proof using worksheets that would catch their interest, and improve their pedagogical content knowledge using scenarios. It is thought that the pre-service teachers' role as both students and teachers in the classroom, apart from the traditional teaching of proof, contributed to their view scores and categorical views regarding their feelings about proving. Apart from proving tasks, participants were required to explain the reasons behind students' difficulties in the scenarios, to determine the teaching strategies to overcome these difficulties and to identify the proof schemes in the scenarios. These tasks might have a positive effect on their feelings regarding proving.

Participants of this intervention study were limited to upper-secondary school pre-service mathematics teachers at a university. This intervention study can be implemented with pre-service teachers studying in mathematics teaching departments of different universities in different regions, and their effect on their views on proof can be examined. It can be suggested that these studies be carried out with more participants studying at different grade levels.

This study only investigated the effects of an intervention (which aimed to improve pre-service teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge of proof) on pre-service teachers' views about proof. We suggest researchers carry out studies that offer different ideas and interventions aimed at developing different affective behaviors of pre-service teachers such as views, attitudes, and beliefs about proof.

Kaynaklar/References

- Agresti, A. (1983). Testing marginal homogeneity for ordinal categorical variables. *Biometrics*, 39(2), 505-510.
- Agresti, A. (1990). *Categorical data analysis*. New York: John Wiley and Sons.
- Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: Some implications for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(6), 869-890.
- Altun, M. (2001). *Matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Kitabevi.
- Aydoğdu-İskenderoğlu, T., Baki, A., & Palancı, M. (2011). Matematiksel kanıt yapmaya yönelik görüş ölçeği: Geçerlik ve güvenilirlik çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 181-203.
- Baki, A. (2015). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi* (6. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216-230). London, UK: Hodder & Stoughton.
- Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (Vol III, pp. 907-920). Beijing: Higher Education Press.
- Bayraktar-Çiftçi, Z., Akgün, L., & Deniz, D. (2013). Dokuzuncu sınıf matematik öğretim programı ile ilgili uygulamada karşılaşılan sorunlara yönelik öğretmen görüşleri ve çözüm önerileri. *Anadolu Journal of Educational Sciences International*, 3(1), 1-21.
- Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1), 23-40.
- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351-382.
- Branch, R. M. (2009). *Instructional design: The ADDIE approach*. New York: Springer International Publishing.
- Can, A. (2017). *SPSS ile bilimsel araştırma sürecinde nicel veri analizi* (5. Baskı). Ankara: Pegem Akademi.

- Cihan, F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı* (Unpublished doctoral dissertation). Marmara University, İstanbul.
- Cihan, F. & Akkoç, H. (2018, May). *İspata yönelik alan ve pedagojik alan bilgisi geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı*. Vth International Eurasian Educational Research Congress (EJER-2018), Antalya.
- Cihan, F. & Akkoç, H. (2019). Developing pre-service mathematics teachers' pedagogical content knowledge of proof schemes: An intervention study. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 155-162). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- Cohen, J. (1988). *Statistical power analysis for the behavioral sciences* (2nd ed.). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Department for Education. (2013a). *Mathematics programmes of study: Key stages 1 and 2 - National curriculum in England*. Retrieved March 17, 2017 from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/335158/PRIMARY_national_curriculum_-_Mathematics_220714.pdf
- Department for Education. (2013b). *Mathematics programmes of study: Key stage 3 - National curriculum in England*. Retrieved March 17, 2017 from https://www.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/239058/SECONDARY_national_curriculum_-_Mathematics.pdf
- Department for Education. (2014). *Statutory guidance national curriculum in England: Mathematics programmes of study*. Retrieved April 5, 2017 from <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>
- Department of Education & Training of Australia [DETA]. (2004). *Competency frameworks for teachers*. Department of Education & Training WA: East Perth.
- Dickerson, D. S., & Doerr, H. M. (2014). High school mathematics teachers' perspectives on the purposes of mathematical proof in school mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 711-733.
- Doruk, M. & Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatla yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*, 2014(3), 71-93.
- Doruk, M. & Kaplan, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının dizilerin yakınsaklığı kavramı üzerine ispat değerlendirme becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 2(1), 231-240.
- Doruk, M., Özdemir, F., & Kaplan, A. (2014). Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri ile matematiğe karşı öz-yeterlik algıları arasındaki ilişki. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 23(2), 861-874.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Gökkurt, B. & Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 1(4), 56-64.
- Gömlüksiz, M. N. & Kan, A. Ü. (2012). Eğitimde duyuşsal boyut ve duyuşsal öğrenme. *Turkish Studies-International Periodical For the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic*, 7(1), 1159-1177.
- Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30(316), 35-45.
- Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5-23.
- Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM-International Journal of Mathematics Education*, 40(3), 487-500.
- Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(1), 14-19.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.
- İmamoğlu, Y., & Yontar-Toğrol, A. (2010). Freshmen and senior teaching science and mathematics students' proving patterns and conceptualizations of the nature and role of proof in school mathematics. *International Journal for Cross-Disciplinary Subjects in Education*, 1(2), 79-87.
- İmamoğlu, Y., & Yontar-Toğrol, A. (2015). Proof construction and evaluation practices of prospective mathematics educators. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 3(2), 130-144.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Unpublished doctoral dissertation). Karadeniz Technical University, Trabzon.
- Kaplan, A., Doruk, M., Öztürk, M., & Duran, M. (2016). Matematik ve matematik eğitimi öğrencilerinin matematiksel ispata yönelik görüşleri arasında fark var mıdır? *Journal of Human Sciences*, 13(3), 6020-6037.
- Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education*, 1(2), 134-141.
- Knuth, E. J. (2002a). Proof as a tool for learning mathematics. *Mathematics Teacher*, 95(7), 486-490.
- Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88.
- Köğce, D. (2012, June). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatın öğrenmeye katkısı ile ilgili görüşleri ve ispat düzeyleri*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 27-30 Haziran 2012, Niğde.
- Lee, W. I. (1999). *The relationship between students' proof writing ability and Van Hiele levels of geometric thought in a college geometric course* (Unpublished doctoral dissertation). University of Northern Colorado, Greeley, Colorado, USA.
- Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, 2(2), 253-270.
- Marlowe, B., & Page, M. (2005). *Creating and sustaining the constructivist classroom* (2nd ed.). Thousand Oaks, California: Corwin Press Inc.
- Ministry of National Education [MoNE]. (2017a). *Öğretmenlik mesleği genel yeterlikleri*. Ankara: Öğretmen Yetiştirme ve Geliştirme Genel Müdürlüğü. Retrieved from https://oygm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_12/11115355_YYRETMENLYK_MESLEY_GENEL_YETERLYKLERI.pdf on December 2019.
- Ministry of National Education [MoNE]. (2017b). *Ortaöğretim matematik öğretmeni özel alan yeterlikleri*. Ankara: Öğretmen Yetiştirme ve Geliştirme Genel Müdürlüğü. https://oygm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2017_12/13160643_MATEMATYK.pdf 25.01.2019 tarihinde erişildi.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA, US: Sage Publications, Inc.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.
- Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- National Board for Professional Teaching Standards [NBPTS]. (2010). *Mathematics standards for teachers of students ages 11-18+* (3rd.ed.). Arlington, VA: National Board for Professional Teaching Standards.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers [NGA Center & CCSSO]. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: Authors. Retrieved January 20, 2017 from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
- Pallant, J. (2007). *SPSS survival manual: A step by step guide to data analysis using SPSS for windows* (3rd ed.). Maidenhead: Open University Press.
- Park, S., & Oliver, J. S. (2008). Revisiting the conceptualisation of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Science Education*, 38(3), 261-284.
- Pasigna, J. C., & Herrera, M. L. (2014). Professional profile and pedagogical content knowledge of geometry teachers in mathematical proofs in the context of public secondary high schools. *SDSSU Multidisciplinary Research Journal*, 2(1), 22-34. Retrieved March 23, 2017 from <https://www.smrj.sdssu.edu.ph/index.php/SMRJ/article/view/40/38>
- Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 319-325. doi: <https://dx.doi.org/10.1023/A:1024360204239>
- Rossi, R. J. (2006). *Theorems, corollaries, lemmas, and methods of proof*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Samkoff, A., & Weber, K. (2015). Lessons learned from an instructional intervention on proof comprehension. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 28-50.

- Selden A., & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. In J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, (Vol. III, pp. 457-470). Ithaca, NY: Cornell University.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol 2, pp. 54-60). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166.
- Tabach, M., Levenson, E., Barkai, R., Tirosh, D., Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2010). Secondary school teachers' awareness of numerical examples as proof. *Research in Mathematics Education*, 12(2), 117-131.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. In G. Hanna, & M. De Villiers, (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*, (pp. 13-49). New York, NY: Springer.
- Tok, T. N. (2017). Etkili öğretim için yöntem ve teknikler. In A. Doğanay (Ed.), *Öğretim ilke ve yöntemleri* (11. Baskı) (pp. 176-259). Ankara: Pegem Akdemi.
- Turgut, M., Yenilmez, K., & Uygan, C. (2013). Ortaokul ve lise matematik öğretmenleri adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 6(13), 227-252.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight: A Theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Waring, S. (2000). *Can you prove it? Developing concepts of proof in primary and secondary schools*. Leicester, UK: The Mathematical Association.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119.
- Weber, K. (2004). A framework for describing the processes that undergraduates use to construct proofs. In M. J. Høines, & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (Vol 4, pp. 425-432). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Wilcoxon, F. (1945). Individual comparisons by ranking methods. *Biometrics Bulletin*, 1(6), 80-83.
- Yakar, A. & Duman, B. (2017). Duyuşsal farkındalığa dayalı öğretimin akademik başarı ve öğretmenlik mesleğine yönelik tutumlar üzerine etkisi. *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi*, 3(3), 30-47.
- Yoo, S. (2008). *Effects of traditional and problem-based instruction on conceptions of proof and pedagogy in undergraduates and prospective mathematics teachers*. (Unpublished doctoral dissertation). The University of Texas at Austin, Austin, TX. Retrieved January 23, 2016 from <https://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/17834>
- Yüksel-Ayten, M. & Hayırsever, F. (2019). Ortaöğretim kademesinde uygulanan öğretim programlarının öğrenci görüşlerine göre değerlendirilmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(2), 290-323.