Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.646736**
Araştırma Makalesi / *Research Article*
Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2): 1254-1262, 2020
Journal of the Institute of Science and Technology, 10(2): 1254-1262, 2020
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

Riesz Uzaylarında Otomorfizma ve Biotomorfizmaların f-Cebir Yapıları ve Diğer Bazı Cebir Türleri İle İlişkisi

İbrahim GÖKCAN[1*]

ÖZET: f-Cebiri , d-Cebiri, hemen hemen f-Cebiri ve yarıasal f-Cebiri yapıları tanıtıldı ve aralarındaki ilişkiler Aliprantis ve Burkinshaw (2006) tarafından çalışıldı. Zaanen, Huijsmans, Boulabiar, Buskes ve Triki gibi matematikçiler tarafından Riesz uzayları üzerinde homomorfizma, izomorfizma, otomorfizma ve biotomorfizma kavramları tanımlandı. Riesz Uzaylarında Biotomorfizmalar üzerinde f-Cebiri Buskes, Page ve Yilmaz (2010) ve Boulabiar ve Brahmi (2016) tarafından çalışıldı. Boulabiar ve Brahmi (2016) tarafından biotomorfizma uzayının cebirsel yapısı incelenerek $e \in X^+$, $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $f_1, f_2 \in Orth(X,X)$ için

$$(f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1, f_2(e, x_2))$$

şeklinde tanımlanan çarpım yardımıyla bu uzayın bir f −Cebir yapısına sahip olduğu gösterildi. Bu çalışmada, $Orth\,(X,X)$ uzayında f-Cebiri, d-Cebiri, hemen hemen f-Cebiri ve yarıasal f-Cebiri aralarındaki ilişkiyi $*_e$ çarpımı yardımıyla incelemek ve Teorem 1.10 ile verilen X yarıasal f-Cebiri ile d-Cebiri ve hemen hemen f-Cebiri arasındaki geçişlerin biotomorfizmalar üzerinde tanımlanan cebir türlerinde de sağlanıp sağlanmadığını incelemek istiyoruz. Daha önceki çalışmalardan Riesz Uzaylarında biotomorfizmalar üzerinde f-Cebirinin tanımlı olduğunu biliyoruz. Çalışmamızda X üzerinde tanımlanan otomorfizmalar uzayı $Orth\,(X)$ ile bitomorfizmalar uzayı ise $Orth\,(X,X)$ ile simgelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Biotomorfizma, f-cebiri, d-cebiri, hemen hemen f-cebiri, yarıasal f-cebiri

The f-algebra Structure of Orthomorphisms and Bi-orthomorphisms on Riesz Space and Relation with Some Other Algebra

ABSTRACT: f-Algebra, d −Algebra, almost f −Algebra and semiprime f −Algebra is introduced and is worked their relations by Aliprantis and Burkinshaw (2006) . The concepts of homomorphism, isomorphism, automorphism and biortomorphism on Riesz spaces have been defined by mathematicians such as Zaanen, Huijsmans, Boulabiar, Buskes and Triki. f-Algebra on biorthomorphisms is worked by Buskes, Page and Yilmaz (2010) and by Boulabiar and Brahmi (2016) on Riesz Space. The algebraic structure of the biortomorphism space by examining by Boulabiar and Brahmi (2016), for $e \in X^+$, $\forall x_1, x_2 \in X$ and $f_1, f_2 \in Orth(X,X)$,

$$(f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1, f_2(e, x_2))$$

with the help of the product defined as this space has been shown to have an f-algebra structure. In this study, to examine the relationship between f-Algebra, d-Algebra, almost f-Algebra and semiprime f-Algebra in $Orth\,(X,X)$ space with the help of multiplication $*_e$ and we want to examine whether the transitions between X semiprime f-Algebra and d-Algebra and almost f-Algebra given by the Theorem 1.10 are also provided in algebra types defined on biortomorphisms. We already know that f-algebra on biorthomorphisms in Riesz Space. In this paper, orthomorphisms is introduced on X is denoted $Orth\,(X)$ and biorthomorphisms is denoted $Orth\,(X,X)$.

Keywords: Biorthomorphisms, f-algebra, d-algebra, almost f −algebra, semiprime f −algebra

[1] İbrahim GÖKCAN (**Orcid ID**: 0000-0002-6933-8494), Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Trabzon, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: İbrahim GÖKCAN, e-mail: gokcan4385@gmail.com

* Bu çalışma İbrahim GÖKCAN' ın Yüksek Lisans tezinden üretilmiştir.

Geliş tarihi / *Received:* 14-11-2019
Kabul tarihi / *Accepted:* 14-03-2020

GİRİŞ

Riesz uzaylarının ve Riesz cebirlerinin tarihsel gelişimini Riesz'e ve 1928' de Bologna'daki Uluslararası Matematik Kongresine dayandırabiliriz. Dedekind tam sıralı vektör uzayı için f −cebirlerinin, 1950' de Nakano (Nakano, 1950) ve 1953' te Amemiya (Amemiya, 1953) ve 1956' da Birkhoff ve Pierce (Birkhoff ve Pierce, 1956) ın çalışmalarının sonucu olarak bugünkü tanımı yapılmıştır. Riesz uzayları ve sıralı grupları analizciler ve cebirciler tarafından kapsamlı bir şekilde irdelenmeye çalışılmış olup 1950' li yıllardan sonra Riesz uzayları üzerinde tanımlanan f −cebirleri konusunun tekrar gündeme taşınması 1982 yılında Pagter'in doktora tez çalışmasında ve Lüxemburg tarafından Alkansas ders notlarında ciddi olarak ele alınmasıyla gerçekleşmiştir. Latis uzayları olarak ta anılan Riesz uzayları üzerinde Zaanen, Huijsmans, Boulabiar, Buskes ve Triki gibi matematikçiler tarafından homomorfizma, izomorfizma, otomorfizma ve biotomorfizma yapıları tanımlanmıştır.

MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 1.1 $(X, \leq)$ bir sıralı vektör uzayı olsun. Her boştan farklı sonlu alt kümenin $\leq$ bağıntısına göre supremumu varsa X e bir Riesz uzayı (veya bir vektör latisi) adı verilir. Klasik Riesz uzayı notasyon olarak $\{x_1, x_2\}$ kümesinin supremumu $x_1 \vee x_2$ ile infimumu ise $x_1 \wedge x_2$ gösterilir. Yani

$x_1 \vee x_2 = \sup\{x_1, x_2\}$ ve $x_1 \wedge x_2 = \inf\{\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2\}$ olur (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

Tanım 1.2 X bir Riesz uzayı olsun. Herhangi bir $x_1 \in X$ için; ${x_1}^+ = x_1 \vee O$ ile tanımlanan ${x_1}^+$ ya x_1 in pozitif kısmı, ${x_1}^- = -x_1 \vee O$ ile tanımlanan ${x_1}^-$ ye x_1 in negatif kısmı denir ve $|x_1|$ e x_1 in modülüsü denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

Tanım 1.3 X bir Riesz uzayı olsun. $x_1, x_2 \in X^+$ olmak üzere eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $nx_1 \leq x_2 \Longrightarrow x_1 = 0$ sağlanıyorsa X e Archimedean Riesz uzayı denir. Her Riesz uzayı Archimedean değildir. Örneğin $X = \mathbb{R}^2$ olarak alınırsa sözlük (lexicographically) sıralamaya göre Archimedean değildir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

Tanım 1.4 X bir Riesz uzayı olsun. X bir birleşmeli cebir ve $\forall x_1, x_2 \in X^+$ için $x_1 x_2 \in X^+$ ise X e bir Riesz cebiri (veya sıralı latis cebiri) denir.

Tanım 1.5 X bir Riesz cebiri olsun. $\forall x_1 \in X$ için $x_1 \cdot x_1 = x_1^2 \in X^+$ ise X e pozitif kareli veya pozitif kare özelliğine sahiptir denir.

Tanım 1.6 X bir Riesz cebiri olsun. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \wedge x_2 = 0$ ve $\forall c \in X^+$ için $cx_1 \wedge x_2 = x_1 c \wedge x_2 = 0$ sağlanıyorsa X e bir f −cebiri denir (Birkhoff ve Pierce, 1956).

Tanım 1.7 X bir Riesz cebiri olsun. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \wedge x_2 = 0$ için $x_1 x_2 = 0$ sağlanıyorsa X e bir hemen hemen f −cebiri denir (Birkhoff, 1967).

Tanım 1.8 X bir Riesz cebiri olsun. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \wedge x_2 = 0$ ve $\forall \mathrm{c} \in X^+$ için $cx_1 \wedge cx_2 = x_1 c \wedge x_2 c = 0$ sağlanıyorsa X e d −cebiri denir (Kudlacek, 1962).

Genel olarak her f −cebiri bir d −cebiri aynı zamanda bir hemen hemen f −cebiridir. Fakat d −cebiri ile hemen hemen f −cebiri genel olarak birbirinden bağımsızdırlar (Huijsmans, 1991).

Tanım 1.9 X bir Riesz cebiri olsun. $x_1 \in X$ ve $\exists k \in N$ için ${x_1}^k = 0$ iken ancak $x_1 = 0$ ise X e yarı asal denir. (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

Teorem 1.10 X bir yarı asal f −cebiri ise aşağıdaki ifadeler denktir.

i. X, bir f −cebiridir.

ii. X, bir d −cebiridir.

iii. X, bir hemen hemen f −cebiridir (Huijsmans, 1991).

İspat: i⟹ii X bir Riesz uzayı olsun. $x_1, x_2 \in X, x_1 \wedge x_2 = 0$ ve

$\forall c \in X^+$ için X bir f −cebiri olduğundan

$cx_1 \wedge x_2 = 0 \Longrightarrow \; cx_1 \wedge cx_2 = 0$

bulunur. Yine f −cebiri olma özelliğinden

$x_1 c \wedge x_2 = 0 \Longrightarrow \; x_1 c \wedge x_2 c = 0$

elde edilir. O halde X bir d −cebiridir.

i⟹iii $x_1, x_2 \in X$ ve $x_1 \wedge x_2 = 0$ olsun. Buradan $x_1, x_2 \in X^+$ olduğu açıktır. O halde X f −cebiri olduğundan

$x_2 \wedge x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 \wedge x_1 x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 x_2 \wedge x_1 x_2 = 0 \Longrightarrow x_1 x_2 = 0$

bulunur. O halde E bir hemen hemen f −cebirdir.

ii⟹iii X bir d-cebiri ve $x_1, x_2 \in E$ için $x_1 \wedge x_2 = 0$ olsun. X birleşmeli olduğundan

$0 \leq (x_1 x_2)^2 = (x_1 x_2)(x_1 x_2)$

$= (x_1 x_2)(x_1 x_2) \wedge (x_1 x_2)(x_1 x_2)$

$= x_1 x_2 (x_1 x_2) \wedge (x_1 x_2) x_1 x_2$

$\leq (x_1 + x_1 x_2) x_2 (x_1 x_2 + x_2) \wedge (x_1 + x_1 x_2) x_1 (x_2 + x_1 x_2)$

$= (x_1 + x_1 x_2)(x_2 (x_2 + x_1 x_2) \wedge x_1 (x_2 + x_1 x_2))$

$= (x_1 + x_1 x_2)((x_2 \wedge x_1)(x_2 + x_1 x_2)) = 0$

bulunur. Sonuç olarak $0 \leq (x_1 x_2)^2 \leq 0$ bulunur. Buradan $(x_1 x_2)^2 = 0$ olup X yarı asal olduğundan $x_1 x_2 = 0$ olur. O halde X bir hemen hemen f −cebiridir.

iii⟹i X bir hemen hemen f −cebiri ve $\forall x_1, x_2 \in X^+$ için $x_1 \wedge x_2 = 0$ olsun. Buradan

$c \in X^+$keyfi olmak üzere

$0 \leq cx_1 \wedge x_2 \leq cx_1$ ve $0 \leq cx_1 \wedge x_2 \leq x_2$

olduğu açıktır. $\forall c \in X^+$ için

$0 \leq (cx_1 \wedge x_2)^2$

$= (cx_1 \wedge x_2)(cx_1 \wedge x_2)$

$\leq (cx_1)x_2$

$= c(x_1x_2)$ (X birleşme özelliğine sahip olduğundan)

$= c0 = 0$ (X bir hemen hemen f −cebiri olduğundan)

elde edilir.

Tanım 1.11 Y bir Riesz uzayı ve X, Y nin bir ideali olsun. Eğer X in herhangi bir alt kümesinin Y de supremumu mevcut ve bu supremum X nin bir elemanı ise, bir başka deyişle, $Z \subseteq X$ ve $f = \sup Z$ iken $f \in X$ sağlanıyorsa, X idealine Y de bir bant denir (Zaanen, 1975).

Tanım 1.12 X bir Riesz uzayı olmak üzere, $T: X \to X$ bir lineer operatör olsun. Eğer ki $\forall B \subseteq X$ için $T(B) \subseteq B$ sağlanıyorsa yani T operatörü X nin bütün bantlarını değişmez bırakıyorsa, T oparatörüne bant koruyan operatör denir (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006).

Teorem 1.13 X bir Riesz uzayı ve $T: X \to X$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

i. T bir bant koruyandır.

ii. T nin boştan farklı her D alt kümesi için $T(D^d) \subseteq D^d$.

iii. X de $x_1 \wedge x_2 = 0$ ise $Tx_1 \perp x_2$ sağlanır.

iv. $X\ de\ f \perp g$ ($|f| \wedge |g| = 0$)ise $Tf \perp g$ sağlanır.

v. $\forall f \in X$ için $Tf \in \{f\}^{dd}$ sağlanır.

Eğer yukarıdaki özellikler sağlanırsa $\forall f \in X$ için $|Tf| = |T(|f|)|$ sağlanır (Zaanen,

1983).

Tanım 1.14 Bant koruyan sıralı sınırlı bir operatöre bir otomorfizma denir. O halde X bir Riesz uzayı ve $T: X \to X$ sınırlı bir operatör olsun. X de $x_1 \perp x_2$ iken $Tx_1 \perp x_2$ sağlanır. Ayrıca T otomorfizması aynı zamanda pozitif ise T ye bir pozitif otomorfizma denir. Başka bir ifade ile, T bir pozitif otomorfizmadır ancak ve ancak X de $x_1 \wedge x_2 = 0$ iken $Tx_1 \wedge x_2 = 0$. X üzerindeki tüm otomorfizmalar kümesi $Orth(X)$ ile gösterilir, yani
$Orth(X) := \{T \in E_b(X): x_1 \perp x_2$ ise $Tx_1 \perp x_2\}$ (Aliprantis ve Burkinshaw, 2006) .

Teorem 1.15 X Archimedean Riesz uzayı olsun. Bu durumda $Orth(X)$ otomorfizmalar uzayı bileşke işlemine göre birim elemanlı bir f −cebiridir.

Tanım 1.16 X bir Archimedean (reel) Riesz uzayı olsun. $T: X \times X \to X$ bilineer dönüşümü X in her bir bileşeninde bir otomorfizma ise T ye bir biotomorfizma denir. Diğer bir deyişle, $\forall x_1 \in X$ için $T(x_1, .), T(., x_1) \in Orth(X)$ ise $T: X \times X \to X$ bilineer dönüşümüne X üzerinde bir biotomorfizma denir. X üzerindeki tüm biotomorfizmaların kümesi $Orth(X, X)$ ile gösterilir.

Notasyon 1.17 $\forall A \in Orth(X, X)$ için $K(A) := \{x_1 \in X: A(x_1, x_1) = 0\}$.

Lemma 1.18 X bir Archimedean Riesz uzayı ve $A \in Orth(X, X)$ olsun.
$K(A) = \{x_1 \in X: A(x_1, x_2) = 0, \forall x_2 \in X\}$.

Özellikle $K(A), X$ de sıralı bir idealdir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

Lemma 1.19 X bir Archimedean Riesz uzayı ve $A \in Orth(X, X)$ olsun. Eğer

$x_1 \in X$ ise $A(x_1, x_1) = 0 \Leftrightarrow A(x_1, x_1) \in K(A)$ (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

Sonuç 1.20 X**,** $e > 0$ sıralı zayıf birimli bir Archimedean Riesz uzayı olsun. O halde $Orth(X, X)$ de tanımlanan * çarpımına göre yarı asal bir f −cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $(Orth(X, X), *_e)$ bir f −cebir yapısına sahip olduğunu biliyoruz. Şimdi bunun yarı asal olduğunu gösterelim. Bunun için $T \in Orth(X, X)$ olmak üzere $T *_e T = 0$ olsun. Buradan $\forall x_1, x_2 \in X$ için
$(T *_e T)(x_1, x_2) = T\big(x_1, T(e, x_2)\big) = 0,$

yani, $\forall x_2 \in X$ için $T(e, x_2) \in K(T)$. Lemmadan $\forall x_2 \in X$ için $T(e, x_2) = 0$. Fakat e bir sıralı zayıf birim ve $T(., x_2) \in Orth(X)$ olduğundan $\forall x_2 \in X$ için $T(., x_2) = 0$ (Zanaan, 1983). Buradan $T = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(Orth(X, X), *_e)$ yarı asal bir f −cebiri olur.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Teorem 2.1 X bir Archimedean Riesz uzayı olsun. Eğer $e \in X^+$ ise $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $f_1, f_2 \in Orth(X, X)$ için

$(f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1, f_2(e, x_2))$

şeklinde tanımlanan çarpıma göre $Orth(X, X)$ bir Archimedean f-cebiridir (Boulabiar ve Brahmi, 2016).

İspat: $e \in X^+$ ve $f_1, f_2 \in Orth(X, X)$ ise $\forall x_1, x_2 \in X$ için
$(f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1, f_2(e, x_2))$
olarak tanımlanan $f_1 *_e f_2: X \times X \to X$ dönüşümünün bilineer olduğu açıktır. Üstelik, eğer $x_1 \in X$ ise

$(f_1 *_e f_2)(x_1,.) = f_1(x_1, f_2(e,.)) \in Orth(X)$ ve

$(f_1 *_e f_2)(.,x_1) = f_1(., f_2(e,x_1)) \in Orth(X)$.

$f_1 *_e f_2 \in Orth(X,X)$.

Bununla birlikte $\forall f_1, f_2 \in Orth(X,X)$ için

$T_e(f_1,f_2) = f_1 *_e f_2$

ile tanımlanan $T_e: Orth(X,X) \times Orth(X,X) \to Orth(X,X)$ dönüşümü bir pozitif bilineer dönüşümdür. Diğer yandan eğer $f_1, f_2, f_3 \in Orth(X,X)$ ise $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$\begin{aligned}((f_1 *_e f_2) *_e f_3)(x_1,x_2) &= (f_1 *_e f_2)(x_1, f_3(e,x_2)) \\ &= f_1\left(x_1, f_2(e, f_3(e,x_2))\right) \\ &= f_1(x_1, (f_2 *_e f_3)(e,x_2)) \\ &= f_1 *_e (f_2 *_e f_3)(x_1,x_2).\end{aligned}$$

Böylece $(Orth(X,X), *_e)$ Riesz uzayı bir Riesz cebirdir. Hatta biotomorfizmalar simetrik olduğundan $Orth(X,X)$ aynı zamanda değişme özelliğine sahiptir.

Şimdi $f_1, f_2 \in Orth(X,X)$ öyleki $f_1 \wedge f_2 = 0$ olsun. $\forall\ 0 \leq C \in Orth(X,X)$ için

$(f_1 *_e C) \wedge f_2 = (C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$

olduğunu göstermeliyiz.$(Orth(X,X), *_e)$ değişmeli olduğundan $(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$ ve $(f_1 *_e C) \wedge f_2 = 0$ sırası ile ispatlayalım. Bunun için $x_1, x_2 \in X^+$ keyfi olsun. $Orth(X,X)$ uzayı üzerindeki latis işlemleri noktasal olduğundan

$f_1(x_1,x_2) \wedge f_2(x_1,x_2) = 0$

ve dolayısıyla, $C(e,.) \in Orth(X)$ olduğundan

$C(e, f_1(x_1,x_2)) \wedge f_2(x_1,x_2) = 0$.

Ancak biotomorfizmaların simetrik olduğunu kullanılarak;

$C(e, f_1(x_1,x_2)) = C(x_1, f_1(e,x_2)) = (C *_e f_1)(x_1,x_2)$

$C(e, f_1(x_1,x_2)) \wedge f_2(x_1,x_2) = 0.$

$(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde

$f_1(e, C(x_1,x_2)) = f_1(x_1, C(e,x_2)) = (f_1 *_e C)(x_1,x_2)$

$f_1(e, C(x_1,x_2)) \wedge f_2(x_1,x_2) = 0.$

$(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$ elde edilir.

Öneri 2.2 $Orth(X,X)$ birleşmeli, yarı asal f-cebiri olsun. O halde $Orth(X,X)$, bir f-cebiri ise bir d-cebiridir.

İspat: Biotomorfizmaların f-cebiri yapısına sahip olduğunu biliyoruz. O halde $e \in X^{+}$ ve $f_1, f_2 \in Orth(X, X)$ ise $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall\ 0 \leq C \in Orth(X, X)$ için

$$C\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) = C\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) = (C *_e f_1)(x_1, x_2)$$

$$C(e, f_1(x_1, x_2)) \wedge f_2(x_1, x_2) = 0.$$

$(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$ elde edilir. d-cebiri yapısına sahip olduğunu göstermek için

$$C *_e f_1 \wedge C *_e f_2 = 0$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$C\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) = C\big(x_1, f_2(e, x_2)\big) = (C *_e f_2)(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}\Big(C\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) \wedge C\big(e, f_2(x_1, x_2)\big)\Big) &= C\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) \wedge C\big(x_1, f_2(e, x_2)\big) \\ &= (C *_e f_1)(x_1, x_2) \wedge (C *_e f_2)(x_1, x_2) \\ &= C *_e f_1(x_1, x_2) \wedge C *_e f_2(x_1, x_2) \\ &= (C *_e f_1 \wedge C *_e f_2)(x_1, x_2) = 0\end{aligned}$$

$$C *_e f_1 \wedge C *_e f_2 = 0$$

Bu çözüme ilave olarak aşağıda verilen şekilde bir f-cebiri yapısının bir d-cebiri olduğu bulunabilir. $f_1, f_2 \in Orth(X, X)$ ve $f_1 \wedge f_2 = 0$ için $Orth(X, X)$, bir f-cebiri olduğundan

$(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$ ve $f_1 \wedge (C *_e f_2) = 0$ olduğu söylenebilir.

$$(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$$

$$f_1 \wedge (C *_e f_2) = 0$$

$$((C *_e f_1) \wedge f_2) \wedge (f_1 \wedge (C *_e f_2)) = 0$$

$$(C *_e f_1) \wedge (C *_e f_2) \wedge f_1 \wedge f_2 = 0$$

$$(C *_e f_1) \wedge (C *_e f_2) = 0$$

Öneri 2.3 $Orth(X, X)$ birleşmeli, yarı asal f-cebiri olsun. O halde $Orth(X, X)$, bir f-cebiri ise bir hemen hemen f-cebiridir.

İspat: $e \in X^{+}$ ve $f_1, f_2 \in Orth(X, X)$ ise $\forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall\ 0 \leq C \in Orth(X, X)$ için

$$C\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) = C\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) = (C *_e f_1)(x_1, x_2)$$

$$C\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) = C\big(x_1, f_2(e, x_2)\big) = (C *_e f_2)(x_1, x_2)$$

olur. Eğer özel olarak birinci denklemde $C := f_2$ ve ikinci denklemde $C := f_1$ alınırsa

$$f_2\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) = f_2\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) = (f_2 *_e f_1)(x_1, x_2)$$

$$f_1\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) = f_1\big(x_1, f_2(e, x_2)\big) = (f_1 *_e f_2)(x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned}f_2\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) \wedge f_1\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) &= f_2\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) \wedge f_1\big(x_1, f_2(e, x_2)\big) \\ &= f_2\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) \wedge f_1\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) \\ &= (f_2 *_e f_1)(x_1, x_2) \wedge (f_1 *_e f_2)(x_1, x_2)\end{aligned}$$

$$= (f_2 *_e f_1 \wedge f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = 0$$

$f_2 *_e f_1 \wedge f_1 *_e f_2 = 0.$

$(Orth(X,X), *_e)$ değişmeli olduğundan $f_2 *_e f_1 = f_1 *_e f_2$ için $f_1 *_e f_2 = 0$ olur.

Öneri 2.4 $Orth(X,X)$ bir hemen hemen f-cebiri ise bir f-cebiridir.

İspat: $e \in X^+$, $f_1, f_2 \in Orth(X,X), \forall x_1, x_2 \in X$ ve $\forall\ 0 \leq C \in Orth(X,X)$, $f_1 \wedge f_2 = 0$ olsun. $Orth(X,X)$ bir hemen hemen f-cebiri olduğundan $f_1 *_e f_2 = 0$ olur. $(C *_e f_1) \leq (C *_e f_1) *_e f_2$ ve $x_1 \wedge C(e, x_2) = 0$ olduğunu kabul edelim.

$0 \leq (C *_e f_1) \wedge f_2 \leq (C *_e f_1) \leq (C *_e f_1) *_e f_2$

$$\big((C *_e f_1) *_e f_2\big)(x_1, x_2) = (C *_e f_1)\big(x_1, f_2(e, x_2)\big)$$
$$= C(x_1, f_1(e, f_2(e, x_2)))$$
$$= C\big(x_1, (f_1 *_e f_2)(e, x_2)\big)$$
$$= C *_e (f_1 *_e f_2)(x_1, x_2)$$

$C *_e (f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = C *_e 0(x_1, x_2)$

$(Orth(X,X), *_e)$ değişmeli olduğundan $C *_e 0 = 0 *_e C$ için

$$C *_e (f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = C *_e 0(x_1, x_2)$$
$$= 0 *_e C(x_1, x_2)$$
$$= 0\big(x_1, C(e, x_2)\big) \in Orth(X) \text{ olur.}$$

$0\big(x_1, C(e, x_2)\big) = 0$ olarak kabul edelim. Bu durumda

$0 \leq (C *_e f_1) \wedge f_2 \leq (C *_e f_1) \leq (C *_e f_1) *_e f_2 = 0$ olur. Buradan

$(C *_e f_1) \wedge f_2 = 0$ f-cebiri yapısına sahip olduğu görülür.

Öneri 2.5 $Orth(X,X)$ birleşmeli, yarı asal f-cebiri olsun. O halde $Orth(X,X)$, hemen hemen bir f-cebiri ise yarı asaldır.

İspat: $e \in X^+$ ve $f_1, f_2 \in Orth(X,X)$ ise $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$$f_2\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) \wedge f_1\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) = (f_2 *_e f_1 \wedge f_1 *_e f_2)(x_1, x_2) = 0$$

sağlandığını biliyoruz. Özel olarak eğer $f_2 := f_1 \in Orth(X,X)$ alınırsa

$$f_2\big(e, f_1(x_1, x_2)\big) \wedge f_1\big(e, f_2(x_1, x_2)\big) = f_1\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) \wedge f_1\big(x_1, f_1(e, x_2)\big)$$
$$= f_1 *_e f_1(x_1, x_2) \wedge f_1 *_e f_1(x_1, x_2) = 0$$

$(f_1 *_e f_1 \wedge f_1 *_e f_1)(x_1, x_2) = 0$

$f_1 *_e f_1 \wedge f_1 *_e f_1 = 0.$

$f_1 *_e f_1 = 0$.

Buradan $\forall x_1, x_2 \in X$ için

$(f_1 *_e f_1)(x_1, x_2) = f_1\big(x_1, f_1(e, x_2)\big) = 0,$

yani, $\forall x_2 \in X$ için $f_1(e, x_2) \in K(f_1)$. O halde $\forall x_2 \in X$ için $f_1(e, x_2) = 0$. Fakat e bir sıralı zayıf birim ve $f_1(., x_2) \in Orth(X)$ olduğundan $\forall x_2 \in X$ için$f_1(., x_2) = 0$ (Zanaan, 1983). Buradan $f_1 = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $(Orth(X, X),\ *_e)$ yarı asal bir f −cebiri olur.

SONUÇ

$Orth\ (X, X)$ Biotomorfizmalar uzayı üzerinde tanımlı f −cebiri yardımıyla d −cebiri, hemen hemen f −cebiri yapıları arasında geçişler incelendi. Fakat çalışılan bazı önermelerde koşullu çözümler yapıldı. Daha genel çözümler bulunabilir.

KAYNAKLAR

Aliprantis CD, Burkinshaw O, 2006. Pozitif Operators. Springer, Dardrecth.

Benamor F, 2014. On Bi-orthomorphisms on a Semiprime f −Algebra. Indag. Math., 25, 44-48.

Birkhoff G, 1967. Lattice Theory. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 25, Providence, RI. MR 37 2638.

Boulabiar K, Brahmi W, 2016. Multiplicative structure of biorthomorphisms and embedding of orthomorphisms. Indag. Mathem, 13 (3), 786–798.

Buskes G, Page R, Yilmaz R, 2010. A note on bi-orthomorphisms. Vector Measures, Integration and Related Topics, Oper. Theory Adv. Appl., Vol. 201, Birkhauser, Basel, 99–10.

De Pagter B, 1981. f- Algebras and orthomorphisms, University of Leidin, Phd. Thesis.

Huijsmans CB, 1991. Lattice ordered algebras and f −algebras: A survey. Studies in Ekonomic Theory 2, Positive Operators, Riesz Spaces and Economics (C. D. Aliptantis, K. C. Border and W. A. J. Luxemburg, eds.) Spinger, Berlin, 151- 169.

Gökcan İ, 2017. Biotomorfizmalarin Çarpımsal Yapisi ve Otomorfizmalarla İlişkileri, Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi.

Kusraev AG, Tabuev SN, 2008. Multiplicative Representatıon of Bilinear Operators.Siberian Mathematical Journal, Vol. 49,No. 2, pp. 287-294.

Luxsemburg WAJ, Zaanen AC, 1971. Riesz Spaces I. North-Holland, Amsterdam.

Zaanen AC, 1983. Riesz Spaces II. North-Holland, Amsterdam.

Zaanen, AC, 1975. Examples of orthomorphisms. J.Approximation theory 13, 192-204.