Matematik / *Mathematics* **DOI: 10.21597/jist.663039**

Araştırma Makalesi / *Research Article*

Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 10(2): 1263-1272, 2020
Journal of the Institute of Science and Technology, 10(2): 1263-1272, 2020
ISSN: 2146-0574, eISSN: 2536-4618

Yeni Bir İterasyon Yöntemi İçin Yakınsaklık Hızı

Samet MALDAR[1*]

ÖZET: Bu çalışmada yeni bir iterasyon yöntemi tanımlanmıştır. Bu iterasyon yönteminin Banach uzaylarında uygun koşullar altında yakınsaklığı incelenmiştir ve başka bir iterasyon yöntemiyle yakınsama anlamında denk olduğu gösterilmiştir. Son olarak yeni iterasyon yönteminin literatürdeki mevcut bir iterasyon yöntemine göre daha iyi bir yakınsama hızına sahip olduğu ispatlanarak bu sonucu destekleyen bir örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, Banach uzayı, denklik

Rate of Convergence for A New Iteration Method

ABSTRACT: In this study, a new iteration method has been defined. The convergence of this iteration method in Banach spaces under appropriate conditions has been examined and it has been shown that this iteration is equivalent in terms of convergence with another iteration method. Finally, it has been proved that the new iteration method has a better convergence rate than the existing iteration method in literature and an example supporting this result has been given.

Keywords: Fixed Point, Banach space, equivalence

[1] Samet MALDAR (**Orcid ID:** 0000-0002-2083-899X), Aksaray Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Aksaray, Türkiye

*Sorumlu Yazar/Corresponding Author: Samet MALDAR, e-mail: mmaldar@aksaray.edu.tr

Geliş tarihi / *Received:* 22-12-2019
Kabul tarihi / *Accepted:* 14-03-2020

GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, matematikte geniş bir araştırma sahasına sahip önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bu teoride çalışılan konulardan biri yeni iterasyon yöntemleri tanımlamaktır. İlk olarak Picard (1890) tarafından tanımlanan iterasyon yönteminden elde edilen dizinin daralma dönüşümünün tek olan sabit noktasına uygun şartlar altında yakınsak olduğu Banach tarafından gösterilmiştir (Banach, 1922). Ancak söz konusu şartlar değiştirildiğinde bu dizinin yakınsamadığı görülmüş ve bu nedenle araştırmacılar yeni iterasyon yöntemleri tanımlamaya başlamışlardır. Bu bağlamda 1953 yılında Mann iterasyon yöntemi (Mann, 1953), 1974 yılında Ishikawa iterasyon yöntemi (Ishikawa, 1974), 2000 yılında Noor iterasyon yöntemi (Noor, 2000) gibi birçok iterasyon yöntemi tanımlanmış ve bu anlamda geniş bir literatür oluşmuştur (bkz. Chugh et al., 2012; Gürsoy et al., 2013; Dogan ve Karakaya, 2014; Başarır ve Şahin, 2016; Başarır ve Şahin, 2017; Karakaya et al., 2017; Atalan, 2018).
İterasyon yöntemleri üzerine yapılan çalışmalar şu şekilde özetlenebilir:

Araştırmacılar tarafından tanımlanan iterasyon yöntemlerinin belirli dönüşümlerin sabit noktasına hangi şartlar altında yakınsak olduğu ve yakınsama anlamında denk olan başka iterasyon yöntemlerinin mevcut olup olmadığı incelenmiştir.

İterasyon yöntemleri üzerine yapılan bir diğer tipten çalışma ise yakınsaklık hızlarının karşılaştırılmasıdır. Buradaki temel düşünce, aynı dönüşüm altında oluşturulan iki farklı iterasyon yönteminden elde edilen dizilerin, dönüşümün sabit noktasına daha hızlı yakınsayacak olanını belirlemektir.

Bu çalışmada (2.8) ile verilen yeni tanımlı iterasyon dizisinin yakınsaklığı incelenmiştir. Daha sonra (2.7) ile verilen iterasyon yönteminin ve (2.8) ile verilen iterasyon yönteminin yakınsaklıklarının denkliği sonucu verilmiştir. Son olarak (2.8) ile verilen iterasyon yönteminin, (2.7) ile verilen iterasyon yönteminden daha hızlı yakınsadığı sonucuna varılmış ve elde edilen bu sonuç nümerik olarak örneklendirilmiştir.

MATERYAL VE YÖNTEM

Şimdi temel sonuçlarımızı elde etmek için ihtiyaç duyulan bazı tanım, lemma ve teoremleri verelim.

Tanım 2.1 (Berinde, 2003).
(X,d) bir metrik tam metrik uzay olsun.

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(y,Tx) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ ve $\delta \in (0,1)$ varsa $T: X \to X$ dönüşümüne hemen hemen daralma dönüşümü denir.

Teorem 2.2 (Berinde, 2003).
(X,d) bir metrik tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir hemen hemen daralma dönüşümü olsun. Eğer

$$d(Tx,Ty) \leq \delta d(x,y) + Ld(x,Tx) \tag{2.2}$$

olacak şekilde $L \geq 0$ ve $\delta \in (0,1)$ varsa bu taktirde T bir tek sabit noktaya sahiptir.

Tanım 2.3 (Knopp, 1931).
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ negatif olmayan ve aynı noktaya yakınsayan iki dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(a_n,a)}{d(b_n,a)} = 0 \tag{2.3}$$

şartı sağlanıyorsa $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi a noktasına $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar denir.

Lemma 2.4 (Berinde, 2007).
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan ve negatif olmayan iki reel sayı dizisi olsun.

$$a_{n+1} \leq \rho a_n + \tau_n$$

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$ ve $\rho \in (0,1)$, oluyorsa $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lemma 2.5 (Weng, 1991).
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan ve negatif olmayan iki reel sayı dizisi olsun.

$$a_{n+1} \leq (1-\mu_n)a_n + \tau_n \tag{2.4}$$

Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq (0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n = \infty$ ve $n \to \infty$ iken $\frac{\tau_n}{\mu_n} \to 0$ oluyorsa

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.5}$$

Tanım 2.6 (Agarwal, O'Regan ve Sahu, 2007).
Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n Ty_n \\ \quad y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan iterasyon yöntemine Agarwal S-iterasyon yöntemi (Klasik S-iterasyon yöntemi) denir.

2019 yılında tanımlamış olduğumuz iterasyon yöntemi şu şekildedir (Maldar, 2019):

$k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan reel sayı dizileri olmak üzere;

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{(1-\alpha_n)}{k} Tx_n + \left(1 - \dfrac{(1-\alpha_n)}{k}\right) Ty_n \\ \quad y_n = \dfrac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \dfrac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tx_n \end{cases} \tag{2.7}$$

Bu çalışmada yukarıda verilen iterasyon yönteminden esinlenerek tanımlamış olduğumuz yeni iterasyon yöntemi ise şu şekildedir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = T\left(\dfrac{(1-\alpha_n)}{k} Tx_n + \left(1 - \dfrac{(1-\alpha_n)}{k}\right) Ty_n\right) \\ \quad y_n = T\left(\dfrac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \dfrac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tx_n\right) \end{cases} \tag{2.8}$$

Burada $k \in \mathbb{N}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ belirli şartları sağlayan kontrol dizileridir.

BULGULAR VE TARTIŞMA

Teorem 3.1 X bir Banach uzay ve $B \subseteq X$, boştan farklı, kapalı, konveks bir küme ve $T: B \to B$ (2.2) ile verilen şartı sağlayan bir hemen hemen daralma dönüşümü olsun. $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_n, \beta_n \in [0,1]$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ olmak üzere (2.8) ile üretilen iterasyon dizisini $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterelim. Bu takdirde $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi T nin teklikle belirli olan p sabit noktasına yakınsar.

İspat (2.8) ile verilen iterasyon yönteminin kullanılmasıyla,

$$\|x_{n+1} - p\| = \left\| T\left(\frac{(1-\alpha_n)}{k} Tx_n + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) Ty_n\right) - Tp \right\|$$

$$\leq \delta^2 \frac{(1-\alpha_n)}{k}\|x_n - p\| + L\delta\frac{(1-\alpha_n)}{k}\|p - Tp\| + L\|p - Tp\|$$
$$+\delta^2\left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\|y_n - p\| + L\delta\left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\|p - Tp\| \tag{3.1}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\|y_n - p\| = \left\|T\left(\frac{(1-\beta_n)}{k}x_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)Tx_n\right) - Tp\right\|$$
$$\leq \delta\frac{(1-\beta_n)}{k}\|x_n - p\| + \delta^2\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\|x_n - p\| + L\|p - Tp\|$$
$$+L\delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\|p - Tp\|$$
$$\leq \delta\left(1 - \frac{\beta_n(1-\delta)}{k}\right)\|x_n - p\| + \left(L + L\delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\right)\|p - Tp\| \tag{3.2}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $\|p - Tp\| = 0$ olduğundan, (3.2) eşitsizliği de (3.1) eşitsizliğinde yerine yazılırsa ve

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^3\left(1 + \frac{(1-\alpha_n)(1-\delta)}{k\delta}\right)\|x_n - p\| \tag{3.3}$$

elde edilir ve aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^2\left(1 - \frac{\alpha_n(1-\delta)}{k}\right)\|x_n - p\| \tag{3.4}$$

(3.4) eşitsizliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^2\left(1 - \frac{\alpha_n(1-\delta)}{k}\right)\|x_n - p\|$$
$$\|x_n - p\| \leq \delta^2\left(1 - \frac{\alpha_{n-1}(1-\delta)}{k}\right)\|x_{n-1} - p\|$$
$$\|x_{n-1} - p\| \leq \delta^2\left(1 - \frac{\alpha_{n-2}(1-\delta)}{k}\right)\|x_{n-2} - p\|$$
$$\|x_{n-2} - p\| \leq \delta^2\left(1 - \frac{\alpha_{n-3}(1-\delta)}{k}\right)\|x_{n-3} - p\| \tag{3.5}$$

ve bu şekilde devam edilirse

$$\|x_1 - p\| \leq \delta^2\left(1 - \frac{\alpha_0(1-\delta)}{k}\right)\|x_0 - p\|$$

elde edilir. Böylece

$$\|x_{n+1} - p\| \leq \delta^{2(n+1)}\prod_{i=0}^{n}\left(1 - \frac{\alpha_i(1-\delta)}{k}\right)\|x_0 - p\| \tag{3.6}$$
$$\leq \delta^{2(n+1)}\prod_{i=0}^{n} e^{\left(\frac{\alpha_i(1-\delta)}{k}\right)}\|x_0 - p\|$$

$$= \delta^{2(n+1)} \frac{1}{e^{\left(\frac{(1-\delta)\sum_{i=0}^{n}\alpha_i}{k}\right)}} \|x_0 - p\|$$

eşitsizliği elde edilir.

$n \to \infty$ için yukarıdaki eşitsizlikte limit alınırsa $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - p\| = 0$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2 X, B ve T Teorem 3.1 ile verilen koşuları sağlasın. $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$ olmak üzere, $x_0, u_0 \in B$ başlangıç noktaları için (2.8) ve (2.7) ile verilen iterasyon yöntemlerinden elde edilen diziler sırasıyla $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

$i)$ (2.7) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi p'ye yakınsar.

$ii)$ (2.8) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizi p'ye yakınsar.

İspat $i) \Longrightarrow ii)$: (2.7) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizinin T dönüşümünün teklikle belirli olan p sabit noktasına yakınsadığını kabul edelim. Bu durumda (2.8) ile verilen iterasyon yönteminden elde edilen dizinin de p ye yakınsadığını göstereceğiz. Bunu göstermek için (2.2), (2.7) ve (2.8) ifadeleri ele alındığında

$$\begin{aligned}
&\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&= \left\| \frac{(1-\alpha_n)}{k} T u_n + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) T v_n \right. \\
&\quad \left. - T\left(\frac{(1-\alpha_n)}{k} T x_n + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) T y_n\right) \right\| \\
&\le \frac{(1-\alpha_n)}{k} \delta \left\| u_n - \frac{(1-\alpha_n)}{k} T x_n - \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) T y_n \right\| \\
&\quad + L \frac{(1-\alpha_n)}{k} \|u_n - T u_n\| + L\left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) \|v_n - T v_n\| \\
&\quad + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) \delta \left\| v_n - \frac{(1-\alpha_n)}{k} T x_n - \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) T y_n \right\| \\
&\le \left(\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)^2 \delta^2 \|u_n - x_n\| + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)^2 \delta^2 \|v_n - y_n\| \\
&\quad + \left(\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) \delta \|u_n - y_n\| \\
&\quad + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) \frac{(1-\alpha_n)}{k} \delta^2 \|v_n - x_n\| \\
&\quad + \frac{(1-\alpha_n)}{k} (\delta + L + \delta L) \|u_n - T u_n\| \\
&\quad + \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) (L + \delta + \delta L) \|v_n - T v_n\|
\end{aligned} \tag{3.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|u_n - y_n\| &= \left\| u_n - T\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) T x_n\right) \right\| \\
&\le \|u_n - T u_n\| + \left\| T u_n - T\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) T x_n\right) \right\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1+L)\|u_n - Tu_n\| + \delta \left\| u_n - \frac{(1-\beta_n)}{k} x_n - \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tx_n \right\| \\
&\leq (1+L)\|u_n - Tu_n\| + \delta \frac{(1-\beta_n)}{k} \|u_n - x_n\| \\
&+\delta \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \|u_n - Tu_n\| + \delta \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \|Tu_n - Tx_n\| \\
&\leq \left(1 + L + \delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) + L\delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\right) \|u_n - Tu_n\| \\
&+ \delta\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} + \delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\right) \|u_n - x_n\|
\end{aligned} \tag{3.8}$$

ve benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}
\|v_n - y_n\| &= \left\| \frac{(1-\beta_n)}{k} u_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tu_n \right. \\
&\quad \left. - T\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tx_n\right) \right\| \\
&\leq \frac{(1-\beta_n)}{k} \left\| u_n - T\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tx_n\right) \right\| \\
&+ \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \left\| Tu_n - T\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} x_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tx_n\right) \right\| \\
&\leq \delta\left(\frac{(1-\beta_n)}{k} + \delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\right) \|u_n - x_n\| \\
&+ \left(\frac{(1-\beta_n)}{k} + L + \delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) + L\delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\right) \|u_n - Tu_n\|
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v_n - x_n\| &= \left\| \frac{(1-\beta_n)}{k} u_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tu_n - x_n \right\| \\
&\leq \frac{(1-\beta_n)}{k} \|u_n - x_n\| + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \|Tu_n - x_n\| \\
&\leq \|u_n - x_n\| + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \|Tu_n - u_n\|
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\|u_n - Tu_n\| &= \|u_n - p + p - Tu_n\| \\
&\leq \|u_n - p\| + \|Tu_n - p\| \\
&\leq (1+\delta)\|u_n - p\| + L\|p - Tp\|
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v_n - Tv_n\| &\leq \|v_n - p\| + \|p - Tv_n\| \\
&\leq (1+\delta)\|v_n - p\| + L\|p - Tp\|
\end{aligned} \tag{3.12}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\|v_n - p\| = \left\| \frac{(1-\beta_n)}{k} u_n + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) Tu_n - p \right\|$$
$$\leq \frac{(1-\beta_n)}{k} \|u_n - p\| + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \|Tu_n - p\| \leq$$
$$\leq \left[\frac{(1-\beta_n)}{k} + \left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\delta\right] \|u_n - p\| + L\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\|p - Tp\| \tag{3.13}$$

yazılabilir. (3.8), (3.9) ve (3.10) eşitsizlikleri (3.7) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \leq{}& \delta^2 \|u_n - x_n\| \\
&+ \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)^2 \delta^2 \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1-\beta_n)}{k} + L + \delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \\ +L\delta\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \end{array} \right\} \|u_n - Tu_n\| \\
&+ \left(\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right) \left\{ \begin{array}{c} \frac{\delta(1-\beta_n)}{k} + \delta L \\ +\delta^2\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \\ +L\delta^2\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right) \end{array} \right\} \|u_n - Tu_n\| \\
&+ \left(\frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)\delta^2\left(1 - \frac{(1-\beta_n)}{k}\right)\|Tu_n - u_n\| \\
&+ \frac{(1-\alpha_n)}{k}(\delta + L + \delta L)\|u_n - Tu_n\| \\
&+ \left(1 - \frac{(1-\alpha_n)}{k}\right)(L + \delta + \delta L)\|v_n - Tv_n\|
\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada A ve B sırasıyla $\|u_n - Tu_n\|$ ve $\|v_n - Tv_n\|$ nin katsayıları olmak üzere

$$a_n = \|u_n - x_n\|$$
$$\rho = \delta^2 \in (0,1)$$
$$\tau_n = A\,\|u_n - Tu_n\| + B\|v_n - Tv_n\|$$

şeklinde yazılabilir.
(3.14) eşitsizliğindeki $\|u_n - Tu_n\|$ ve $\|v_n - Tv_n\|$ ifadeleri için (3.11), (3.12) ve (3.13) ile verilen eşitsizlikler kullanılarak $n \to \infty$ için $\|u_n - Tu_n\| \to 0$ ve $\|v_n - Tv_n\| \to 0$ olduğu görülür. Lemma 2.4 ten yararlanarak $n \to \infty$ için $\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \to 0$ elde edilir.
Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde $ii) \Longrightarrow i)$ sonucu elde edilir.

Teorem 3.3 X, B ve T Teorem 3.1 ile verilen koşuları sağlasın. Ayrıca $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha_n \in [0,1]$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ ve $\alpha_0 \leq \alpha_n \leq 1$ koşullarını sağlasın. $x_0 = u_0 \in B$ için (2.8) ve (2.7) ile verilen iterasyon yöntemlerinden elde edilen diziler sırasıyla $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun. Bu durumda $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi p noktasına $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden daha hızlı yakınsar.

İspat. Teorem 3.1'de (3.6) ile verilen eşitsizlikten

$$\|x_{n+1} - p\| = \delta^{2(n+1)} \prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_i(1-\delta)}{k}\right) \|x_0 - p\| \tag{3.15}$$

yazılabilir. Ayrıca (Maldar, 2019) ile verilen çalışmada elde edilen ve Teorem 2.1'de eşitsizlik 18) ile gösterilen

$$\|u_{n+1} - p\| = \prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_i(1-\delta)}{k}\right) \|u_0 - p\| \tag{3.16}$$

ifadeyi göz önüne alalım. (3.15) ve (3.16) ile verilen ifadeler kullanılarak;

$$w_n = \frac{\delta^{2(n+1)} \prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_i(1-\delta)}{k}\right) \|x_0 - p\|}{\prod_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_i(1-\delta)}{k}\right) \|u_0 - p\|} = \delta^{2(n+1)}$$

şeklinde tanımlansın. $\delta \in (0,1)$ olduğundan yukarıda verilen ifadede gerekli sadeleştirmeler yapıldıktan sonra $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ olduğu görülür. Tanım 2.3 gereği $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p sabit noktasına yakınsaması $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yakınsamasından daha hızlıdır.

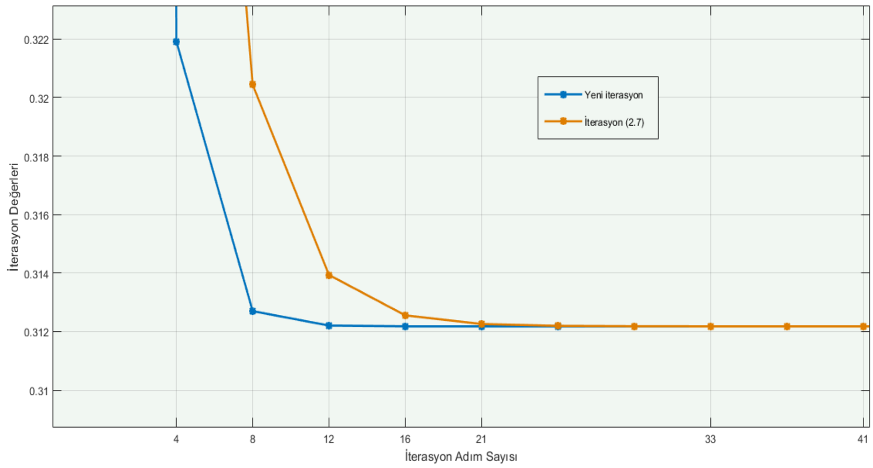
Bu teoremde elde edilen sonucunun bir uygulaması için MATLABR2015a programı kullanılarak aşağıdaki örnek verilmiştir:

Örnek 3.4 $X = \mathbb{R}$, $C \subseteq X$ ve $C = [0,1]$ olsun. Her $x \in C$ için $T: C \longrightarrow C$ operatörü
$Tx = \cos(cosx) + e^{-x} - 1$
şeklinde tanımlasın. T nin tek bir sabit noktaya sahip olduğu ve bu noktanın $p = 0.31217776495902$ olduğu kolaylıkla görülebilir. $x_0 = 1$ ve $x_0 = 0.6$ başlangıç noktası için $\alpha_n = \beta_n = \frac{1}{2}$, $k = 40$ ve $\delta = 0,59$ olarak seçelim. Bu durumda MATLABR2015a programı kullanılarak elde edilen aşağıdaki tablo göstermektedir ki (2.8) ile verilen iterasyon yöntemi, (2.7) ile verilen iterasyon yönteminden daha hızlıdır.

Tablo 1. $x_0 = 1$ ve $x_0 = 0.6$ başlangıç noktaları için (2.7) iterasyon yöntemi ile (2.8) iterasyon yönteminin yakınsaklık hızlarının karşılaştırılması

İterasyon Adım Sayısı	Yeni İterasyon Yöntemi (2.8)	İterasyon Yöntemi (2.7)	Yeni İterasyon Yöntemi (2.8)	İterasyon Yöntemi (2.7)
1	1.000 000 000 000 00	1.000 000 000 000 00	0.600 000 000 000 00	0.600 000 000 000 00
2	0.321 915 481 676 17	0.352 122 256 835 77	0.322 330 235 111 74	0.354 119 399 461 37
3	0.312 698 589 843 82	0.320 434 479 321 87	0.312 720 532 320 41	0.320 830 259 839 35
:	:	:	:	:
11	0.312 177 764 959 06	0.312 177 801 401 16	0.312 177 764 959 06	0.312 177 803 131 54
12	0.312 177 764 959 02	0.312 177 772 769 62	0.312 177 764 959 02	0.312 177 773 140 49
:	:	:	:	:
20	0.312 177 764 959 02	0.312 177 764 959 05	0.312 177 764 959 02	0.312 177 764 959 05
21	0.312 177 764 959 02	0.312 177 764 959 02	0.312 177 764 959 02	0.312 177 764 959 02

Yukarıdaki tablodan görülmektedir ki $x_0 = 1$ başlangıç noktası için (2.7) ile gösterilen iterasyon yöntemi 21. adımda operatörün sabit noktasına yakınsarken (2.8) ile verilen yeni iterasyon yöntemi 12. adımda yakınsamaktadır. Aşağıda verilen grafik bu durumu göstermektedir:



Grafik 1. İki iterasyon yöntemi için yakınsama hızlarının grafik gösterimi

SONUÇ

Bu çalışmada yeni tanımlanan iterasyon yönteminin bir Banach uzayında uygun şartlar altında yakınsaklığı elde edilmiş ve literatürde bulunan başka bir iterasyon yöntemiyle yakınsaklığının denkliği incelenmiştir. Ayrıca yeni iterasyon yönteminin daha iyi bir yakınsama hızına sahip olduğu ispatlanarak bu sonucu destekleyen bir örnek verilmiştir. Tablo 1 ve Grafik 1 incelendiğinde bir iterasyon yönteminin yakınsaklık hızının test edilmesinde kontrol dizilerinin seçimi önem arz etmektedir.

KAYNAKLAR

Agarwal R, O'Regan D, Sahu D, 2007. Iterative Construction of Fixed Points of Nearly Asymptotically Nonexpansive Mappings. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 8 (1): 61-79.

Atalan Y, 2018. Yeni Bir İterasyon Yöntemi İçin Hemen-Hemen Büzülme Dönüşümleri Altında Bazı Sabit Nokta Teoremleri. Marmara Fen Bilimleri Dergisi, 30 (3): 276-285.

Banach S, 1922. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fundamenta Mathematicae 1 (3): 133-181.

Başarır M, 1988. On rates of convergence of sequences. Journal of the Orissa Mathematical Society, 7 (2): 89-98.

Başarır M, Şahin A, 2016. Two General Iteration Schemes for Multi-Valued Maps in Hyperbolic Spaces, Communications of the Korean Mathematical Society, 31 (4): 713-727.

Başarır M, Şahin A, 2017. Some Results of The New Iterative Scheme in Hyperbolic Space, Communications of the Korean Mathematical Society, 32 (4): 1009-1024.

Berinde V, 2003. On The Approximation of Fixed Points of Weak Contractive Mappings. Carpathian Journal of Mathematics, 19 (1): 7-22.

Berinde V, 2007. Iterative Approximation of Fixed Points, Springer, Berlin, 2007

Chugh R, Kumar V, Kumar S, 2012. Strong Convergence of a New Three Step Iterative Scheme in Banach Spaces. American Journal of Computational Mathematics, 2 (4): 345-357.

Dogan K, Karakaya V, 2014. On the Convergence and Stability Results for a New General Iterative Process. The Scientific World Journal, 2014: 1-8.

Gürsoy F, Karakaya V, Rhoades BE, 2013. Data dependence results of new multistep and S-iterative schemes for contractive-like operators. Fixed Point Theory and Applications, 2013: 1-12.

Ishikawa S, 1974. Fixed Point By a New Iteration Method. Proceedings of the American Mathematical Society, 44: 147-150.

Karakaya V, Atalan Y, Dogan K, Bouzara NEH, 2017. Some Fixed Point Results for a New Three Steps Iteration Process in Banach Spaces. Fixed Point Theory, 18 (2): 625-640.

Knopp K, 1931. Theory and Application of Infinite Series. Berlin.

Mann W R, 1953. Mean Value Methods in Iteration. Proceedings of the American Mathematical Society, 4 (3): 506-510.

Maldar S, 2019. Geleceğin Dünyasında Bilimsel ve Mesleki Çalışmalar: Matematik ve Fen Bilimleri. Ekin Basım Yayın Dağıtım No:1, s. 167-181, Bursa-Türkiye.

Miller HI, 1973. Rates of convergence and summability. Rad. Odjeljenje Prir. Mat. Nauka, 12 (1973), 85-92.

Noor MA, 2000. New Approximation Schemes for General Variational Inequalities. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 251 (1): 217-229.

Picard E, 1890. Mémoire Sur la Théorie des Équations Aux Dérivées Partielles et la Méthodebdes Approximations Successives. Journal de mathématiques pures et appliquées, 6: 145-210.

Weng X, 1991. Fixed Point Iteration for Local Strictly Pseudo-Contractive Mapping. Proceedings of the American Mathematical Society, 113 (3): 727-731.