Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.657475**

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2): 1224-1232, 2020
Journal of the Institute of Science and Technology, 10(2): 1224-1232, 2020
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

Simplisel Leibniz Cebirler Üzerine

Ali AYTEKİN[1*]

ÖZET: Bu makalenin temel amacı, Leibniz cebirler kategorisinde simplisel objeyi tanımlayarak, simplisel Leibniz cebirler kategorisi ile Leibniz cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisinin denkliğini göstermektir.

Anahtar Kelimeler: Leibniz cebir, simplisel obje, çaprazlanmış modül.

On Simplicial Leibniz Algebras

ABSTRACT: The main purpose of this paper is to define the simplicial object in the category of Leibniz algebras and to show the equivalence of the category of simplicial Leibniz algebras and the category of crossed modules on Leibniz algebras.

Keywords: Leibniz algebra, simplicial object, crossed module.

[1] Ali AYTEKİN (**Orcid ID:** 0000-0001-7892-6960), Pamukkale Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Denizli, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Ali AYTEKİN, e-mail: aaytekin@pau.edu.tr

Geliş tarihi / *Received:* 10-12-2019
Kabul tarihi / *Accepted:* 01-02-2020

GİRİŞ

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak (Whitehead, 1949) tarafından 19. yüzyılın ortalarında relatif homotopi gruplarının cebirsel yapıları üzerine yaptığı çalışmada ortaya atılmıştır. O zamandan itibaren bu kavram diğer alanlarda da önemli bir yer tutmuştur. Bu konuda yapılan çalışmalardan bazıları (Aytekin ve ark., 2012; Emir ve ark., 2019; Şahan, 2019) dır. Günümüzde çaprazlanmış modüller, temel cebirsel yapılardan biri olarak düşünülebilir. Çaprazlanmış modüllerin homotopi teorisi, gruplar üzerinde homoloji ve kohomoloji, cebirsel K-teori, devirli (cyclic) homoloji, kombinatoriyel grup teori ve diferensiyel geometri dahil olmak üzere matematiğin birçok alanında önemli rolü vardır. Bu çalışmaların yanısıra simplisel gruplar ilk olarak (Kan, 1958) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra (Ellis, 1993) simplisel Lie cebirlerini tanımlayarak Moore kompleksi 1 olan simplisel Lie cebirlerinin kategorisi ile Lie çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliğini ispatlamıştır. Ellis aynı makalesinde Moore kompleksi 2 olan simplisel Lie cebirler kategorisiyle Lie 2-çaprazlanmış modüller kategorisinin doğal denkliğini de göstermiştir. Ayrıca yapının homotopiksel ve homolojiksel özelliklerini de incelemiştir.

Leibniz cebirler (Bloh, 1965) tarafından D-cebirler ismiyle tanımlanmıştır. Fakat Leibniz cebirler (Loday, 1993) in Leibniz cebirlerin (ko)homolojisi hakkında yaptığı çalışması ile popüler olmuştur. Bu yüzden Leibniz cebirleri Loday cebirleri olarak da adlandırılır. Leibniz cebirler Lie cebirlerinin bir genellemesi olarak düşünülebilir, temel farklılık ise Leibniz parantezinde (bracket) anti-simetri özelliğinin sağlanmamasıdır. Aynı zamanda bu yapının Matematik ve fizikte pek çok uygulaması vardır (Şahan ve ark., 2019). Diğer taraftan Leibniz cebirler üzerinde çaprazlanmış modüller kategorisi (Casas, 1999) tarafından literatüre sunulmuştur. Sonrasında pek çok bilim insanı tarafından konu ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan bazıları (Casas ve ark., 2008; Atik ve ark., 2017; Casas ve ark., 2018)'dır.

MATERYAL VE YÖNTEM

Leibniz Cebirler ve Çaprazlanmış Modüller

Bu bölümde literatürde var olan temel tanım ve özelliklere yer verilecektir. k, birimli ve değişmeli bir hakla olmak üzere makale boyunca tüm Lie ve Leibniz cebirleri k üzerinde tanımlanmış olarak düşünülecektir. Bu bölümde (Loday ve ark., 1993) temel referans olarak alınacaktır.

Tanım: L bir k-modül ve $[-,-]: L\times L \to L$ bir lineer fonksiyon olsun. Eğer Leibniz özdeşliği olarak adlandırılan her $x,y,z\in L$ için

$$[x,[y,z]]=[[x,y],z]-[[x,z],y]$$

eşitliği sağlanıyorsa L ye *Leibniz cebir* denir.

Örnekler: 1) Her Lie cebiri bir Leibniz cebiridir.

2) A bir asosyatif k-cebir ve $D: A\to A$ her $a,b\in A$ için

$$D\big(a(Db)\big)=DaDb=D\big(D(a)b\big)$$

şartını sağlayan bir k-cebir dönüşümü olsun. Bu durumda her $x,y\in A$ için

$$
\begin{aligned}
[,] &: A \times A \to A \\
(x,y) &\to [x,y] = xD(y) - (Dy)x
\end{aligned}
$$

çarpımı ile birlikte A bir Leibniz cebirdir.

Tanım: L ve L' iki Leibniz cebir ve $h : L \to L'$ bir k-lineer fonksiyon olsun. Bu durumda her $l, l' \in L$ için $h[l,l'] = [h(l), h(l')]$ ise h bir *Leibniz cebir homomorfizmi* (veya kısaca Leibniz homomorfizmi) olarak adlandırılır.

Bu tanımlama yardımıyla objeleri Leibniz cebirler ve morfizmleri Leibniz cebir homomorfizmleri olan Leibniz cebirler kategorisi oluşturulur ve bu kategori **Lbnz** ile gösterilir.

Tanım: L ve M iki Leibniz cebir olsun. Eğer

$$
\begin{array}{c} L \times M \to M \\ (l,m) \to {}^{l}m \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{c} M \times L \to M \\ (l,m) \to m^{l} \end{array}
$$

bilineer fonksiyonları her $l, l' \in L$ ve $m, m' \in M$ için

E$_1$) ${}^{l}[m,m'] = [{}^{l}m, m'] - [{}^{l}m', m]$

E$_2$) $[m, {}^{l}m'] = [m^{l}, m'] - [m,m']^{l}$

E$_3$) $[m, m'^{l}] = [m,m']^{l} - [m^{l}, m']$

E$_4$) $m^{[l,l']} = (m^{l})^{l'} - (m^{l'})^{l}$

E$_5$) ${}^{l}(m^{l'}) = ({}^{l}m)^{l'} - {}^{[l,l']}m$

E$_6$) ${}^{l}({}^{l'}m) = {}^{[l,l']}m - ({}^{l}m)^{l'}$

şartlarını sağlıyorsa L, M üzerine *etkiyor* (veya Leibniz etkisi) denir.

Verilen bir L nin M üzerine etkisi yardımıyla

$$M \times L = \{(m,l) : m \in M \text{ ve } l \in L\}$$

yarı-direkt çarpımı oluşturulabilir. Burada elemanların çarpımı her $l, l' \in L$ ve $m, m' \in M$ için

$$[(m,l),(m',l')] = ([m,m'] + {}^{l}m' + m^{l'}, [l,l'])$$

şeklindedir.

Tanım: L ve M iki Leibniz cebir olsun. Eğer $\partial : M \to L$ Leibniz cebir homomorfizmi L nin M üzerine etkisi ile birlikte her $l \in L$ ve $m, m' \in M$ için

CM$_1$) $\partial\left({}^{l}m\right) = \left[l, \partial(m)\right]$ ve $\partial\left(m^{l}\right) = \left[\partial(m), l\right]$,

CM$_2$) ${}^{\partial(m)}m' = \left[m, m'\right] = m^{\partial(m')}$

şartlarını sağlıyorsa $\left(M, L, \partial\right)$ üçlüsüne Leibniz cebirlerin *çaprazlanmış modülü* (veya kısaca Leibniz çaprazlanmış modül) denir.

$\left(M, L, \partial\right)$ ve $\left(M', L', \partial'\right)$ iki çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda

$$f = \left(\mu, \eta\right) : \left(M, L, \partial\right) \to \left(M', L', \partial'\right)$$

Leibniz çaprazlanmış modül homomorfizmi

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mu"'] & L \arrow[d, "\eta"] \\ M' \arrow[r, "\partial'"'] & L' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times L \arrow[r] \arrow[d, "(\mu,\eta)"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ M' \times L' \arrow[r] & M' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} L \times M \arrow[r] \arrow[d, "(\eta,\mu)"'] & M \arrow[d, "\mu"] \\ L' \times M' \arrow[r] & M' \end{tikzcd}$$

diyagramları değişmeli olacak şekilde var olan $\mu : M \to M'$ ve $\eta : L \to L'$ Leibniz cebir homomorfizm çiftidir. Yani

$$\eta\,\partial = \partial'\mu,\ \mu\left({}^{l}m\right) = {}^{\eta(l)}\mu(m) \text{ ve } \mu\left(m^{l}\right) = \mu(m)^{\eta(l)}$$

dir. Böylece **XMod(Lbnz)** ile gösterilen Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisi oluşturulabilir.

Örnekler: 1) Herhangi bir L Leibniz cebir için $\left(L, L, id\right)$ üçlüsü bir Leibniz çaprazlanmış modüldür.

2) L bir Leibniz cebir N, L nin bir ideali olsun. Bu durumda her $n \in N$ için

$$\begin{aligned} inc. : N &\to L \\ n &\to n \end{aligned}$$

içine dönüşümü ve her $l \in L$ ve $n, n' \in N$ için

$$\begin{aligned} L \times N &\to N \\ (l, n) &\to [l, n] = {}^{l}n \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} N \times L &\to N \\ (n, l) &\to [n, l] = n^{l} \end{aligned}$$

etkileri ile birlikte $\left(N, L, inc.\right)$ üçlüsü bir Leibniz çaprazlanmış modüldür.

3) L ve M iki Leibniz cebir ve $\phi : M \to L$ Leibniz cebirlerin bir merkezi genişlemesi, yani $\phi : M \to L$ örten morfizmasının çekirdeği M nin merkezinde olsun. L nin M üzerine olan etkisi her $l \in L$ ve $m \in M$ için

$$\begin{aligned} L \times M &\to M \\ (l,m) &\to {}^{l}m = \left[\phi^{-1}(l), m\right] \end{aligned} \quad \text{ve} \quad \begin{aligned} M \times L &\to M \\ (m,l) &\to m^{l} = \left[m, \phi^{-1}(l)\right] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece (M, L, ϕ) üçlüsü bir Leibniz çaprazlanmış modüldür.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Simplisel Leibniz Cebirler

Bu bölümde simplisel Leibniz cebirler tanımlanarak bu objelerin yardımıyla simplisel Leibniz cebirler kategorisi oluşturulacaktır. Ayrıca bu kategorinin Leibniz cebirler kategorisiyle doğal denkliği de verilecektir.

Tanım: $L = \{L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots\}$ Leibniz cebirlerin bir ailesi olsun.

$$d_i^{\,n} : L_n \to L_{n-1} \text{ ve } s_i^{\,n} : L_n \to L_{n+1}$$

Leibniz homomorfizmleri olmak üzere $0 \le i \le n$ için simplisel özdeşlikler denilen

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \quad , i < j \\ d_i s_j &= \begin{cases} s_{j-1} d_i & , i < j \\ id & , i = j \text{ veya } i = j+1 \\ s_j d_{i-1} & , i > j+1 \end{cases} \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \quad , i \le j \end{aligned}$$

özdeşlikler sağlanıyorsa $\left((L_n)_{n\in N}, d_i, s_j\right)$ üçlüsüne *simplisel Leibniz cebir* denir. Burada d_i ve s_j sırasıyla *yüz ve dejenere operatörleri* olarak adlandırılır. Diyagram olarak $\left((L_n)_{n\in N}, d_i, s_j\right)$ simplisel Leibniz cebiri

$$L : \ldots L_k \substack{\longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow} L_{k-1} \ldots L_2 \underset{s_0, s_1}{\overset{d_0, d_1, d_2}{\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \longleftarrow}}} L_1 \underset{s_0}{\overset{d_0, d_1}{\substack{\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow}}} L_0$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek: L bir simplisel Leibniz cebir olsun. Her $n \in N$ için $L_n = L$ ve $d_i = s_j = id$ olmak üzere $\left((L_n)_{n\in N}, d_i, s_j\right)$ bir simplisel Leibniz cebirdir. Bu üçlüye sabit simplisel Leibniz cebir denir ve $k(L,0)$ ile gösterilir.

L ve L' birer simplisel Leibniz cebir olsun. $f : L \to L'$ simplisel Leibniz cebir morfizmi, d_i ve s_j yüz ve dejenere operatörleri ile değişmeli $f_n : L_n \to L_n'$ Leibniz cebir homomorfizmlerinin bir ailesidir. Yani; herbir i ve n için,

$$d_i f_n = f_{n-1} d_i \text{ ve } f_n s_i = s_i f_{n-1}$$

dir. Böylece **Simp(Lbnz)** ile gösterilen simplisel Leibniz cebirler kategorisi oluşturulabilir.

Moore Kompleks ve Parçalanmış Objeler

L bir simplisel Leibniz cebir olsun.

$$NL_0 = L_0 \text{ ve } NL_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} Çekd_i$$

olmak üzere d_n nin NL_n ye kısıtlanmışı olan

$$\partial : NL_n \to NL_{n-1}$$

homomorfizmini tanımlayalım. Bu durumda

$$NL : \cdots \longrightarrow NL_n \xrightarrow{\partial_n} NL_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} NL_1 \xrightarrow{\partial_1} NL_0$$

zinciri simplisel Leibniz cebirin *Moore kompleksi* olarak adlandırılır ve (NL,∂) veya kısaca NL ile gösterilir. Eğer $n > k$ için $NL_n = 0$ ise simplisel Leibniz cebirinin boyutu k dan küçük veya eşittir denir ve $\leq k$ şeklinde gösterilir. Böylece Moore kompleksinin boyutu $\leq k$ olan simplisel Leibniz cebirler kategorisi oluşturulur ve bu kategori $\mathbf{Simp}_{\leq k}(\mathbf{Lbnz})$ ile gösterilir.

Aşağıdaki tanımın Lie cebirleri için olan durumun incelenmesi (Ellis, 1993) tarafından verilmiştir.

Tanım: $0 \leq i \leq k$ için L_i ler birer Leibniz cebir olmak üzere

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow L_k \;\substack{\longrightarrow \\ \vdots \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \vdots \\ \longleftarrow}\; L_{k-1} \cdots L_2 \;\substack{\xrightarrow{d_0,d_1,d_2} \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longleftarrow \\ \xleftarrow[s_1,s_0]{}}\; L_1 \;\substack{\xrightarrow{d_1,d_0} \\ \longrightarrow \\ \xleftarrow[s_0]{}}\; L_0$$

ile tanımlanan simplisel Leibniz cebire k-*parçalanmış simplisel Leibniz cebir* denir. k-parçalanmış simplisel Leibniz cebirler kategorisi $\mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz})$ ile gösterilir. $\mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz})$ kategorisinden $\mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz})$ kategorisine kısıtlama ile verilen

$$tr_k : \mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz}) \to \mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz})$$

parçalanmış funktoru vardır. Aynı zamanda bu funktorun k-iskelet funktor olarak adlandırılan st_k sol eki ve k-koiskelet funktor olarak adlandırılan $cost_k$ sağ eki vardır. Bu ekler diyagram olarak

$$\mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz}) \underset{tr_k}{\overset{\cos t_k}{\leftrightarrows}} \mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz}) \underset{st_k}{\overset{tr_k}{\leftrightarrows}} \mathbf{Tr}_k\mathbf{Simp}(\mathbf{Lbnz})$$

şeklinde gösterilir.

Teorem: Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisi **XMod(Lbnz)** ile Moore kompleksinin boyutu 1 olan simplisel Leibniz cebirler kategorisi $\mathbf{Simp}_{\leq 1}(\mathbf{Lbnz})$ doğal denktir.

İspat: L Moore kompleksinin boyutu 1 olan simplisel Leibniz cebir, L_0 ve L_1 iki Leibniz cebir olsun. $M = Çekd_0$ alalım ve ∂, d_1 in M ye kısıtlanmışı olsun. L_0 ın M üzerine etkisi her $l \in L_0$ ve $m \in M$ için

$$\begin{array}{lcl} L_0 \times M \to M & & M \times L_0 \to M \\ (l,m) \to {}^l m = [s_0 l, m] & \text{ve} & (m,l) \to m^l = [m, s_0 l] \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Bu etki yardımıyla (M, L_0, ∂) bir Leibniz çaprazlanmış modül olacaktır. Çünkü, her $l \in L_0$ ve $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1)\ {}^l[m,m'] &= [s_0 l, [m,m']] \\ &= [[s_0 l, m], m'] - [[s_0 l, m'], m] \\ &= [{}^l m, m'] - [{}^l m', m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2)\ [m, {}^l m'] &= [m, [s_0 l, m']] \\ &= [[m, s_0 l], m'] - [[m, m'], s_0 l] \\ &= [m^l, m'] - [m, m']^l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_3)\ [m, m'^l] &= [m, [m', s_0 l]] \\ &= [[m, m'], s_0 l] - [[m, s_0 l], m'] \\ &= [m, m']^l - [m^l, m'] \end{aligned}$$

olup diğer etki şartları da benzer şekilde gösterilebilir. O halde verilen etki Leibniz etkisidir. Şimdi çaprazlanmış modül şartlarını inceleyelim. Her $l \in L_0$ ve $m, m' \in M$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{CM}_1)\ \partial({}^l m) &= \partial[s_0 l, m] \\ &= [d_1 s_0 l, d_1(m)] \\ &= [l, \partial(m)] \qquad (\because d_1 s_0 = id) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial(m^l) &= \partial[m, s_0 l] \\ &= [d_1(m), d_1 s_0 l] \\ &= [\partial(m), l] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{CM}_2)\quad {}^{\partial(m)}m' &= [s_0\partial(m), m'] \\
&= [s_0 d_1 m, m'] \\
&= [s_0 d_1 m - m + m, m'] \\
&= [s_0 d_1 m - m, m'] + [m, m'] \\
&= [d_2 s_0 m - d_2 s_1 m, d_2 s_1 m'] + [m, m'] \qquad (\because d_2 s_1 = id,\ s_0 d_1 = d_2 s_0) \\
&= d_2[s_0 m - s_1 m, s_1 m'] + [m, m'] \\
&= [m, m']
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m^{\partial(m')} &= [m, s_0\partial(m')] \\
&= [m, s_0 d_1 m' - m' + m'] \\
&= [m, s_0 d_1 m' - m'] + [m, m'] \\
&= [d_2 s_1 m, d_2 s_0 m' - d_2 s_1 m'] + [m, m'] \\
&= d_2[s_1 m, s_0 m' - s_1 m'] + [m, m'] \\
&= [m, m']
\end{aligned}$$

olup (M, L_0, ∂) üçlüsü bir Leibniz çaprazlanmış modüldür. Böylece

$$U : \mathbf{Simp}_{\leq 1}(\mathbf{Lbnz}) \to \mathbf{XMod}(\mathbf{Lbnz})$$

funktoru elde edilir.

Tersine, $\partial : M \to L_0$ bir çaprazlanmış modül olsun. L_0 ın M üzerine etkisi yardımıyla

$$M \times L_0 = \{(m, l) : m \in M \text{ ve } l \in L_0\}$$

yarı-direkt çarpımı oluşturulabilir. Her $l, l' \in L_0$ ve $m, m' \in M$ için

$$[(m, l), (m', l')] = ([m, m'] + {}^{l}m' + m^{l'}, [l, l'])$$

olacaktır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
d_0 :\quad & M \times L_0 \to L_0 \\
& (m, l) \mapsto l \\
d_1 :\quad & M \times L_0 \to L_0 \\
& (m, l) \mapsto \partial(m) + l \\
s_0 :\quad & L_0 \to M \times L_0 \\
& l \mapsto (0, l)
\end{aligned}$$

morfizmlerini ele alalım. Bu morfizmler simplisel özdeşlikleri sağladığı için

$$L_1 \underset{s_0}{\overset{d_0,d_1}{\rightleftarrows}} L_0$$

1-parçalanmış simplisel Leibniz cebirdir. Sonuç olarak

$$V : \mathbf{XMod}(\mathbf{Lbnz}) \to \mathbf{Simp}_{\leq 1}(\mathbf{Lbnz})$$

funktoru elde edilir. Böylece, bu funktorlar

$$\mathbf{XMod}(\mathbf{Lbnz}) \underset{U}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \mathbf{Simp}_{\leq 1}(\mathbf{Lbnz})$$

şeklinde gösterilir.

SONUÇ

Yapılan incelemelerden sonra simplisel Leibniz cebirler tanımlanarak özellikleri hakkında bilgi edinilmiştir. Bu bağlamda, Moore kompleksinin boyutu 1 olan simplisel Leibniz cebirler kategorisiyle Leibniz çaprazlanmış modüller kategorisinin denkliği verilmiştir. Bu denklik bir kategoride olan bir özelliğin incelemeye gerek duyulmaksızın diğerinde de var olduğunu göstermesi açısından oldukça önemlidir.

KAYNAKLAR

Atik M, Aytekin A, Uslu EÖ, 2017. Representability of actions in the category of (Pre)crossed modules in Leibniz algebras. Communications in Algebra, 45(5): 1825–1841.

Aytekin A, Casas JM, Uslu EÖ, 2012. Semi-Complete Crossed Modules of Lie Algebras. Journal of Algebra and Its Applications, 11(5): 1–24.

Bloh A, 1965. A generalization of the concept of a Lie algebra. Doklady Akademii Lauk, 165 (3): 471–473.

Casas JM, 1999. Crossed extensions of Leibniz algebras. Communations in Mathematics, 27 (12): 6253–6272.

Casas JM, Fernandez-Casado R, Garcia-Martinez, X, Khmaladze E, 2018. Actor of a Crossed Module of Leibniz Algebras. Theory and Applications of Categories, 33(2): 23–42.

Casas JM, Khmaladze E, Ladra M, 2008. Crossed modules for Leibniz n-algebras. Forum Mathematicum, 20: 841–858.

D.M. Kan, 1958. A Combinatorial Definition of Homotopy Groups. Annals of Mathematics, 67(2): 288–312.

Ellis GJ, 1993. Homotopical aspects of Lie algebras. Journal of The Australian Mathematical Society, 54(3): 393–419.

Emir K, Akay HG, Pullback crossed modules in the category of racks. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 48(1): 140–149.

Loday JL, 1993. Une version non commutative des algebres de Lie: les algebres de Leibniz. L’Enseignement Mathhematique, 39: 269–293.

Loday JL, Pirashvili T, 1993. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)homology. Mathematische Annalen, 296(1): 139–158.

Şahan T, 2019. Further remarks on liftings of crossed modules. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 48(3): 743–752.

Şahan T, Erciyes A, 2019. Actions of internal groupoids in the category of Leibniz Algebra. Communications Series A1:Mathematics and Statistics, 68(1): 619–632.

Whitehead JHC, 1949. Combinatorial Homotopy. Bulletin of the American Mathematical Society, 55: 453–496.