Assessment of a Middle-School Mathematics Teacher's Knowledge for Teaching the 5th-Grade Subject of Fractions

Ceylan Şen

Yozgat Bozok University, Faculty of Education, Yozgat/Turkey (ORCID: 0000-0002-6384-7941)

Article History: Received: 24 May 2020; Accepted: 2 January 2021; Published online: 13 January 2021

Abstract: This study has aimed at revealing the knowledge for teaching a middle-school mathematics teacher has in teaching the 5th-grade subject of fractions. For this purpose, the Mathematics Knowledge for Teaching (MKT) was used. The study adopted the holistic single-case study, one of the qualitative study designs. The study was implemented with a teacher assigned at a public school and who volunteered for the study. The study data were collected by semi-structured interviews held with the teacher and observations during the teaching process of the subject of fractions, on which the teacher's knowledge was sought to be assessed. Consequent to the study, it was revealed that the middle-school mathematics teacher possesses insufficient content knowledge on fractions, operations with fractions and meanings and models of fractions. It was concluded that his insufficient content knowledge also had an adverse impact on this knowledge for teaching and therefore, restricted the teacher's teaching process. Based on the study, it was concluded that due to the teacher's limited content knowledge and pedagogical content knowledge, he has an insufficient mathematical knowledge for teaching.

Keywords: Mathematical knowledge for teaching, fractions, middle-school mathematics teacher

DOI:10.16949/turkbilmat.742136

Öz: Bu çalışmada 5. sınıf kesirler konusunun öğretiminde bir ortaokul matematik öğretmeninin öğretme bilgisinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda Öğretmek için Matematik Bilgisi (ÖMB) modeli kullanılmıştır. Araştırmada nitel araştırma desenlerinden bütüncül tek durum çalışması benimsenmiştir. Araştırma, devlet ortaokulunda görev yapan ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan bir matematik öğretmeni ile yürütülmüştür. Araştırmanın verileri öğretmen ile gerçekleştirilen yarı yapılandırılmış görüşmeler ve öğretmen bilgisinin incelendiği kesirler konusunun öğretimi sürecinde yapılan gözlemler yolu ile toplanmıştır. Araştırmada elde edilen verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Araştırma sonucunda çalışmada yer alan ortaokul matematik öğretmeninin kesir, kesirlerle işlemler, kesirlerin anlamları ve modellerine ilişkin yetersiz alan bilgisine sahip olduğu ortaya konulmuştur. Yetersiz alan bilgisinin, öğretmenin öğretme bilgisini de olumsuz etkilediği ve öğretim sürecinin de bu doğrultuda kısıtlı kaldığı ortaya konulmuştur. Çalışma sonucunda öğretmenin alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisinin kısıtlı olması sonucu matematik öğretme bilgisinin de yeterli olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematiği öğretme bilgisi, kesirler, ortaokul matematik öğretmeni

Türkçe sürüm için tıklayınız

1. Introduction

In achieving a good process of teaching, it is required that the teachers have profound knowledge on the subject they are going to be teaching (Fernandez, 2005). Teachers who lack sufficient knowledge and skills in students' learning fail to act effectively and efficiently (Ball, Thames & Phelps, 2008). Knowledge and skills possessed by teachers are amongst the most important factors that affect quality of education and teaching. Accordingly, the importance of the teaching knowledge that the teachers have comes into prominence (Hill, Ball & Schilling, 2008). Teachers' knowledge on the subject that constitutes contents of the teaching, their familiarity with methodologies and techniques they may use in efficient transmission of this knowledge to students, as well as knowledge and skills the teachers are required to possess in order to teach in a way appropriate for each student are referred to collectively as content knowledge and pedagogical content knowledge (National Council of Mathematics [NCTM], 2000).

In the knowledge of teaching mathematics, the content knowledge is a profound knowledge that the teachers have on mathematical notions (Mishra & Koehler, 2006). Pedagogical content knowledge connects the teachers' conceptions on mathematical notions with the pedagogical knowledge they have on the teaching contents. In the pedagogical content knowledge, the content knowledge is knowledge of teaching that is specific to teach a certain subject and that acts as a prerequisite for such knowledge (Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013). Pedagogical content knowledge refers to the knowledge and skill that enables selecting pedagogical methodologies and techniques that allow use of materials and models that will make teaching contents effective, representation of ideas (allusion, explaining, notation, adducing and the like) and adapting these representations appropriately to each student (Shulman, 1987).

Corresponding Author: Ceylan Şen **email:** ceylansen@yobu.edu.tr

Citation Information: Şen, C. (2021). Assessment of a middle-school mathematics teacher's knowledge for teaching the 5th-grade subject of fractions. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 12*(1), 96-138. http://doi.org/10.16949/turkbilmat.742136

Mathematics subject content knowledge constitutes the basis for the middle-school teachers' mathematics course contents (Ferrini-Mundy & Findell, 2001). Furthermore, in the mathematics teachers' efficient reflection of their mathematics knowledge in their classes, their pedagogical content knowledge plays a significant role. Examining the studies that identify the mathematics teachers' teaching knowledge, it is observed that these studies are classified on the basis of the content knowledge that suggests the knowledge the teachers possess on the relevant topic and on the basis of the pedagogical content knowledge that shapes their teaching. In studies on the content knowledge of mathematics teachers, it is proven that the teachers' content knowledge and the students' mathematical achievements are closely correlated (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007). These studies emphasised the correlation between enhancement of the teacher's knowledge and increase in the students' achievements. On the other hand, studies on pedagogical content knowledge have attested connections between the content and pedagogy and expanded the concept of teachers' mathematical knowledge. These studies have shown that teachers' pedagogical content knowledge is important in students' learning and conceptualisation of mathematical knowledge (Baumert et al., 2010; Kleickmann et al., 2013). Similarly, in the study by Joutsenlahti and Perkkila (2019), it is emphasised that insufficient mathematic content knowledge and pedagogical content knowledge will lead the teacher to view mathematics merely as a set of 'rules' and 'procedures.' In such a case, the teacher aims at gaining expertise in applying the rules and procedures and practising calculations and operations, without any concern to conceive the fundamental notions and structures in mathematics teaching (Petocz & Reid, 2003).

As the importance of mathematics knowledge for teaching is further emphasised, research of teachers' knowledge for teaching concerning the learning domains within mathematics has become a necessity. It is observed that, during transition from elementary school to middle school, both teachers and students experience difficulties about certain notions due to the abstract nature of mathematics. The subject of fractions is the most prominent among these (Işıksal & Çakıroğlu, 2011). Fractions form one of the subjects that both teachers and students experience difficulties to understand (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Li & Kulm, 2008; Ma, 1999; Simon, 1993; Tirosh, 2000; Zhou, Peverly & Xin 2006). One of the underlying reasons to such difficulties is that the conceptual dimension of teaching fractions is neglected (Ma, 1999). These difficulties include applying operations with fractions by mere rote and the lack of knowledge about the mathematical logic behind these operations (Davis, 2003; Tirosh, 2000). Operations with fractions are often implemented with applying memorised knowledge such as 'at addition, if denominators are different, they are equalled and at division, the first fraction is written as it is, the second fraction is reversed and multiplied.' One of the factors causing this condition is that teachers do not possess the mathematical knowledge concerning the subject and they teach on the basis of memorising mathematical algorithms (Işıksal & Çakıroğlu, 2011; Joyner, 1994; Khoury & Zazkis, 1994, Tirosh, 2000). Although mathematical algorithms present steps that facilitate solution of a question, when they are not conceptually associated with mathematical thinking, they lead to deficient learning based on mere memorisation (Klemer, Rapoport & Lev-Zamir, 2018). Such learning based on algorithms prevents the teachers from developing their own thinking and achieve a meaningful learning (Hanselman, 1997; Kamii & Dominick, 1998). Due to students' learning of algorithms on mere memorisation, certain errors and conceptual mistakes emerge (Klemer, Rapoport & Lev-Zamir, 2018). In students' learning of concepts that are hard for them to conceive and about which they have various mistakes, the teachers have an important role (Hill & Ball, 2004). Efficient implementation of teaching and learning is directly correlated with the teacher's Professional competency (Tanışlı & Köse, 2013). In this context, the importance of the knowledge for teaching that the teachers possess on teaching fractions is further pronounced.

In studies made on knowledge for teaching that the teachers possess on teaching the subject of fractions (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992; Eli, Mohr-Schroeder & Lee, 2013; Işık & Kar, 2012; Lo & Luo, 2012; Klemer, Rapoport & Lev-Zamir, 2018; Ma, 1999; Ölmez & Izsak, 2020; Özel, 2013; Sahin, Gökkurt & Soylu, 2016; Simon,1993), it was identified that mathematics teachers have shortcomings in interpretation of mathematical notations, deepening the conceptual dimension, deduction and proof and using multiple representations and problem types. In light of these studies, an assessment of mathematics teachers' knowledge on the notion of fractions, their pedagogical content knowledge effective in implementation of their teaching of fractions and associations between these two types of knowledge have become even more important.

1.1. Theoretical Framework

Knowledge and skills required in teachers who form the most important component in quality and character of education have been studied by many researchers. These studies have primarily focussed on what teachers are required to know (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Begle, 1979; Monk, 1994; Rowan, Chiang & Miller, 1997). Following these studies, studies targeting the factors that will affect teachers' actual classroom teaching were made and the knowledge for teaching has been classified in various ways (Grossman, 1990; Magnusson, Krajcik & Borko, 1999; Shulman, 1986, 1987). Shulman (1986) classified the content knowledge required to be possessed by the teacher as a) subject content knowledge, b) pedagogical content knowledge and c) knowledge of curriculum. Subject content knowledge is the knowledge that enables integration of fundamental rules and notions of a certain discipline and distinguishing situations of validity/invalidity and accuracy/inaccuracy. Pedagogical content knowledge refers to the knowledge possessed on difficulties the students experience on a subject and on the modes of representation (analogy, explanation, image, and the like) that enables the students' comprehension of rules and notions found within the content knowledge. Syllabus knowledge is comprehensive of knowledge on being acquainted with targets and purposes of a subject, as well as the preceding or following subjects associated with the subject, using compatible techniques and methods of teaching and selection of subject-specific effective materials (Shulman, 1986).

Definition of Shulman (1986) on pedagogical content knowledge has been specified by mathematics education researchers (Ball, Thames & Phelps, 2008; Hill, Schilling & Ball, 2004; Hill, Rowan & Ball, 2005) for teaching of mathematics and structured as content knowledge for teaching (CKT) and mathematics knowledge for teaching (MKT). Classification identified by Shulman (1986) on knowledge for teaching was specified by Ball, Thames, and Phelps (2008) for teaching mathematics and the MKT classification was detailed further (Figure 1). In MKT, under the knowledge for teaching a teacher is required to possess; a) common content knowledge (HCK), b) specialised content knowledge (SCK) and c) horizon content knowledge (HCK) sub-categories were introduced for classification. On the other hand, pedagogical content knowledge was clustered in categories a) knowledge of contents and students (KCS), b) knowledge of content and teaching (KCT) and c) knowledge of content and curriculum (KCC).

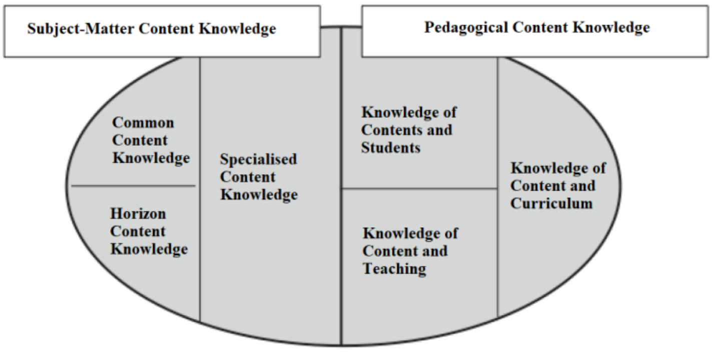


Figure 1. Mathematics Knowledge for Teaching Model (Ball, Thames & Phelps, 2008)

HCK is inclusive of knowledge on mathematical notions, rules, and principles (Ball et al., 2008). This knowledge is a fundamental-level knowledge that does not require profound mathematical comprehension. Accurate use of mathematical language and terminology, the ability to distinguish the students' answers as correct, false or deficient are found in this scope. SCK is inclusive of mathematical knowledge for teaching mathematics. Familiarity with the logic of mathematical thinking and the mathematical ideas found in conceptual sub-structures of mathematical operations implemented and also, explaining them in an association of causality are found in this scope. It requires the ability to interpret the students' answers in mathematical terms and decide on whether they are correct or false, which is an ability that is essential in achieving effective teaching. HCK is inclusive of recognising associations and causality between diverse mathematical subjects. HCK shows parallelisms with horizontal and vertical knowledge for curriculum, found under the teaching programme in the classification by Shulman (1986). Horizontal knowledge of curriculum is a teacher's knowledge of other domains associated with the subject he/she teaches. Vertical knowledge of curriculum is a teacher's holistic handling of the subject he/she teaches, in association with preceding and following class levels and without limiting it to the current class level. KCS is inclusive of a teacher's knowledge on mathematical knowledge and skills possessed by his/her students and accordingly, the knowledge on the students' individual characteristics and teaching techniques specific to the subject matter. KCS is a teacher's knowledge of his/her students' ages, attendance, difficulties, and mistakes in the notion taught and the ability to plan a compatible teaching by taking the students' individual characteristics into consideration. KCT is a teacher's knowledge of mathematics teaching techniques and ability to design a subject-specific lesson. A teacher's use of subject-specific visuals, materials, models, presentations, technological tools, and multiple representations, as well as use of examples and a mathematical language compatible with the purpose of the subject are the sorts of knowledge found in the KCT component. KCC is inclusive of a teacher's competency in the curriculum he/she is responsible of, planning the lesson in the context of achievements found in the curriculum, application of teaching techniques designated in the programme and acting according to the purpose, selecting materials compatible with the curriculum and familiarity with the mathematics curriculum's associations with other fields (such as science or social sciences). With this model, measuring the teachers' mathematics knowledge for teaching and identifying their content and pedagogical content knowledge have gained further importance (Aslan-Tutak & Köklü, 2016). The knowledge for teaching a teacher possesses for teaching mathematics is considerably effective on his/her students' knowledge and skills (Morris, Hiebert & Spitzer, 2009). Accordingly, identifying the mathematics teachers' knowledge for teaching mathematics shall present significant contributions to the literature.

In studies researching the teachers' knowledge for teaching mathematics, it has been revealed that they have insufficient knowledge to define the fractions (Fazio & Siegler, 2011; Kieren, 1993). The notion of fraction is defined by Niven (1961) as an algebraic expression composed of the numerator and denominator (cit., Yanık, 2013). Based on this definition, a fraction is understood to have an infinite number of representations (Yanık, 2013). Lamon (2007) defined a fraction as a positive expression that can be written in the form a/b. In understanding the fractions, the expression that is represented is required to be understood (Van de Walle, Karp & Bay-Williams, 2013). Fractions appear before us in their part-whole, measure, division, ratio and operator meanings (Lamon, 2007). A fraction's part-whole meaning refers to the operation of dividing the whole into equal parts. Part-whole meaning of the expression a/b represents the part a in a whole divided into b equal parts. Measure meaning defines expression of a measuring procedure. Measure meaning of the expression a/b represents a times a 1/b-unit scale (Yanık, 2013). Division meaning represents an operation of dividing. Division meaning of the expression a/b refers to the result obtained by dividing a to b (Kieren, 1993). Ratio is a comparison of quantities belonging to the same or different measuring spaces (Smith, 2002). This ratio may be either part-whole or part-part (Van de Walle et al., 2013). Ratio meaning of the expression a/b may be identified as the ratio of part or the ratio of the part a to a whole divided into b parts. Operator meaning of a fraction refers to the multiplication rule (Toluk, 2002). For example, in the expression '2/5 of 3,' the fraction 2/5 refers to the operation of multiplication. In teaching fractions, particularly at the elementary-school level and in textbooks, part-whole meaning of fractions is heavily emphasised (Van de Walle et al., 2013). This leads to difficulties in students' understanding that fractions may also have different meanings. Siebert and Gaskin (2006) assert that, in early stages of teaching fractions, the part-whole meaning should be taught first and followed by teaching the other meanings. By recognition of different meanings of fractions, the students shall be given the opportunity to improve their understanding of fractions (Clarke, Roche & Mitchell, 2008; Siebert & Gaskin, 2006).

Use of fraction models is suggested to achieve students' conceptual learning of fractions (Siebert & Gaskin, 2006). Fractions are represented by region (area), length and set models (Van de Walle et al., 2013). Region (area) model represents a fraction's part-whole meaning on a part of a region or area (Cramer, Wyberg & Leavitt, 2008; Kieren, 1976; Wu, 2011). It is usually in the shape of a circle or a rectangle. Denominator of the fraction represents the number of equal parts the shape is divided, and its numerator presents the shaded part. In notation of fractions and representation of operations with fractions, usually the region (area) model is used (Baek et al., 2017; Webel & DeLeeuw, 2016). Length model refers to use of fraction strips or rods in representation of the magnitude of a fraction (Siegler et al., 2010). Numerical line is one of the length models used in representing magnitudes of fractions (Kieren, 1976; Moss and Case, 1999). Use of a numerical line is recommended both for perception of fractions and numbers and to arrange them (Clarke et al., 2008; Flores, Samson & Yanık, 2006). Another model used in representation of fractions is the set model. A fraction is used to notate a set representing a group of objects that constitute the integral and also, the different properties of certain elements in this set. By using fraction models, learning fractions conceptually beyond symbolic expressions and assistance in meaningful learning of the notion are enabled (Fazio, DeWolf & Siegler, 2016; Fuchs et al., 2013; Kellman et al., 2008; Van de Walle et al., 2013). Nevertheless, it is observed that teachers fail to sufficiently use the set models that support their students' learning and do not assign time to their use (Van de Walle et al., 2013).

Studies indicate that the level of students' understanding of the notion of fraction is rather low (NCTM, 2000; Sowder & Wagne, 2006). Incompetent understanding of students on the subject of fraction leads to the difficulties they experience in applying operations with fractions, understanding notions of decimals and percentage and also, in other learning domains (algebra, ratio and proportion and rational numbers) associated with fractions (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; National Mathematics Advisory Panel [NMP], 2008; Siegler et al., 2010).

Difficulties concerning the notion of fraction are not experienced only by students but also by teachers (Luo, Lo & Leu, 2011; Ma, 1999; Merenluoto & Lehtinen 2004; Obersteiner et al., 2013; Vamvakoussi, Van Dooren & Verschaffel, 2012; Van Dooren, Lehtinen & Verschaffel, 2015). The studies show that students overgeneralise the properties of their operations with natural numbers to their operations with fractions (based on the property of addition/subtraction, adding the numerator and denominator or applying the property of addition to the operation of multiplication) and experience difficulties thereof (McMullen et al., 2015; Van Dooren et al., 2015; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). Overgeneralisation of operations with natural numbers causes a conceptual fallacy in students. One of the reasons the students' difficulties in fractions is that the teachers teach on the basis of algorithm and students try to memorise these algorithms (Hanson, 1995; Pantziara & Philippou, 2011). Accordingly, assessment of the knowledge for teaching possessed by teachers on teaching fractions, a subject the students have difficulties in learning, and which affects their learning in other learning domains has become important. To serve this purpose, answers were sought to the following questions:

1. How is the middle-school mathematics teacher's subject-matter content knowledge on the subject of fraction?
2. How is the middle-school mathematics teacher's pedagogical content knowledge on the subject of fraction?

2. Method

The study has aimed at revealing a middle-school mathematics teacher's MKT on fractions. Case studies are studies where 'particular cases' taking place in real-life situations are assessed. A particular case may be constituted by exemplary conditions such as an individual, a class, a programme or a school and they may also be implemented by targeting a process (Fraenkel & Wallen, 2009). Holistic single-case studies are studies implemented on a single case (such as an individual or a programme) (Yin, 2003). In this study, the study was implemented with one teacher, thus enabling in-depth assessment of all dimensions found in MKT components.

2.1. Participants

The study had been implemented by obtaining the required on the basis of the Yozgat Bozok University Ethics Commission taken at the meeting of the date 22 April 2020 and number 09. In addition to the ethics commission's approval, a meeting was held with the teacher who would participate in the study and the application was explained in detail. The teacher had participated voluntarily in the study.

The teacher who would participate in the study was designated by purposeful sampling. A teacher who teaches at 5th, 6th, 7th and 8th grade courses at middle schools located in the central district and who has a special education student (inclusive, gifted and talented) in the 5th grade was selected. Components of teaching knowledge were taken into consideration at designating the criteria expected from the teacher. The study focussing on the 5th-grade subject of fractions, the teacher's capacity to associate due to his competency in advanced syllabus topics was considered. Thanks to the other criterion, i.e., a special-education student in his class, it was enabled to consider the students' individual attributes in the procedure of teaching and question the elements of customisation and diversification of teaching. A middle-school mathematics teacher who meets the said criteria was identified and this study had been implemented by his voluntary participation in the study.

In order to protect the privacy of the mathematics teacher who had participated in the study, 'Burak' was used as his pseudonymous given name. Burak graduated from the Elementary Schools Mathematics Teaching programme of a public university in the year 2013. He has been assigned at his current middle school for 7 years and is teaching the mathematics courses for the 5th, 6th, 7th, and 8th grades.

2.2. Data Collection Tools

The study has used personal interview and observation as data collection tools. Burak's content knowledge and pedagogical content knowledge were first assessed by a personal interview and afterwards, by comparisons based on classroom observations.

2.2.1. Interview

The personal interview had been held between Burak and the researcher, with a semi-structured interview questionnaire prepared by the researcher. The interview questionnaire was prepared on the basis of MKT and is composed of two main sections concerning the teacher's content knowledge on the subject of fractions and his pedagogical content knowledge. Of the questions in the questionnaire, in the context of content knowledge; i) general content knowledge, ii) specialised content knowledge and iii) comprehensive content knowledge sub-dimensions and in the context of the pedagogical content knowledge; i) content and student knowledge, ii) content and teaching knowledge and iii) content and syllabus knowledge sub-dimensions were included. The interview questionnaire was prepared by the researcher in a draft form composed of 40 questions and afterwards, two researchers specialised in teaching mathematics were consulted for their opinions. Following the expert educators' assessment of the draft form in its contents and scope, the questionnaire was finalised in a form of 36 questions guided by shared opinions. In order to have the interview with the teacher implemented in a complete and accurate manner, the interview procedure was first tested by holding an interview with another mathematics teacher. By using the interview questionnaire thus finalised (APPENDIX-1), the personal interview with the teacher was held in two sessions, with duration of approximately 20 minutes each. The personal interview was held prior to Burak's lesson on fractions and in order to prevent any impact of the interview content on Burak and his teaching of fractions, it was scheduled to three months before Burak's lesson on fractions. By taking the teacher's consent, sound recording of the personal interview held was taken. This way, any data loss was prevented.

Interview Questionnaire: The MKT interview questionnaire is composed of 6 sub-categories. These questions were prepared on the basis of MKT categories and contents. The contents of the interview questionnaire are as follows:

Subject-Matter Content Knowledge

1. HCK: This sub-category relates to questions about the knowledge on fractions that a teacher is universally required to possess. It is composed of 6 questions concerning definition of a fraction expression and application of operations in fractions
2. SCK: This sub-category relates to questions based on the mathematical logic of operations applied in fractions and where the notion of fraction is assessed in all of its dimensions (i.e. different meanings and notations). This sub-category has 8 questions.
3. KAP: This sub-category is composed of two further sub-categories, namely horizontal and vertical knowledge of curriculum. In the context of the horizontal knowledge of curriculum, it is composed of questions aimed at revealing the subject of fractions with its associations in various disciplines, daily life and within the subjects of mathematics itself. On the other hand, the context of the vertical knowledge of curriculum involves contents including preceding subjects associated in the curricular programme with teaching of fractions, advanced-grade subjects it forms a basis for, comprehensive meaning of the notion of fractions, different models of fractions and compatibility with class levels. This sub-category has 5 questions in total.

Pedagogical Content Knowledge

- KCS: This sub-category relates to 8 questions aiming at revealing the knowledge on the students' characteristics, difficulties and mistakes they experience on fractions and techniques and methodologies the teacher uses in the procedure of teaching by taking these factors into consideration.
- KCT: This sub-category relates to 4 questions aiming at revealing the knowledge on visuals, materials, models, representations, technological tools, and multiple representations that may be included specifically for teaching the subject of fractions.
- KCC: This sub-category aims at revealing the teacher's knowledge of the Mathematics Course (Elementary School and Middle School) Curriculum (2018) in the context of teaching the subject of fractions. It includes 2 questions concerning the teacher's knowledge on achievements in the curriculum and teaching techniques identified with these achievements. Achievements presented in association with the subject of fractions are placed under relevant topics of the interview questionnaire.

2.2.2. Observation

In revealing a teacher's knowledge for teaching, detailed identification of the teacher's explanations and the teacher's actions in the classroom, which enable an assessment of the classroom application, plays a significant role (Hill, Ball and Schilling, 2008). Accordingly, the researcher had joined Burak's classroom environment as a non-participating observer at this teaching of the 5th-grade subject of fractions and observed his teaching process. During the observation, the researcher was involved by observing and taking notes, without joining the activities performed. The observation had been implemented throughout the teaching of fractions and on a weekly basis of 5 class periods; it had been continued for 5 weeks. A semi-structured observation form (APPENDIX-2), photography and video recording were used for observation. For this purpose, the researcher took observation notes on the teacher's teaching process and in order to prevent any data loss, the lesson was recorded on video and photographs were taken. By taking the necessary permissions from Burak, the teacher whose lesson was observed, photographs from the observation were used in assisting the interview data.

2.3. Data Analysis

Data obtained from the interview and observation were analysed in the study by descriptive analysis. Knowledge for teaching possessed by the teacher participating in the study was analysed by using the MKT components chart developed by Ball, Thames and Phelps (2008). Sound recordings used for obtaining data at the interview were transcribed and the data in a text form were encoded in the context of MKT components. This analysis of obtained data in accord with predefined themes is identified as a descriptive analysis (Yıldırım & Şimşek, 2013). The procedure applied for this purpose is detailed as follows:

1. A list where MKT categories are placed was developed. Afterwards, the dataset obtained from the personal interview was converted to a written text and encoded in the context of MKT components.
2. Observation form the researcher had recorded data during observation was also encoded in the context of MKT components. In addition to the observation form used during observation, classroom practices had been recorded with sound and image on a video recorder. These recordings were converted to a written text and analysed in the context of MKT components.
3. Data obtained from the interview, observation and video recordings of classroom practices were handled with a holistic approach and where necessary, direct citations from observation notes and classroom practices were included.

In the study that is a qualitative one, diversification was made in data collection tools in order to ensure credibility and transferability. Throughout the study, sufficient and required data materials were obtained from collection and archiving of the interview, observation, photography, and video recordings. Data collected in the study were analysed and transformed into a written document, the participant's approval was taken. Afterwards, analyses, made on correct understanding or correct interpretation of the data were verified by consulting the participant. This way, the data obtained were assorted, verified, and compared. Because the teacher participating in the study was selected by purposeful sampling and his individual characteristics were given and also, due to detailing of the teaching process observed and its presentation by direct citations, transferability to similar situations was considered.

2.4. Procedure

The study had been implemented in the autumn period of the 2019-2020 academic year. Necessary permits require to study with a teacher who meets the criteria designated under the study were taken from the Provincial Directorate of National Education. The study was implemented with Burak, a teacher who teaches at 5th, 6th, 7th and 8th grade courses and who has a special education student (inclusive, gifted and talented) in the 5th grade. Since the study aims at MKT assessment of a middle-school mathematics teacher, data under the study were collected by interviewing and observation. The study had been implemented in two stages. At the first stage, a personal interview with the purpose of revealing the teacher's MKT was held. At the second stage, the teacher's process of teaching fractions was observed in the classroom. Therefore, a comparison between interview data and observation data was enabled.

Fractions learning sub-domain in the Mathematics Course (Elementary School and Middle School) Curriculum (MoNE, 2018) is placed in the middle-school 5th grade, under the Numbers and Operations learning domain, following teaching of Natural Numbers. In elementary school, fractions are taught in 1st, 2nd, 3rd, and 4th grades. Accordingly, it may be argued that a 5th-grade student possesses an existing knowledge of fractions. In the Mathematics Course (Elementary School and Middle School) Curriculum, the 5th-grade subject of Fractions and Operations with Fractions has 8 achievements. 35 class periods are assigned for the relevant achievements in the curriculum.

3. Findings

The middle-school mathematics teacher's knowledge for teaching on the subject of fractions are presented under the topics of subject-matter content knowledge and pedagogical content knowledge.

3.1. Subject-Matter Content Knowledge

HCK, SCK and HCK dimensions were handled under the MKT subject-matter content knowledge.

3.1.1. HCK

In order to reveal the teacher's HCK on fractions, questions aiming at defining fractions and applying basic operations were asked. First, Burak was asked to explain the notion of fractions and to express the condition given in the form $\frac{a}{b}$. The teacher defined the notion of fractions as '*We divide a whole into pieces and the number of these pieces gives us the denominator, Then, how many of these pieces we take, that gives us the numerator.*' Based on this explanation of the teacher, we may argue that he defines the notion of fractions on the basis of part-whole meaning, but he fails to use the expression 'equal parts.' Also at classroom observations, it was observed that he defined the notion of fractions based on a part-whole association but nevertheless, in that procedure, he also expressed division into equal parts (Figure 2). Accordingly, we can observe that the teacher is able to provide basic definition fractions, which includes the part-whole meaning.

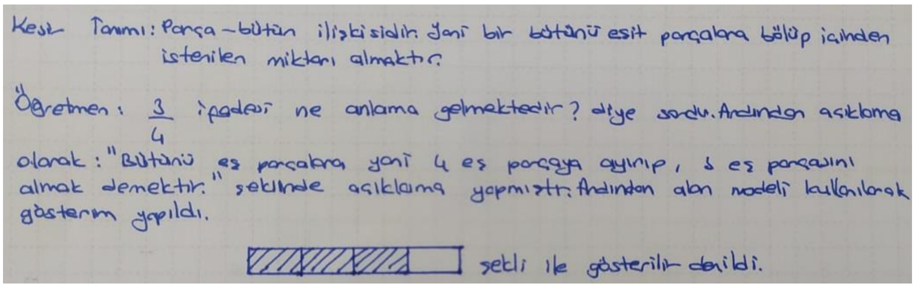


Figure 2. Observation note on the definition of fractions

Following the teacher's explanations on the notion of fractions, he was asked basic-level questions pertinent to addition-subtraction and multiplication-division operations with fractions. The solutions by the teacher and his explanations to them are presented in the following figure (Figure 3).

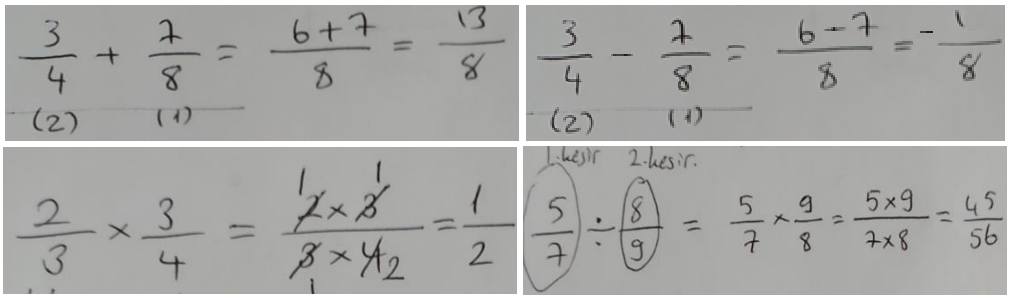


Figure 3. The teacher's solution to operations with fractions

Burak expressed the addition-subtraction operation with fractions as '*If the denominators are equal to each other, the denominator is written and the numerators, written on a single fraction strip, are either added or subtracted. Eventually, if reduction is required, the fraction is reduced*.' On the operation of multiplication with fractions, Burak's explanation was as follows: 'In the operation of multiplication, the numerators are multiplied and written in the numerator. This is *2×3. The denominators are multiplied, and this is 3×4. If reduction is required, first, reductions are reduced. 3s are reduced, 4 is reduced by 2 and in its most reduced form, the fraction is ½.'* As for his explanation on the operation of division, Burak told the following: '*The first fraction is written and the second fraction is taken in a form reverse to multiplication, exchanging the places of the numerator and denominator. Therefore, the operation of division is converted to an operation of multiplication. Afterwards, the rules of multiplication shall apply. The numerators are multiplied and written in the numerator and the denominators are multiplied and written in the denominators. In the operation of division, we write the first fraction as it is and write the second fraction as reversed and we multiply. By reverse, we mean that the numerator and the denominator swap places.'* It is observed that the teacher's solution and his explanations to the solution have no error. Viewing the teacher's explanations on operations with fractions, it is observed that the solutions were based on algorithm. It is concluded that the teacher, in his operations with fractions, is able to define the notion of fraction at a basic level and possesses the operational knowledge required to apply operations with fractions.

3.1.2. SCK

In this chapter, the purpose had been to identify the teacher's knowledge on the notion of fraction and the mathematical meaning of operations applied with fractions. To serve this purpose, the teacher was given mathematical expressions notated in the form $\frac{a}{b}$ and he was asked to clarify whether they are fractions or not. For the expression $\frac{2}{0}$, the teacher made the following explanation: '*There's a whole and we divided this into 0 pieces. Or we don't have any whole at hand and yet, we took 2 pieces from this. Something like annihilating a thing that doesn't even exist. We can't define this. It is impossible.'* Similarly, with his words '*no whole but I divide that into 0 pieces and take 0 pieces from it. What did we already have? Nothing. Therefore, this is ambiguous*' he used to define the expression $\frac{0}{0}$ shows that he based his explanation on the part-whole meaning of fractions. It is observed that the teacher reflected the part-whole meaning in his definition of the notion of fraction to all $\frac{a}{b}$ expressions in a similar manner. This behaviour shows that the teacher failed to consider different meanings (i.e. measure, division, ratio and operator) meanings of fractions. Burak's explanation on the expression $\left(-\frac{2}{4}\right)$ was '*This is a negative number. We can't call it a fraction. Nevertheless, the grade is important in these. For instance, at the lycée level, we would be calling this expression a rational number.'* Based on this explanation of the teacher, it is observed that he holds the impression that, in teaching of the notion of fractions at elementary-school and middle-school levels, the notion of fractions would be identified in advanced grades with the notion of rational numbers. This impression of the teacher indicates that he is unable to adequately define the notions of fraction and rational numbers. In a similar vein, the teacher was given the expression $\frac{3}{4}$: n to assess his consideration of fraction and rational number properties and he was asked for which values of n this expression may identify a fraction. Burak's explanation was '*It is a fraction for each state of n. If we give the value 1 to n, it is ¾. If ½ , it is 3/8. It is defined as a fraction under any circumstances.'* It is observed that the teacher is unable to make a complete definition of the notions of fraction and rational numbers and fails to consider their properties.

By deepening the notion of fraction, the teacher was asked to define the types of fractions (unit fraction, equivalent fraction and mixed fraction). Burak explained unit fraction as follows: '*For example, I draw a whole on the board. I divide this whole into equal pieces and mentioning that 4 of them were eaten, I tell the piece that falls to each of four siblings.*' This definition by the teacher was also observed at his classroom practices for teaching fractions (Figure 4).

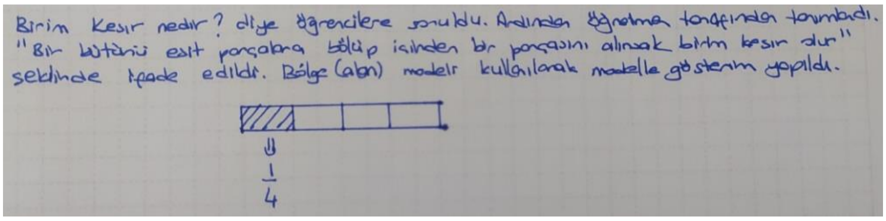


Figure 4. Observation note on the definition of unit fraction

Burak defined a mixed fraction with the following words: '*I can express it based on quantities of the wholes we have at hand. For example, we have 3 wholes that are identical. When we will divide 3 apples to 2 persons as a whole each, we give a whole apple to one of them and another whole apple to the other. Afterwards, by cutting the third apple in half, we give one half to one of them and one half to the other. Afterwards, we express the whole and the fraction taken by each of them. It is expressed as 1 whole and ½.'* For equivalent fractions, he gave the following definition: "*By drawing, I divide a whole into 4 equal parts and take 3 parts and show that 6 parts were taken from the same whole when divided into 8 parts. This way, I show the equivalences in fractions. I say that those fractions are equivalent but not equal.'*" It is seen that the teacher shapes his definitions of the types of fractions by giving examples based on situations he has been teaching. Accordingly, we may argue that the teacher failed to define the types of fractions but could merely exemplify them.

In order to reveal the mathematical meaning of operations procedure with fractions, operations of addition/subtraction and division that were applied by rote were questioned. Concerning the deed of equalling the denominators in the operation of addition/subtraction with fractions, Burak made the explanation '*We must have identical denominators so that we can disintegrate and distribute the same whole. Hence, if not identical, they can't be distributed*' and thereby, had based his explanation with the reason of 'working within the same whole.' It is observed that this explanation was brought by emphasising the part-whole meaning of fractions. Accordingly, we may argue that the teacher indicates the underlying conceptual dimension of the deed of equalling the denominators. Burak's mathematical explanation to the expression 'the first fraction stays as it is, and the second fraction is reversed' on applying the operation of division with fractions was as follows: '*The operation is converted to an operation of multiplication. The first fraction is kept as a constant and it is multiplied with the reverse of the second fraction in the operation of multiplication. In other words, it is converted to a multiplication.*' It is observed that the teacher explains the operation of division as 'reverse in the operation of multiplication', that is to say, based on the operational procedure. Therefore, we may argue that the teacher is not versed in the mathematical thinking underlying the algorithm applied in the operation division with fractions.

3.1.3. HCK

In the HCK dimension, the purpose had been to reveal the horizontal and vertical knowledge of curriculum. For the horizontal knowledge of curriculum, revealing the subject of fractions with its associations in various disciplines, daily life and within the subjects of mathematics itself was aimed at.

The teacher's explanation to association of fractions with the subjects and notions of mathematics was as follows: '*When the students learn of the notion of fraction, they learn dividing, distributing and adding the distributed pieces and later, they learn how to associate them with rational numbers.*' This explanation by Burak shows that the teacher, with his words 'dividing, distributing', exemplifies the component meaning of fractions. In the context of SCK, it was noted that the teacher does not possess the knowledge of different meanings of fractions and only focusses on the part-whole meaning. Based on this, we may argue that, although the teacher does not possess direct knowledge of fractions' meanings and is unable to define them, he is able to make associations through his examples. However, it is observed that the teacher fails to make associations with the learning domains of percentages, ratio and proportion that the notion of fractions is associated with.

As for associating the notion of fraction with different disciplines, Burak made his associations with the following words: '*First and foremost, it's science. You cannot think of science without maths. Taking a look at its association with the subject of fractions, well, we may say that it's associated with rational numbers, rather than fractions. Science meets with rational numbers in operations. While expressing density, or also in operations for instance, they are expressed in rational numbers. Decimals see use.*' He explains the association of fractions with science in terms of rational numbers. Based on this explanation of the teacher and his remarks in reply to the questions concerning SCK, we may argue that Burak is unable to distinguish fractions and rational numbers. Moreover, he says that fractions are represented in decimals and thereby, makes an association with decimals as a subject associated with the subject of fraction. The teacher's example '*while expressing density'* given in his explanation indicates an association made with the ratio meaning of fractions. Accordingly, we may argue that he was able to make association although he was not aware of the ratio meaning itself; the teacher is able to make associations. As for associating fractions with daily life, Burak told the following: '*At teaching* *fractions, I already give examples associated with daily life. For example, distribution of a field or how many pieces each get when a watermelon is cut'.* However, at observations of the teacher's classroom practices, no association concerning subjects, disciplines or daily-life situations associated with fractions was observed.

In the context of the vertical knowledge of curriculum, knowledge the teacher possesses on contents including preceding subjects associated in the curricular programme with teaching of fractions, advanced-grade subjects it forms a basis for, comprehensive meaning of the notion of fractions, different models of fractions and compatibility with class levels was assessed. In order to reval the teacher's knowledge on different meanings of fractions, he was asked what meanings the fractions have. Burak told that fractions have '*part-whole and division*' meanings but failed to mention their measuring, proportion, and operator meanings. It is observed that this deficiency the teacher has in his understanding is also reflected to HCK and he fails to define the notion of fraction in a sufficient manner. Burak was asked of the association between fractions and rational numbers and he told the following: '*There's a difference in terms of grades. We usually teach rational numbers in 7th and 8th grades. Rational number is a more advanced expression. Fractions are simpler. They are like dividing a whole into pieces. In further studies, there is the concept of proportion for instance. It is also not identical with fractions. Fraction refers to pieces of a whole. On the other hand, proportion refers to dividing two different sorts to each other. There, we can't speak of any whole.'* The teacher's explanation on rational numbers shows his emphasis on his understanding that rational numbers are a concept more advanced than fractions and that fractions turn into rational numbers in further middle-school studies. Additionally, the teacher's explanation on the notion of proportion defined the difference between fraction and proportion as '*Fraction refers to pieces of a whole. On the other hand, proportion refers to dividing two different sorts to each other.'* Based on these explanations by the teacher, we may argue that he lacks sufficient knowledge on associations and definitions of the notions of fractions, rational numbers, and proportion. This finding is also confirmed with the conclusion under SCK.

The teacher was asked of exemplary situations concerning different meanings of fractions and a query on whether these express a fraction and if yes, the meanings they refer to was made. Exemplary situations Burak was asked and his explanations are presented in the Table 1.

Table 1. Exemplary situations on different meanings of fractions and the teacher's explanations

Expression	Explanation
3 in 5 of a class (part-whole meaning)	***B:*** *The entire class is divided into 5 pieces and 3 are taken. In other words, it refers to the part-whole meaning. Therefore, it is a fraction.*
Using 5 units of the fraction 1/8 to obtain the fraction 5 in 8 (operator meaning)	***B:*** *It is '*how many units of the fraction 1/8 to obtain the fraction 5 in 8?' *Here, I divide a whole into 5 pieces and first, take one of the pieces. Later, I divide it into 6 pieces and take one. Then, 1 in 5 pieces, 1 in 6 pieces and 1 in pieces and therefore, each whole has its unit fractions.*
A comparison of the number of girls in a class to the number of boys (ratio meaning)	***B:*** *A comparison means a proportion. Proportion refers to a comparison of two quantities of the same sort. This is a proportion. We can't call it a fraction.*
Distributing 7 cookies to 9 students (division meaning)	***B:*** *7 is divided to 9 and it's a decimal. The numerator is divided directly to the denominator.*
Expressing 1 in 4 of a land plot with a surface are of 50 m^2 (measure meaning)	***B:*** *We can express it by converting into a decimal.*

Observing the teacher's answers to exemplary situations representing different meanings of fractions, we can see that the teacher gave an accurate definition of the part-whole meaning. Other examples reveal that he fails to make accurate assessments in terms of other meanings of fractions. In the example related to the operator meaning of fractions, Burak focussed on the fraction's attribute of being a unit fraction, rather than on its way of use. On the other hand, in the example related to the ratio meaning of fractions, his inaccurate definition of proportion and fraction led the teacher to identify the expression as a proportion and not a fraction. It is observed that the teacher's erroneous explanations are based on his lack of knowledge on fractions' ratio meaning and therefore, his failure to identify an expression of proportion as a fraction. This exemplary situation is also supported by the findings under SCK. In examples related to division and measure meanings of fractions, the teacher focussed on the fraction's mode of representation and not on its use and asserted that it is a decimal expression. Based on the aforementioned, we may argue that the teacher does not know different meanings of fractions and hence, has failed to accurately assess the examples given in this context. It is observed that this limited understanding is also reflected in his teaching of fractions Also in his definition of the notion of fraction and in his examples he gave during the teaching process, he focussed merely on the part-whole meaning (Figure 2.)

The teacher was asked questions that are pertinent to different models of fractions. First of all, the modelling was given and Burak was asked to explain such expression of a fraction and afterwards, by giving the expression of a fraction, he was asked to model this operation. An exemplary representation to the region (area) model was given (Figure 5). By this exemplary representation, teacher's interpretation of the region (area) model and also, revealing his knowledge on the expression of a fraction represented in this model were sought.

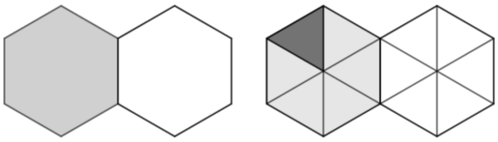


Figure 5. Region (area) modelling of fractions

Concerning the fraction represented by the model in the figure, Burak made the following explanations: '*A hexagon was taken and yet another hexagon was taken. One of them is shaded. A whole is composed of pattern blocks. With two f them later, each is divided into 6 equal pieces. Actually, the whole pattern was divided into 2 equal pieces Therefore, it is 1/12.'* Looking at the teacher's explanation, it is observed that he brings and interpretation by making an association between the first and second visuals. It is seen that the teacher interprets the given representation differently and fails to identify it as an equivalent fraction and mixed fraction. Additionally, Burak was asked to model 2 in 3 as 1 in 6. Accordingly, the teacher made a modelling (Figure 6) and gave the following explanation: *'When I apply the operation of multiplication only arithmetically, it is too abstract. It is better with materials. When I mention materials, it's not that we bring an object to the classroom. We draw the figure on the board and apply the operations on that. If I tell the kid "1 divided by 6 of 2 in 3," more than half of the class would ask they would whether multiply or divide or subtract.'*

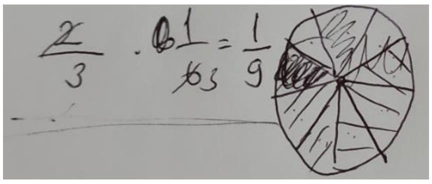
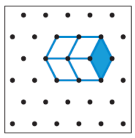


Figure 6. Modelling of the exemplary operation

It is observed that, in the exemplary operation given on modelling of fractions, the teacher provided a representation by using the region (area) model accurately. Furthermore, it is concluded that he is aware of the difficulty the students would experience with the fraction given and takes it into consideration.

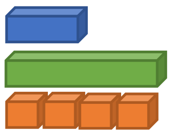
By showing exemplary expressions on different fraction models, the teacher was asked how he may express these representations in fractions:

Expression of the fraction $\frac{1}{5}$ in the region (area) model and the teacher's explanation:



B: *It's a composite cube with a shaded piece. Is it asked in surface area or in volume? If it's volume, we'll say 1 in 2. If it's surface area, we'll find their surface areas and say it's 1 piece. There are 5 surfaces and 5 surfaces more. 10 surfaces in total. Then, it's 1 in 10.*

The teacher's explanation indicates that he interprets the shape's part-whole meaning accurately but brings an erroneous representation of the fraction due to his assumption that it represents surface area and volume.



Where the green rod represents 1 whole and the blue rod represents $\frac{1}{2}$ unit, representation by using the length model, of the operation of butting the orange rod of $\frac{1}{4}$ units $\left(\frac{1}{2} \times 4 = 2\right)$ and the teacher's explanation:

B: *One of them is 1 whole, the other is also1 and the other is 4 wholes. Here, there's no expression of a fraction. It is not divided into equal parts.*

It is seen that the teacher is unable to identify the operation applied with the rods in the example. Besides, it was observed that he uses the numerical line method in his representation of magnitudes in fractions (Figure 7).

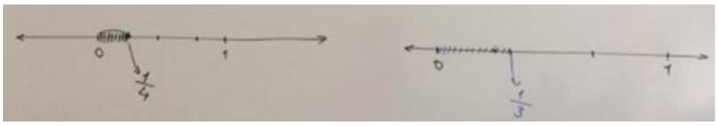
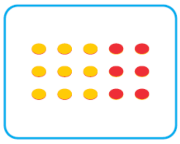


Figure 7. Classroom observation on use of the line model

Representation by the set model, of the exemplary situation of the red beads' ratio to yellow beads $\left(\frac{6}{9}\right)$ and the teacher's explanation:



> ***B:*** *Here, there is no whole. This is the ratio of separate sorts. A proportion is made.*

The teacher's explanation shows that, as indicated for HCK and SCK, the teacher focusses merely on the part-whole meaning of fractions and is unaware of the ratio meaning. Based on this explanation, it is concluded that Burak is also unaware of another fraction model, namely the set model.

The teacher was asked which representations from the given exemplary fraction models are used in his class and he was asked to comment on compatibility of these representations with the class level. Burak expressed his opinions on representations of fractions with the following words: *'I don't use any of these models. Furthermore, I don't use any 3D model. I only draw on the board. I draw rectangles, cake and circles. I teach none of these in 5th, 6 th or 7th grades. I can use these only if I have the materials. . Otherwise, I can't do these in 3D by drawing on the board. I don't think any of these representations are adequate for the students' level. Indeed, none of them are compatible to be taught at a middle-school level. For instance, the third shape, it's not a fraction anyway. It's a proportion.'* Accordingly, it may be concluded that the teacher does not possess sufficient knowledge in different representations of fractions. On the other hand, the teacher's comments on use of different representations of fractions and their compatibility with the class level reveals that he does not use these representations and reflects his opinion that they are not adequate for a middle-school level. It is considered that this opinion of the teacher stems from his lack of sufficient knowledge on these representations and therefore, he declines to use them. Furthermore, it is also considered that this opinion stems from the teacher's insufficient KCC.

3.2. Pedagogical Content Knowledge

KCS, KCT and KCC dimensions were handled under the MKT pedagogical content knowledge.

3.2.1. KCS

Under KCS, the purpose has been to assess the teacher's knowledge on his students' attendance, difficulties, and mistakes in learning the subject of fractions, their common mistakes, and his ability to plan a compatible teaching by taking the students' individual characteristics into consideration.

Concerning the difficulties his students experience during their learning of the subject of fractions, Burak gave the following explanation: *'They don't know how to equal the denominator; they don't know the given figure will be written as a numerator or denominator. I give them assignments. We need to work with materials. I tell them to disintegrate a whole and I also try to show it at the school but there are ones who can learn and there are ones who can't.'* It is observed that, amongst the difficulties the students experience during their learning of the subject of fractions, the teacher takes notice of confusion with the concepts of numerator and denominator and the challenge of equalling the denominators in the operation of addition-subtraction. In a similar vein, Burak asserted also under HCK that his students are unable to distinguish the numerator and the denominator in expressions such as 2 in 3. Based on these explanations, it may be observed that the teacher is aware of the difficulties during their learning of the subject of fractions but yet, he fails to take efficient measures on this issue.

The teacher's explanation on the conceptual fallacy his students have on fractions is as follows: '*For example, in the expression 1 in 2, they have a confusion of concepts. They usually can't know where to write the numerator, where to write the denominator and even what a denominator is and what a numerator is. Therefore, I sometimes look if there's a prejudicial mistake. 1 in 4, for instance. They read it the right way but at writing, they write it as 4/1. At times, I ban it in certain classes. I tell them "you'll never call it 1 in 4 but you'll call it 1 stroke 4".'* It is observed that the teacher is aware of the frustration the students have in writing the numerator and the denominator and also, of the expression that leads to this frustration. In the teacher's explanations under HCK, SCK and HCK and also, at observations of his teaching, it was detected that he handles fractions based on the part-whole meaning but when expressing the part-whole meaning, he expresses the part-whole meaning in terms of a quotient. It is considered that one of the causes in the students' difficulty in writing the numerator and the denominator is that the expressions of fractions as presented by the teacher represent different meanings while reading and while writing.

In order to enable a profound assessment of the teacher's answers and to detail them further, exemplary situations on conceptual fallacies the students have on fractions, the teacher was asked to comment on these situations and what sort of solution he would bring to these situations. First of all, fallacies on the notion and representation of fractions were exemplified. The teacher was shown examples of the students' representations of the fraction $\frac{1}{4}$ (Figure 8) and he was asked to comment on these answers.

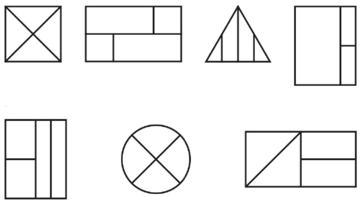


Figure 8. Representations of the fraction $\frac{1}{4}$

Burak's remarks on representations of the fraction $\frac{1}{4}$ are as follows: *'It means that, at teaching the student the notion of fractions, the expression of equal parts wasn't emphasised enough. The kid just looked at whether the whole is divided into 4 parts or not. Yet, checking whether they're equal or not wasn't emphasised. It's either the teacher's fault and he didn't teach that part or the student just missed it. My students wouldn't say such a thing because I emphasise that it should de divided into equal parts.'* This explanation indicates that the teacher is aware of the underlying reason that leads to this conceptual fallacy but he fails to develop an effective solution to overcome this problem.

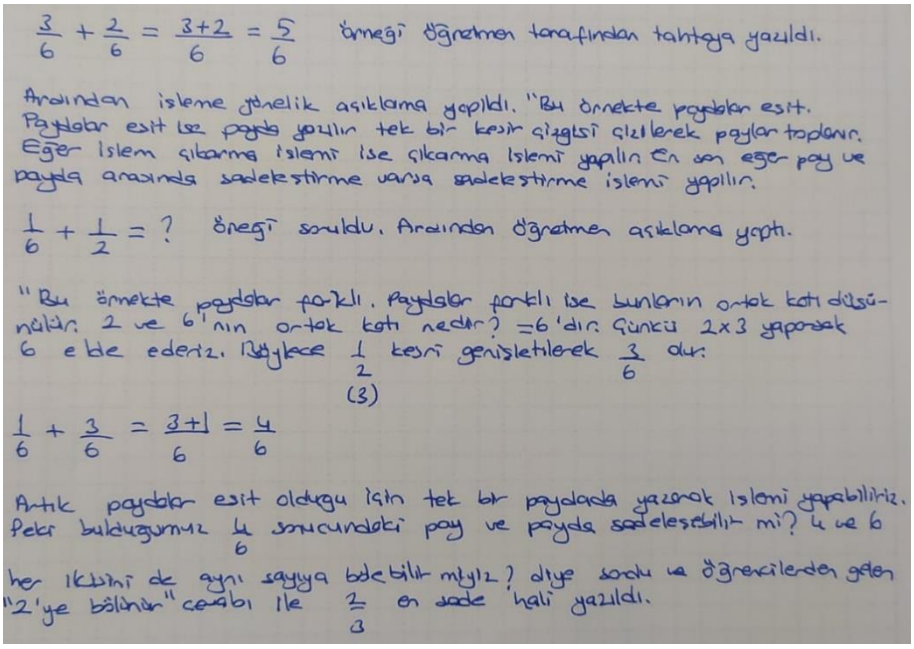
By exemplifying the fallacies the students have in operations with fractions, the teacher was asked to make comments and offer remedies. Burak's remarks on $\left(\frac{13}{5}+\frac{2}{22}=\frac{15}{27}\right)$, the exemplary situation given for addition with fractions are as follows: 'Yes, unfortunately, this happens. *Here, we should specifically ask the student what operation he's applying. The student begins hastily, without even knowing what the operation is. We must make the kid aware of this. It shall be prevented this way.'* Concerning the operation of multiplication with fractions, the teacher was asked of the expression *'Multiplication always makes the multiplied numbers larger and division makes the divided numbers lesser.'* Burak's remarks on this fallacy are as follows: '*Here, it wasn't emphasised. The kid doesn't know how to check the result. He doesn't know how to compare the initial and the final. I, after the kid finishes the operation, do compare them. I make him see what the number was before multiplication and what happened later and how. The result appears that a decimal multiplied with a natural number gives us a result that is either larger or lesser than the natural number. I have the kids comment on these.'* Based on these explanations, we may argue that the teacher is unaware of the underlying conceptual condition of operations with fractions and therefore, he is unable to develop an effective solution. Also under SCK, it was revealed that the teacher is not aware of the underlying conceptual condition of operations with fractions. Based on these findings, given that the teacher is unaware of the underlying conceptual condition of operations with fractions, it may be concluded that the teacher is not efficient in assessing the students' conceptual fallacies and correcting them.

The teacher was asked questions aiming at revealing his awareness of his students' individual characteristics and whether he takes these characteristics into consideration in the teaching process. Burak's explanations were as follows: "*In the 5th grade, there are 3 inclusive students. One of them has dyslexia. That student has no problem in conception. He gets everything; fractions, addition with fractions, all of them. However, we can't have progress with my other 2 students because they have mental problems. They have no capacity to learn. They learn today and tomorrow, they'll forget. There's also a student assigned as gifted but when I show different operations with fractions. I tried to teach some multiplication by mental operation but no, he gets nothing. Therefore, I guess that kid is not gifted or something at all or whatever.'* It is observed that the teacher is aware of the existence of inclusive or gifted students amongst his students in the classroom. Nevertheless, it was observed that the classroom teaching practice had no planning or application specific to these students. For the inclusive student, he is given out-of-class courses as practised at the school and Burak provides assistance education under this scheme. It was observed that the teacher is unaware of his inclusive student's disadvantages and he does not provide him with assistance in the classroom environment.

3.2.2. KCT

Under KCT, it was aimed at assessment of the teacher's knowledge on methodologies and techniques efficient in teaching fractions and revealing his knowledge for teaching on designing subject-specific lessons. For this purpose, the teacher's use of visuals, materials, models, presentations, technological tools and multiple representations specific to teaching fractions was investigated.

The teacher was asked to assess his implementation process for teaching fractions. Burak defined his preferred method of teaching as follows: *'As a method, technically, it is usually that I narrate the subject myself* *and the students solve the questions I give to them.'* In a similar vein, it was also noted at observations of teaching fractions that a teacher-centric teaching is followed. Again, as indicated by the teacher, it was observed that operational practices comprised of solving questions were in abundance (Figure 9).


$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$ örneği öğretmen tarafından tahtaya yazıldı.

Ardından isleme yönelik asıklama yapıldı. "Bu örnekte paydalar esit. Paydalar esit ise payda yazılır tek bir kesir çizgisi çizilerek paylar toplanır. Eğer islem çıkarma islemi ise çıkarma islemi yapılır. En son eğer pay ve payda arasında sadelestirme varsa sadelestirme islemi yapılır.

$\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=?$ örneği soruldu. Ardından öğretmen asıklama yaptı.

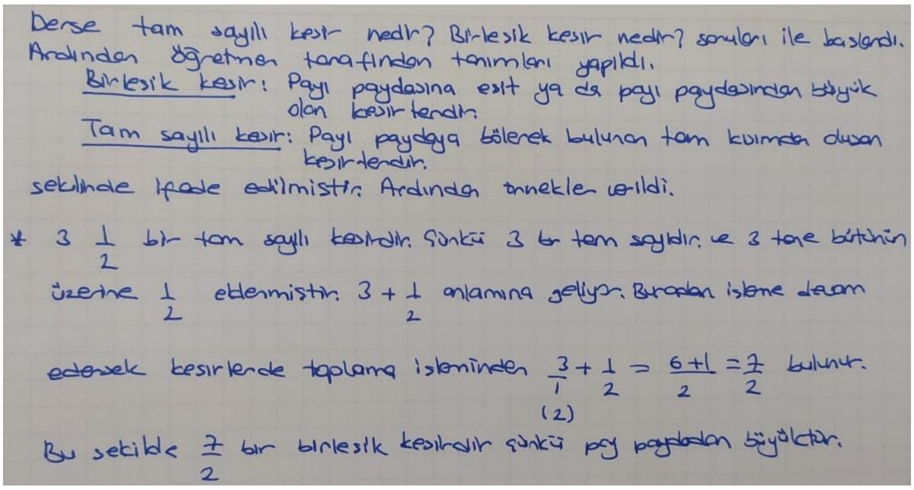
"Bu örnekte paydalar farklı. Paydalar farklı ise bunların ortak katı düsünülür. 2 ve 6'nın ortak katı nedir? =6'dır. Çünkü 2x3 yaparsak 6 elde ederiz. Böylece $\frac{1}{2}$ (3) kesri genisletilerek $\frac{3}{6}$ olur.

$\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{3+1}{6}=\frac{4}{6}$

Artık paydalar esit olduğu için tek bir paydada yazarak islemi yapabiliriz. Peki bulduğumuz $\frac{4}{6}$ sonucundaki pay ve payda sadelesebilir mi? 4 ve 6 her ikisini de aynı sayıya bölebilir miyiz? diye soruldu ve öğrencilerden gelen "2'ye bölünür" cevabı ile $\frac{2}{3}$ en sade hali yazıldı.

Figure 9. Observation note on the operational process

Under HCK, the teacher was asked to define types of fractions but without the techer's definition, they were exemplified on the basis of the classroom practices. At observations on teaching fractions, it was observed that the concepts of mixed fraction, compound fraction and equivalent fraction were merely described and then, operation-based practices were started (Figure 10).


Derse tam sayılı kesir nedir? Birlesik kesir nedir? soruları ile baslandı. Ardından öğretmen tarafından tanımları yapıldı.

Birlesik kesir: Payı paydasına esit ya da payı paydasından büyük olan kesirlerdir.

Tam sayılı kesir: Payı paydaya bölerek bulunan tam kısımdan olusan kesirlerdir.

seklinde ifade edilmistir. Ardından örnekler verildi.

* $3\frac{1}{2}$ bir tam sayılı kesirdir. Çünkü 3 bir tam sayıdır ve 3 tane bütünün üzerine $\frac{1}{2}$ eklenmistir. $3+\frac{1}{2}$ anlamına geliyor. Buradan isleme devam edersek kesirlerde toplama isleminden $\frac{3}{1}+\frac{1}{2}=\frac{6+1}{2}=\frac{7}{2}$ bulunur. (2)

Bu sekilde $\frac{7}{2}$ bir birlesik kesirdir çünkü pay paydadan büyüktür.

Figure 10. Observation note on description of fraction types

In the teacher's explanations on types of fractions, it is observed that he is familiar with definitions of the concepts mixed fraction, compound fraction and equivalent fraction but as he asserted under HCK, he does not apply them by exemplifying in his teaching process. Accordingly, it may be concluded that the teacher possesses knowledge of types of fractions and their representations but does not apply them in his teaching process.

Concerning materials, models and technological tools, Burak gave the following remarks: '*Unfortunately, at our school, we have no materials. We only use pen and the board. I usually draw them I usually draw a whole and shade a part and show the fraction… I don't think using a smart board is beneficial. When may I be using it? At solving questions, perhaps.'* As asserted by the teacher, no use of technological tools was detected during the teaching process. In expressing the part-whole meaning of the notion of fraction, region (area) model was used and in ordering the fractions, the length model was used (Figure 11). Teaching the types of fractions and operations with fractions were taught merely by operational applications.

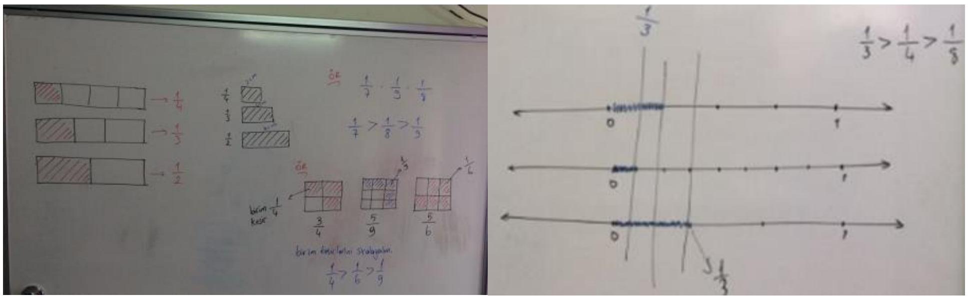


Figure 11. Classroom observation on use of region (area) and length models

It was observed that, at teaching fractions, the teacher prefers a teaching based on plain narration has shortcomings in making use of educational materials and models that enrich the lesson contents. Based on the aforementioned, it is revealed that the teacher is insufficient in knowing and including the methodologies and techniques that may make teaching fractions more efficient, fraction-specific models and tools and materials. Under HCK, it was already asserted that the teacher has insufficient knowledge on fraction models. Accordingly, it is concluded that due to his insufficient knowledge of fraction models, the teacher is barred from using different models in his teaching process.

3.2.3. KCC

It was observed that Burak had planned and implemented his process of teaching fractions on the basis of topics found in the textbook. The teacher was asked certain questions to assess his knowledge on the Mathematics Course Teaching Programme. Burak had the following opinions on achievemnts related to fractions: '*I don't think that the achievements are competent. Those who prepare the programme does never think that they are swapped, reduced and later, they think that an excluded achievement was indeed necessary and include it again. This mean that the programme is inadequate*.' On the other hand, the teacher had the following opinions on planning the teaching of fractions on the basis of achievements found in the programme. '*I really don't care if it's listed in the achievements or not. What the student needs, I give it in an appropriate way. If our purpose is to prepare the kids to advanced studies, when I take a look at feedbacks from my students who had graduated, it is confirmed that my method of teaching the lessons and my practices are appropriate. I see my students placed at a science lycée and he comes to me and says "sir, apparently you had taught us well because we experience no difficulty at all." Therefore, I maintain that I'm doing the right thing. I mean I don't see it merely from the perspective of achievements. I give the something extra, which they may receive. Maybe they're not in the 5th-grade curriculum but I give them as an extra*.'

Athough the teacher, with his words '*I give them as an extra*', maintains that he provides further knowledge; it is observed that he fails to teach even the curriculum achievements in a proper manner. Nevertheless, it was observed that his students are successful in central exams and are placed at good schools. Based on both observations on the process of teaching fractions and the teacher's remarks, we may argue that Burak has insufficient KCC for teaching the subject of fractions. While he gives his successful students as examples, he seems to deliberately disregard his inclusive students who experience learning difficulties. This conclusion draws parallelisms with the result obtained under the teacher's KCS.

It is detected that the teacher does not possess any knowledge of the achievements found in the curriculum and does not plan his teaching process on the basis of targets and achievements. The teacher's incompetent profile under KCC is confirmed by the results obtained under KCS. It is considered that the teacher's failure to use fraction-specific methodologies and techniques identified in the curriculum, to include models, materials or tools in the teaching process, to teach different meanings and by neglecting the conceptual dimension in teaching fractions, the usual application of operational practices based on algorithm may be outcomes of the teacher's insufficient KCC. Because the teacher does not possess sufficient knowledge in this subject, fractions had been taught in 25 class hours, unlike the 35 class hours envisaged by the curriculum. The teacher had ignored the duration assigned in the curriculum to teaching of fractions and passed on to decimals, a different learning sub-domain.

4. Discussion and Conclusion

In this study, a middle-school mathematics teacher's mathematics knowledge for teaching was assessed with its content knowledge and pedgogical content knowledge dimensions. Based on the results obtained from the study, it has been revealed that the content knowledge and pedgogical content knowledge of the teacher is insufficient and concurrently, his MKT is limited.

Under HCK and SCK, it was observed that the teacher participating in the study does not have the required mathematical thinking on fractions and operations with fractions. This condition is also reflected in the teacher's classroom practices. The teacher identifies the notion of fraction only with its part-whole meaning. This does not only show that the teacher's SCK is insufficient but also leads to shortcomings in his HCK and KCT. The teaching process failed to handle the notion of in a complete manner and it was implemented only in the context of the part-whole meaning. Clarke et al. (2008) argue that the failure to teach the students with fractions' division, measure and operator meanings, in addition to the part-whole meaning at elementary-school teaching results in deficient knowledge of students on fractions. It is observed that the teacher also has a limited understanding in operations with fractions. Solutions and explanations the teacher provides on operations are made of memorised, stereotypical expressions. Kinach (2002) argues that explanations the teachers make on operations with fractions usually depend on rules and operations. In studies, it is identified that teachers apply the 'revert and multiply' method at dividing with fractions and they are not able to explain to their students the underlying reason of this arithmetical operation (Holm & Kajander, 2011; Klemer, Rapoport & Lev-Zamir, 2018). Baumert et al. (2010) argued that, in order to have a teacher teach mathematics, it is essential that it is he/she who is required to have a conceptual understanding of mathematics. Accordingly, a teacher's understanding of an operation's conceptual sub-structure and mathematical meaning, beyond his/her ability to apply the operations gains further importance (Kajander & Holm, 2016).

It is observed that the teacher's lack of content knowledge on fractions is also reflected to his pedagogical content knowledge. In their respective studies, Kieren (1993) and Fazio & Siegler (2011) argued that teachers, at defining expressions in the form a/b had made erroneous classifications. In a similar vein, since Burak is ignorant of the different meanings of fractions, he has no clear definition on the notions of fraction, rational number and proportion and he is unable to distinguish them accurately in terms of their similarities and differences. Because the teacher has insufficient content knowledge, operations with fractions had been applied on the basis of algorithm and focussing on the operation. Pantziara and Philippou (2011) indicate that the failure to assign sufficient time to allow conceptual understanding may lead the students to fallacies on the notion of fraction and on operations with fractions. Particularly presenting the operations and algorithms without providing the students with a conceptual meaning leads to an education based on memorisation and the students' learning the fractions by rote (Mok, Cai & Fong-Fung, 2008). Similarly, Hanson (1995) argues that the students' effort of memorising the operations based on algorithm is one of the factors that lead to mistakes and errors. Charalambous and Pitta-Pantazi (2005) argue that the measure meaning of fractions is an important conceptual knowledge in applying the operation of multiplication with fractions. In this study, the teacher's knowledge on the meanings of fractions has been revealed under HCK and it was observed that he is not aware of measure, operator and division meanings and concurrently, he implements a teaching that is only based on the part-whole meaning. It is observed that, due to the teacher's insufficient content knowledge, he lacks the mathematical logic required by the operations he applies and therefore, provides a teaching based on algorithm.

Structuring the teaching on fractions in a way compatible with the students and the knowledge on how to use the representations constitute pedagogical knowledge the teachers are required to have because they affect the students' learning (Kajander & Boland, 2014; Mitchell, Charalambous & Hill, 2014). In the study, it was observed under the participating teacher's content knowledge that he focuses merely on the part-whole meaning of fractions and concurrently, in his teaching, he only presented representations relevant to the pat-whole meaning and used the region (area) model. Similarly, it was observed that the teacher does not make use of fraction-specific materials (such as fraction rods or fraction kits) or tools. Based on the aforementioned results, it is concluded that the teacher has a low KCT. Similarly, in the study by Chestnut-Andrews (2007), it is argued that teachers who have limited pedagogical content knowledge fail to diversify the learning process.

Reckless implementation of the teaching process is one of the reasons to difficulties and mistakes the students experience on the notion of fractions (Reys et al., 1998; Van de Walle et al., 2013). In the curriculum, the fraction ¼ is given as an example to the expression in the form a/b and this was paraphrased with the following words: '*In reading expressions of fractions, expressions that emphasise the part-whole relation are emphasised. For example, the fraction ¼ is read as "one in four" and it is explained that a whole is divided into 4 parts and one of them is taken'* (MoNE, 2018; p. 40). It was observed that, given his insufficient KCC, the participating teacher paid no attention to how the expression of fraction is read. Mistakes the students have in reading of fractions and writing of the denominator and numerator were specifically mentioned. He told that his solution to such mistakes is to use the word '*stroke*.' In the study by Siebert and Gaskin (2006), it is argued that, in expressing fractions, expressions such as 'three stroke four' should be avoided and reading the fraction as 'three in one' will be adequate. The teacher participating in the study maintains tht use of such expression leads to the students' confusion about the numerator and denominator. Nevertheless, at exemplifying the conceptual fallacies his students experience in relation to fractions, Burak could only mention that they do not know where the numerator and denominator would be placed. Similarly, certain studies (Amato, 2005; Siegler, 2003; Soylu & Soylu, 2002) indicate that teachers are unsuccessful in foreseeing the fallacies their students have on fractions. Shulman (1986) argued that the pedagogical content knowledge is effective in identifying and elimination of the students' conceptual fallacies. Based on the study's data, it is concluded that the teacher is not aware of the fallacies his students have and he lacks the sufficient KCS to identify and eliminate them. The teacher's insufficient KCS is also observed in his ignorance of his special-needs students' characteristics and his disregard for their needs. In studies on teachers' knowledge on their special-needs students' characteristics and needs (Brownell, Ross, Colon & McCallum, 2005; Donnely & Watkins, 2011; Savolainen, 2009), it was attested that, in a similar vein, the teachers lack sufficient knowledge for special education, and they implement restrictive practices in their classes. In this study, the participating teacher's lack of sufficient knowledge on the needs of his special-needs students resulted in shortcomings in planning the teaching process according to the needs of these students. It is observed that the teacher has failed to plan his teaching by taking his students' individual characteristics and needs and therefore, he has insufficient KCT in this sense. This result shows that the teacher's level of KCS has also affected his KCT.

It was observed that the teacher participating in the study does not plan his teaching of the lesson contents on the basis of achievements listed in the curriculum. Since the teacher's knowledge of the curriculum is insufficient, the lesson contents were not taught in the context of the targets and achievements designated in the curriculum and teaching methodologies and techniques, models, tools and activities were not applied. This result shows that the teacher's insufficient KCC has affected his KCT. Furthermore, by finishing teaching the fractions and operations with fractions within 25 class periods, the teacher participating in the study had failed to conform to the duration specified in the curriculum. Due to the teacher's insufficient knowledge on achievements found in the curriculum, the conceptual knowledge dimension of fractions as identified in the curriculum was neglected and practices based on algorithm had been implemented. Based on these results obtained from the study, it was concluded that the teacher's insufficient content knowledge in teaching the subject of fractions also restricted his pedagogical content knowledge and this had had a adverse impact on his classroom practice of teaching.

5. Suggestions

Based on the results obtained from this study, it is concluded that bringing the mathematics teachers' content knowledge and pedagogical content knowledge to an adequate level is important. Accordingly, it is considered that the teachers' pre-service (bachelorship studies) and in-service (courses, programmes and the like) education may provide assistance in their content knowledge and pedagogical content knowledge. At professonal development programmes, the subject of fractions that is one of the topics the teachers experience difficulties and mistakes may be emphasised and the subject-matter's attributes and also, the modes of teaching it may be included in the programmes. By providing the teachers with mathematical meanings of the operations with fractions, their understanding of the notion of fractions may be improved. Furthermore, exemplary cases on difficulties and mistakes the students experience in on fractions may be given and their potential causes, as well as remedies may be discussed. Likewise, efficiency of remedies may be evaluated by classroom practices. Teachers may be assisted in learning and using teaching models, materials and tools that can make learning fractions more meaningful and provide enriched opportunities of learning. In professional development programmes, the teachers may be informed on special education and provided knowledge on special-needs students they have in their classes. By this means, their integration of these students in their teaching may also be ensured.

This study had been implemented with a single mathematics teacher. Studies with higher numbers of participants may provide further information on teachers' knowledge of fractions and teaching fractions. This study has assessed MKT in the context of fractions and teaching fractions. Studies on diverse mathematical subjects and concepts may create a comprehensive study network on teachers' MKT. This may present an opportunity to identify the mathematics teachers' knowledge on various learning domains and their shortcomings and therefore, to introduce solutions to such shortcomings.

Appendices

Appendix 1. MKT Interview Questionnaire

Dear sir,
Our interview will be held for the purpose of identifying your opinions on the process of implementation process of teaching fractions. Contents of our interview and your personal data shall be kept strictly confidential an shall not be disclosed to third parties. I will be using a sound recorder to fully record your answers. If you agree, we can begin our interview.

A. Personal data

1. Which faculty did you graduate from?
2. For how many years have you been in service?
3. For how many years have you been assigned at this school?
4. Which grades are those that you teach mathematics?

B. MKT Questions on the Subject of Fractions

B. 1. Subject-Matter Content Knowledge Questions

B. 1. 1. HCK

1. What is a fraction? How would you define the notion of fraction?
2. $\frac{7}{11}$, how do you read this expression?
3. How do you apply operations of addition and subtraction with fractions?
4. How do you apply the operation of multiplication with fractions?
5. How do you apply the operation of division with fractions?
6. Please apply the following operations:

$$\frac{2}{3}x\frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{5}{7} \div \frac{8}{9} =$$

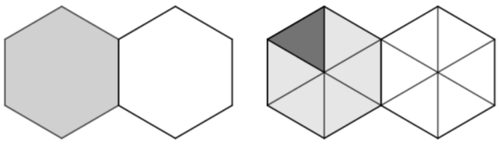
7. How do you apply the operation of division with fractions?

B. 1. 2. SCK

1. In your opinion, which ones among these expressions I will show you are fractions? Can you please provide an explanation for each expression?
2. $\frac{3}{4} \div n$, for which conditions of n can this expression represent a fraction?
3. What is a unit fraction?
4. What is a mixed fraction?
5. What is an equivalent?
6. In fractions, are expressions of equality and equivalence the same?
7. In fractions, why are the denominators equalled to apply an operation of addition or subtraction? What is the mathematical logic underlying this practice?
8. In the operation of division with fractions, what is the mathematical explanation of the expression 'the first fraction stays the same, the second fraction is reversed?'

B.1. 3. HCK

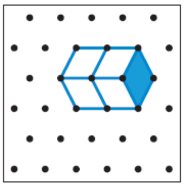
1. Why is learning the fractions important for a student? For learning of which subject does the subject of fractions create a basis?
    - Advanced-level studies
    - Associations with daily life
2. Which meanings do fractions have?
    - Association with rational numbers
    - Percentage
    - Decimals
3. Can you please explain what do the fractions in the expressions I will read to your express?
    - 3 in 5 of a class
    - How many 1/8 fractions would we use to obtain the fraction of 5 in 8?
    - Comparison of the number of girls in a class to the number of boys in the class
    - Distributing 7 cookies to 9 students
    - 1 in 4 of a land plot with a surface area of 50 m^2
4. The figure has the expression of a fraction represented with pattern blocks. Which operation do you think is represented?



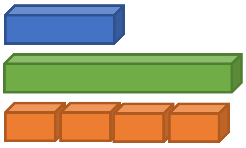
5. Find $\frac{1}{6}\ of\ \frac{2}{3}$.

6. Please explain what the representations in the shape express.

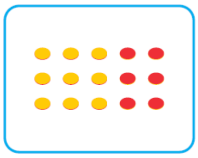
$\frac{1}{5}$ fraction's expression;



Expression of the operation $\frac{1}{2} \times 4 = 2$;
Green rod: 1 unit
Blue rod: 1/2 units
Orange rod: 1/4 units



$\frac{6}{9}$ expression;

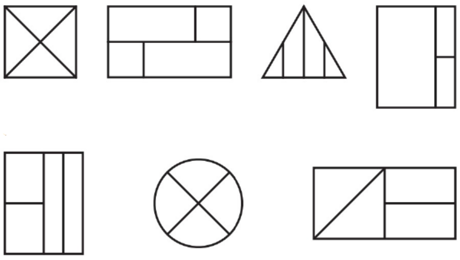


7. Which representation do you use in teaching fractions?
8. In your opinion, which representation is adequate for each level?

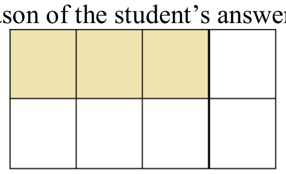
C. Pedagogical Content Knowledge

C. 1. KCS

1. What kind of difficulties do students experience in learning fractions?
2. Do you have any measures taken against these difficulties? If yes, which are these?
3. Which conceptual fallacies do the students maintain for fractions?
4. Of the shapes I will show you, a teacher asked 'which represents ¼?' and a student answered 'all of them.' Please assess the student's answer. What would be your explanation to a student who gives this answer?



5. Assess a student's solution to the operation $\frac{13}{5} + \frac{2}{22} = \frac{15}{25}$. What can be the reason the student did this? How would you explain it to the student?
6. Assess the answer of a student who says '*Multiplication always makes the multiplied numbers larger and division makes the divided numbers lesser*.'
7. For the shape I will show to you, the student's answer was $\frac{3}{5}$. Assess the student's answer. Is it correct/false or is it acceptable? What can be the underlying reason of the student's answer?



8. At teaching, which characteristics of our students do you take into consideration?
   - Inclusive;
   - Learning difficulty;
   - Gifted etc.

C. 2. KCT

1. What are the techniques and methods you use in teaching fractions?
2. Do you have any materials you use in teaching fractions? If yes, which are these?
3. Do you benefit from technological tools? If yes, how?
4. Do you have any representations you use in teaching fractions? If yes, which are these?

C. 3. KCC

1. Do you think the achievements in the subject of fraction sufficient?
2. What are your opinions on progress of the achievements?

Appendix 2. Observation Form

Date:

1. How was the fraction defined?
2. How was the fraction expression read?
3. How were the types of fractions defined?
   Unit fraction;
   Mixed fraction;
   Equivalent fraction;
4. How were operations (addition, subtraction, multiplication and division) with fractions defined and applied?
5. Were different meanings of fractions given?
6. Were multiple presentations of fractions made?
7. Does he know the targets and achievements relevant to fractions?
8. Is the teaching implemented in line with the targets and achievements?
9. Was the students' existing knowledge revealed?
10. Were the students' difficulties and conceptual fallacies identified? Were measures against potential difficulties and mistakes taken?
11. Was the teaching implemented in a customised manner adequate for the students' individual characteristics?
12. Were associations with other meanings of fractions made?
13. Were associations of the subject-matter with daily life or other disciplines made?
14. Which methods and techniques were used? Were technological tools, materials or models used?
15. How was assessment and evaluation applied?

Other remarks:

Ethics Committee Approval Information: Ethics committee approval was obtained from Yozgat Bozok University, Project Coordination Application and Research Center Directorate Ethics Committee for the research, with the date of April 30, 2020 and protocol number E.10353.

Ortaokul Matematik Öğretmeninin 5. Sınıf Kesirler Konusundaki Öğretme Bilgisinin İncelenmesi

1. Giriş

İyi bir öğretim sürecinin gerçekleştirilmesinde, öğretmenlerin öğretimini gerçekleştireceği konuya ilişkin derin bilgiye sahip olmaları gerekmektedir (Fernandez, 2005). Yeterli bilgi ve beceriye sahip olmayan öğretmenler öğrencilerinin öğrenmelerinde de etkili ve verimli olamamaktadırlar (Ball, Thames ve Phelps, 2008). Öğretmenlerin sahip oldukları bilgi ve beceriler eğitim ve öğretimin kalitesini etkileyen önemli unsurlar arasındadır. Bu doğrultuda öğretmenlerin sahip oldukları öğretme bilgisinin önemi ortaya çıkmaktadır (Hill, Ball ve Schilling, 2008). Öğretmenlerin öğretim içeriğini oluşturan konuya ilişkin bilgi sahibi olmaları, bu bilgiyi etkili bir şekilde öğrencilerine aktarmada kullanabilecekleri yöntem ve teknikleri bilmeleri, her öğrenciye uygun eğitimi verebilmede sahip olmaları gereken bilgi ve beceriler alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi olarak karşımıza çıkmaktadır (National Council of Mathematics [NCTM], 2000).

Matematik öğretme bilgisinde alan bilgisi, öğretmenlerin matematiksel kavramlara ilişkin sahip oldukları derinlemesine bilgidir (Mishra ve Koehler, 2006). Pedagojik alan bilgisi, öğretmenlerin matematiksel kavramlara yönelik anlayışları ile öğretim içeriğine yönelik sahip olukları pedagojik bilgiyi birbirine bağlar. Pedagojik alan bilgisinde, alan bilgisi önkoşul olmak üzere bir konuyu öğretmeye özgü sahip olunan öğretme bilgisidir (Depaepe, Verschaffel ve Kelchtermans, 2013). Pedagojik alan bilgisi, öğretim içeriğini etkili kılacak materyallerin ve modellerin kullanılması, fikirlerin temsil edilmesi (benzetme, açıklama, gösterim, örnek verme, vb.) ve bu temsillerin öğrenciye uygun şekilde uyarlanmasını sağlayan pedagojik yöntem ve tekniklerin seçilmesini sağlayan bilgi ve beceridir (Shulman, 1987).

Matematik konu alan bilgisi, ortaokul matematik öğretmenlerinin matematik ders içeriğinin temelini oluşturmaktadır (Ferrini-Mundy ve Findell, 2001). Bununla birlikte matematik öğretmenlerinin sahip oldukları matematik bilgisini sınıflarında etkili bir şekilde yansıtmalarında pedagojik alan bilgileri etkili olmaktadır. Matematik öğretmenlerinin öğretme bilgisini ortaya koyan çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların öğretmenlerin ilgili konuya ilişkin sahip oldukları bilgilerini ortaya koyan alan bilgisi ve öğretimlerini şekillendiren pedagojik alan bilgisine yönelik olarak sınıflandırıldığı görülmektedir. Matematik öğretmenlerinin alan bilgisine yönelik yapılan çalışmalarda öğretmenlerin alan bilgisi ile öğrencilerin matematik başarısının yakından ilişkili olduğu ortaya konulmuştur (Ball, Lubienski ve Mewborn, 2001; Hill, Sleep, Lewis ve Ball, 2007). Bu araştırmalar öğretmen bilgisinin artması sayesinde öğrenci başarısının da artacağı yönünde ilişkiyi vurgulamıştır. Pedagojik alan bilgisine yönelik gerçekleştirilen çalışmalarda ise alan ve pedagoji arasında bağlantılar kurularak öğretmenlerin matematik bilgisi kavramı genişletilmiştir. Bu çalışmalarda öğrencilerin öğrenmelerinde ve matematiksel bilgiyi kavramsallaştırmalarında öğretmenlerin pedagojik alan bilgilerinin önemli olduğu görülmüştür (Baumert ve ark., 2010; Kleickmann ve ark, 2013). Benzer şekilde Joutsenlahti ve Perkkila (2019) çalışmasında bir öğretmenin matematik alan ve pedagojik alan bilgisinin yetersiz olması durumunda matematiği yalnızca "kurallar" ve "prosedürler" olarak göreceğini vurgulamıştır. Bu durumda öğretmen matematik öğretiminde temel kavram ve yapıları anlamaya çalışmadan kural ve prosedürleri uygulama, hesaplama ve işlem yapmada ustalaşmayı hedeflemektedir (Petocz ve Reid, 2003).

Matematiği öğretme bilgisinin önemi ortaya konuldukça, matematik içerisinde yer alan öğrenme alanlarına yönelik öğretmenlerin öğretme bilgisinin incelenmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır. İlkokuldan ortaokula geçerken matematiğin soyut doğasından kaynaklı öğrencilerin ve öğretmenlerin bazı kavramlara ilişkin zorluk yaşadıkları görülmektedir. Bu konuların başında kesirler gelmektedir (Işıksal ve Çakıroğlu, 2011). Kesirler hem öğrenciler hem de öğretmenler tarafından anlaşılmakta zorlanılan konular arasındadır (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992; Li ve Kulm, 2008; Ma, 1999; Simon, 1993; Tirosh, 2000; Zhou, Peverly ve Xin 2006). Yaşanılan bu zorlukların sebepleri arasında kesir öğretiminin kavramsal boyutunun eksik kalması yatmaktadır (Ma, 1999). Bu zorluklar arasında kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerin ezbere yapılması ve işlemlerin matematiksel mantığının bilinmemesi yer almaktadır (Davis, 2003; Tirosh, 2000). Kesirlerle işlemlerde "toplama işleminde paydalar farklı ise eşitlenir, bölme işleminde birinci kesir aynen yazılır, ikinci kesir ters çevrilir çarpılır" gibi ezberlenmiş bilgilerin uygulaması sıkça gerçekleştirilmektedir. Bu duruma sebep etkenler arasında öğretmenlerin konuya ilişkin matematiksel bilgiyi bilmemeleri ve matematiksel algoritmaları ezberlemeye dayalı öğretim gerçekleştirmeleri yer almaktadır (Işıksal ve Çakıroğlu, 2011; Joyner, 1994; Khoury ve Zazkis, 1994, Tirosh, 2000). Matematiksel algoritmalar sorunun çözümünü kolaylaştıran adımlar olmasına rağmen, kavramsal olarak matematiksel düşünce ile bağlantı kurulmadığında ezbere dayalı eksik öğrenmeye sebep olmaktadır (Klemer, Rapoport ve Lev-Zamir, 2018). Bu tür algoritmaya dayalı öğrenmeler öğrencilerin kendi düşüncelerini geliştirmelerine ve anlamlı öğrenmelerine engel olmaktadır (Hanselman, 1997; Kamii ve Dominick, 1998). Öğrencilerin algoritmaları ezberlemeye dayalı öğrenmeleri sonucunda bazı hatalar ve kavram yanılgıları meydana gelmektedir (Klemer, Rapoport ve Lev-Zamir, 2018). Öğrencilerin anlamakta zorlandıkları ve çeşitli yanılgılara sahip oldukları kavramların öğretimlerinde öğretmenlere büyük sorumluluk düşmektedir (Hill ve

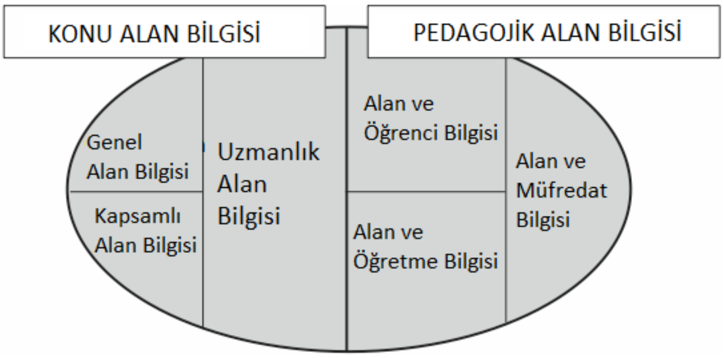
Ball, 2004). Öğrenim ve öğretimin etkili uygulaması doğrudan öğretmenin mesleki yeterliliği ile ilişkilidir (Tanışlı ve Köse, 2013). Bu bağlamda kesirlerin öğretimi konusunda matematik öğretmenlerinin sahip oldukları öğretme bilgisinin önemi ortaya çıkmaktadır.

Kesirler konusunda öğretmenlerin sahip oldukları öğretme bilgisine yönelik yapılan çalışmalarda (Behr, Harel, Post ve Lesh, 1992; Eli, Mohr-Schroeder ve Lee, 2013; Işık ve Kar, 2012; Lo ve Luo, 2012; Klemer, Rapoport ve Lev-Zamir, 2018; Ma, 1999; Ölmez ve Izsak, 2020; Özel, 2013; Sahin, Gökkurt ve Soylu, 2016; Simon,1993) matematik öğretmenleri tarafından matematiksel gösterimlerin anlamlandırılmasında, kavramsal boyutun derinleştirilmesinde, akıl yürütme ve ispat yapmada, çoklu temsillerin ve problem türlerinin kullanılmasında eksikliklere sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu çalışmalar ışığında matematik öğretmenlerinin kesir kavramına yönelik alan bilgilerinin, kesir öğretimini gerçekleştirmelerinde etkili olan pedagojik alan bilgilerinin ve bunlar arasındaki ilişkilerin incelenmesi önem kazanmaktadır.

1.1. Teorik Çerçeve

Eğitimin niteliği ve kalitesinde en önemli unsur olan öğretmenlerin sahip olması gereken bilgi ve beceriler birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bu araştırmalar ilk olarak öğretmenlerin neyi bilmesi gerektiğine odaklanmıştır (Ball, Lubienski ve Mewborn, 2001; Begle, 1979; Monk, 1994; Rowan, Chiang ve Miller, 1997). Bu araştırmaların ardından öğretmenlerin sınıf içi öğretimlerinde etkili olacak unsurlara yönelik çalışmalar yapılmış ve öğretme bilgisi çeşitli şekilde sınıflandırılmıştır (Grossman, 1990; Magnusson, Krajcik ve Borko, 1999; Shulman, 1986, 1987). Shulman (1986) öğretmenin sahip olması gereken alan bilgisini; a) konu alan bilgisi, b) pedagojik alan bilgisi ve c) öğretim programı bilgisi olarak sınıflandırmıştır. Konu alan bilgisi, bir disipline ait temel kural ve kavramları bütünleştirebilme, geçerli ve doğru olma/olmama durumlarını ayırt edebilme bilgisidir. Pedagojik alan bilgisi, öğrencilerin konuya ilişkin yaşadıkları zorluklara ve alan bilgisinde yer alan kural ve kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlayan temsil biçimlerine (analoji, açıklama, resim, vb.) ilişkin sahip olunan bilgiyi tanımlamaktadır. Öğretim programı bilgisi, ilgili konuya ilişkin amaç ve hedeflerin, ilişkili olduğu öncesi ve sonrası konuların bilinmesi, uygun öğretim teknik ve yöntemlerin kullanılması, konuya özgü etkili materyal seçimine ilişkin sahip olunan bilgiyi kapsamaktadır (Shulman, 1986).

Shulman (1986) tarafından pedagojik alan bilgisine yönelik yapılan tanımlama matematik eğitimi araştırmacıları tarafından (Ball, Thames ve Phelps, 2008; Hill, Schilling ve Ball, 2004; Hill, Rowan ve Ball, 2005) matematik öğretimi için özelleştirilerek öğretme için alan bilgisi (ÖAB) ve öğretme için matematik bilgisi (ÖMB) olarak yapılandırılmıştır. Shulman (1986) tarafından tanımlanan öğretme bilgisine ilişkin sınıflandırma Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından matematik öğretimi için özelleştirilmiş ve ÖMB sınıflandırması detaylandırılmıştır (Şekil 1). ÖMB'de matematik öğretmeninin sahip olması gereken öğretme bilgisi konu alan bilgisi kapsamında; a) genel alan bilgisi (GAB), b) uzmanlık alan bilgisi (UAB), c) kapsamlı alan bilgisi (KAB) alt başlıkları ile sınıflandırılmıştır. Pedagojik alan bilgisi ise; a) alan ve öğrenci bilgisi (AÖB), b) alan ve öğretim bilgisi (AÖtB), c) alan ve müfredat bilgisi (AMB) olarak gruplandırılmıştır.



Şekil 1. Öğretme İçin Matematik Bilgisi Modeli (Ball, Thames ve Phelps, 2008)

GAB, matematiksel kavram, kural ve ilkelere yönelik bilgiyi içermektedir (Ball ve ark., 2008). Bu bilgi derin matematiksel anlayış gerektirmeyen temel düzey bilgidir. Matematiksel dil ve terminolojiyi doğru kullanma, öğrenci yanıtlarını doğru, yanlış ve eksik olarak ayırt edebilme bu kapsamda yer almaktadır. UAB, matematik öğretimine özgü matematiksel bilgiyi içermektedir. Matematiksel düşüncenin mantığını ve gerçekleştirilen matematiksel işlemlerin kavramsal alt yapılarındaki matematiksel fikirleri bilme ve neden-sonuç ilişkisi içerisinde açıklamayı içermektedir. Etkin öğretimin gerçekleştirilmesinde gerekli olan ve öğrencilerin yanıtlarını matematiksel olarak yorumlayarak doğru veya yanlış olduğuna karar verebilmeyi gerektirmektedir. KAB, farklı matematiksel konuların birbirleriyle olan ilişkilerinin ve sebeplerinin farkına varılmasını içermektedir. KAB, Shulman (1986)'ın geliştirmiş olduğu sınıflandırmada öğretim programı kapsamında yer alan yatay ve dikey müfredat bilgisi ile paralellik göstermektedir. Yatay müfredat bilgisi, öğretmeninin öğretimini gerçekleştirmiş olduğu konuya yönelik diğer alanlarla ilişkisini bilmesidir. Dikey müfredat bilgisi, öğretmenin öğretim yaptığı konuyu sınıf düzeyi ile sınırlı kalmayıp önceki ve sonraki sınıf seviyeleri ile bütünsel olarak ele almasıdır. AÖB, öğretmenin öğrencilerinin sahip olduğu matematik bilgi ve becerileri hakkında bilgi sahibi olması ve bu doğrultuda öğrencilerin bireysel özelliklerine ve konuya özgü öğretim tekniklerine ilişkin bilgisini içermektedir. AÖB, öğretmenin öğrencilerinin yaş, hazırbulunuşluk, öğretilen kavrama ilişkin yaşadıkları zorluk ve yanılgılarını bilmesini, öğrencilerin bireysel özelliklerini gözeterek uygun öğretimi planlayabilme bilgisini kapsamaktadır. AÖtB, öğretmenin matematik öğretme tekniklerini bilmesi ve konuya özgü ders tasarlayabilme bilgisidir. Öğretmenin konuya özgü görsel, materyal, model, gösterim, teknolojik araç-gereç ve çoklu temsilleri kullanması, konunun amacına en uygun olacak örnek ve matematiksel dil kullanımı AÖtB bileşeninde yer alan bilgilerdir. AMB, öğretmenin sorumlu olduğu müfredata hâkim olması, müfredatta yer alan kazanımlar çerçevesinde dersini planlaması, programda belirtilen öğretim tekniklerini kullanması ve amaca uygun hareket etmesi, müfredata uygun materyal seçme, matematik müfredatının diğer alanlarla (fen bilimleri, sosyal bilgiler, vb.) ilişkisini bilmesini içermektedir. Bu modelle birlikte öğretmenlerin matematik öğretme bilgilerinin ölçülmesi, alan ve pedagojik alan bilgilerinin, becerilerinin belirlenmesi önem kazanmıştır (Aslan-Tutak ve Köklü, 2016). Bir öğretmenin matematik öğretimine yönelik sahip olduğu öğretme bilgisi öğrencilerin bilgi ve becerilerinde oldukça etkilidir (Morris, Hiebert ve Spitzer, 2009). Bu doğrultuda matematik öğretmenlerinin matematik öğretme bilgilerinin belirlenmesi alan yazına önemli katkılar sunacaktır.

Öğretmenlerin matematik öğretme bilgisinin incelendiği çalışmalarda, kesirleri tanımlamada yetersiz bilgiye sahip oldukları ortaya konulmuştur (Fazio ve Siegler, 2011; Kieren, 1993). Kesir kavramı Niven (1961) tarafından pay ve paydadan oluşan cebirsel ifade olarak tanımlanmaktadır (akt., Yanık, 2013). Bu tanıma dayalı olarak bir kesrin sonsuz sayıda gösteriminin olduğu anlaşılmaktadır (Yanık, 2013). Lamon (2007) kesirleri, a/b şeklinde yazılabilen pozitif ifadeler olarak tanımlamıştır. Kesirlerin anlaşılmasında, temsil edilen ifadenin anlaşılması gerekmektedir (Van de Walle, Karp ve Bay-Williams, 2013). Kesirler parça-bütün, ölçme, bölme, oran ve işlemci anlamları ile karşımıza çıkmaktadır (Lamon, 2007). Kesirlerin parça-bütün anlamı, bir bütünü eşit parçalara ayırma işlemini içermektedir. a/b ifadesinin parça-bütün anlamı, b eşit parçaya bölünmüş bir bütünün a parçasını temsil etmektedir. Ölçme anlamı, bir ölçüm işlemini ifade etmeyi tanımlamaktadır. a/b ifadesinin ölçme anlamı, a tane 1/b birimlik ölçüyü temsil eder (Yanık, 2013). Bölme anlamı bir bölme işlemini göstermektedir. a/b ifadesinin bölüm anlamı, a'nın b'ye bölümünde ulaşılan sonucu belirtir (Kieren, 1993). Oran, aynı ya da farklı ölçme uzaylarına ait çoklukların karşılaştırılmasıdır (Smith, 2002). Bu oran, parça-parça ya da parça-bütün olabilir (Van de Walle ve ark., 2013). a/b ifadesinin oran anlamı, a parçasının b parçasına ya da a parçasının b parçaya ayrılmış bütüne oranı şeklinde ifade edilebilir. Kesirlerin işlemci anlamı ise çarpma kuralını belirtir (Toluk, 2002). Örneğin, 3'ün 2/5'si şeklindeki ifadede 2/5 kesri çarpma işlemini belirtmektedir. Kesirlerin öğretiminde özellikle ilkokul düzeyinde ve ders kitaplarında çoğunlukla kesirlerin parça-bütün anlamı vurgulanmaktadır (Van de Walle ve ark., 2013). Bu durum öğrencilerin kesirlerin farklı anlamalarının da olabileceği konusunda zorlanmalarına sebep olmaktadır. Siebert ve Gaskin (2006) kesir öğretiminin ilk aşamalarında öncelikle parça-bütün anlamının verilmesinin ardından diğer anlamlarının da verilmesinin gerektiğini belirtmektedir. Kesirlerin farklı anlamlarının fark ettirilmesiyle öğrencilerin kesir anlayışlarının gelişmesine fırsat sunulmaktadır (Clarke, Roche ve Mitchell, 2008; Siebert ve Gaskin, 2006).

Öğrencilerin kesirlere yönelik kavramsal anlamalarının sağlanmasında kesir modellerinin kullanımı önerilmektedir (Siebert ve Gaskin, 2006). Kesirler; bölge (alan), uzunluk ve küme modelleri ile temsil edilmektedirler (Van de Walle ve ark., 2013). Bölge (alan) modeli, kesirlerin parça-bütün anlamını bir alanın ya da bölgenin parçasının temsil edilmesiyle göstermektedir (Cramer, Wyberg ve Leavitt, 2008; Kieren, 1976; Wu, 2011). Genellikle daire ya da dikdörtgen şekli kullanılmaktadır. Kesrin paydası kullanılan şeklin kaç eşit parçaya bölündüğünü, payı ise taralı olan kısmı temsil eder. Kesirlerin gösterimi ve kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerin temsilinde çoğunlukla bölge (alan) modeli kullanılır (Baek ve ark., 2017; Webel ve DeLeeuw, 2016). Uzunluk modeli, kesirlerin büyüklerinin temsil edilmesinde kesir şeritleri veya çubuklarının kullanılmasıdır (Siegler ve ark., 2010). Kesirlerin büyüklük gösteriminde kullanılan uzunluk modellerinden biri de sayı doğrusudur (Kieren, 1976; Moss ve Case, 1999). Kesirlerin hem bir sayı olduğunun kavranmasında hem de sıralamasında sayı doğrusu kullanımı önerilmektedir (Clarke ve ark., 2008; Flores, Samson ve Yanık, 2006). Kesir gösteriminde kullanılan bir diğer model ise küme modelidir. Bütünü oluşturan bir grup nesneyi temsil eden küme ve bu kümenin bazı elemanlarının farklı özelliklerini göstermek için kesir kullanılır. Kesir modellerinin kullanımı ile kesirlerin sembolik ifadelerinin ötesinde kavramsal olarak anlaşılması ve kavrama yönelik anlamlı öğrenmenin desteklenmesi sağlanmaktadır (Fazio, DeWolf ve Siegler, 2016; Fuchs ve ark., 2013; Kellman ve ark., 2008; Van de Walle ve ark., 2013). Bunun yanı sıra öğrencilerin öğrenmelerini destekleyen kesir modellerinin, öğretmenler tarafından yeteri kadar kullanılmadığı ve kullanımı konusunda zaman ayırmadıkları görülmektedir (Van de Walle ve ark., 2013).

Yapılan çalışmalar öğrencilerin kesir kavramını anlama düzeylerinin düşük olduğunu göstermektedir (NCTM, 2000; Sowder ve Wagne, 2006). Öğrencilerin kesir kavramına ilişkin eksik anlayışları kesirlerle işlemlerin gerçekleştirilmesinde, ondalık gösterim ve yüzde kavramlarının anlaşılmasında ve ilişkili olduğu diğer öğrenme alanlarında (cebir, oran ve orantı, rasyonel sayılar) da zorlanmalarına sebep olmaktadır (Bailey, Hoard, Nugent ve Geary, 2012; National Mathematics Advisory Panel [NMP], 2008; Siegler ve ark., 2010).

Kesir kavramı sadece öğrencilerin değil öğretmenler tarafından da zorluk yaşanan kavramlardan biridir (Luo, Lo ve Leu, 2011; Ma, 1999; Merenluoto ve Lehtinen 2004; Obersteiner ve ark., 2013; Vamvakoussi, Van Dooren ve Verschaffel, 2012; Van Dooren, Lehtinen ve Verschaffel, 2015). Yapılan çalışmalarda öğrencilerin doğal sayılarda gerçekleştirilen işlemlerin özelliklerini kesirler konusuna aşırı genellemede (toplama/çıkarma işlemi özelliğinden yola çıkarak pay ve paydaları kendi arasında toplama/çıkarma, toplama işleminin özelliğini çarpma işlemine uygulama) bulunarak zorluk yaşadıklarını göstermektedir (McMullen ve ark., 2015; Van Dooren ve ark., 2015; Vamvakoussi ve Vosniadou, 2004). Doğal sayılarda gerçekleştirilen işlemlerin aşırı genellenmesi sonucu öğrencilerin kesirlere ilişkin kavram yanılgısına sahip olmalarına neden olmaktadır. Öğrencilerin kesirler konusunda zorluk yaşamalarının ve kavram yanılgılarına sahip olmalarının sebepleri arasında öğretmenler tarafından algoritmaya dayalı öğretim yapılması ve öğrencilerin de bu algoritmaları ezberlemeye çalışmaları yer almaktadır (Hanson, 1995; Pantziara ve Philippou, 2011). Bu doğrultuda, öğrencilerin öğrenmekte zorluk yaşadıkları ve diğer öğrenme alanlarına ilişkin öğrenmelerini de etkileyen kesirler kavramına yönelik öğretmenlerin kesirleri öğretme bilgilerinin ortaya konulmasının önemi ortaya çıkmaktadır. Bu amaçla çalışmada aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır:

3. Ortaokul matematik öğretmeninin kesirler konusuna ilişkin konu alan bilgisi nasıldır?
4. Ortaokul matematik öğretmeninin kesirler konusuna ilişkin pedagojik alan bilgisi nasıldır?

2. Yöntem

Çalışmada bir ortaokul matematik öğretmenin kesirler konusuna ilişkin ÖMB'sinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu bağlamda çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden bütüncül tek durum deseni benimsenmiştir. Durum çalışmaları, gerçek yaşamda yer alan olay "özel durum" incelemelerinin gerçekleştirildiği çalışmalardır. Özel durum kişi, program, sınıf, okul gibi örnek durumlar olabileceği gibi bir sürece yönelik de gerçekleştirilebilir (Fraenkel ve Wallen, 2009). Bütüncül tek durum, tek bir duruma (bir birey, bir program, vb.) yönelik yapılan çalışmalardır (Yin, 2003). Bu çalışmada, tek bir öğretmen ile çalışma gerçekleştirilerek ÖMB bileşenlerinin her boyutunun derinlemesine incelenme olanağı sağlanmıştır.

2.1. Katılımcılar

Çalışma, Yozgat Bozok Üniversitesi Etik Komisyonu'nun 22.04.2020 tarih ve 09 sayılı toplantısında almış olduğu kararla gerekli yasal izinler alınarak gerçekleştirilmiştir. Etik kurul onayının yanı sıra çalışmada yer alacak öğretmen ile görüşülmüş ve uygulama içeriği detaylı olarak anlatılmıştır. Öğretmen çalışmaya gönüllü olarak katılmıştır.

Çalışmada yer alacak öğretmenin belirlenmesi amaçlı örnekleme yoluyla olmuştur. Merkez ilçede yer alan ortaokullardan 5. 6. 7. ve 8. sınıflarda derse giren ve 5. sınıfında özel eğitim (kaynaştırma, üstün zekalı ve yetenekli) öğrencisi olan bir öğretmen seçilmiştir. Öğretmenin sahip olması beklenen kriterlerin belirlenmesinde öğretme bilgisi unsurları göz önünde bulundurulmuştur. Çalışmada 5. sınıf kesirler konusuna odaklanılırken öğretmenin ileri müfredat konularına hâkim olması sayesinde ilişkilendirme yapabilme olanağının olduğu göz önünde bulundurulmuştur. Bir diğer kriter olan sınıfında özel eğitim öğrencisi bulunması sayesinde ise öğretim sürecinde öğrencilerin bireysel özelliklerini göz önünde bulundurma ve öğretimini şekillendirme ve çeşitlendirme unsurlarına yönelik sorgulamaya olanak sağlanmıştır. Bu bağlamda ilgili özellikleri taşıyan ortaokul matematik öğretmeni belirlenmiş ve çalışmaya katılmaya gönüllü olması ile çalışma gerçekleştirilmiştir.

Çalışmada yer alan matematik öğretmeninin kimliğinin gizliliği açısından takma isim olarak Burak kullanılmıştır. Burak öğretmen; bir devlet üniversitesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği programından 2013 yılında mezun olmuştur. Şu an çalışmakta olduğu ortaokulda 7 yıldır görev yapmakta ve 5. 6. 7. ve 8. sınıfların matematik derslerini yürütmektedir.

2.2. Veri Toplama Araçları

Çalışmada veri toplama amacı ile bireysel görüşme ve gözlem araçları kullanılmıştır. Burak öğretmenin alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi ilk olarak bireysel görüşme yapılarak ardından sınıf içi gözleme dayalı karşılaştırmalar yolu ile ortaya konulmuştur.

2.2.1. Görüşme

Bireysel görüşme, Burak öğretmen ve araştırmacı arasında, araştırmacı tarafından hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme formu ile gerçekleştirilmiştir. Görüşme formu, ÖMB doğrultusunda hazırlanmış ve öğretmenin kesirler konusuna ilişkin konu alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisine ilişkin iki ana kısımdan oluşmaktadır. Konu alan bilgisi kapsamında; i) genel alan bilgisi, ii) uzmanlık alan bilgisi, iii) kapsamlı alan bilgisi alt boyutları, pedagojik alan bilgisi kapsamında ise; i) alan ve öğrenci bilgisi, ii) alan ve öğretim bilgisi, iii) alan ve müfredat bilgisi alt boyutlarına ilişkin sorulara yer verilmiştir. Görüşme formu araştırmacı tarafından

40 soruluk taslak form şeklinde hazırlanmış ardından matematik eğitiminde uzman iki araştırmacının görüşlerine başvurulmuştur. Taslak formun uzman eğitimciler tarafından içerik ve kapsam konusundaki değerlendirilmesi sonucu ortak görüşler doğrultusunda 36 soruluk son hali verilmiştir. Öğretmen ile gerçekleştirilecek görüşmenin eksiksiz ve doğru bir şekilde yürütülebilmesi için görüşme ilk olarak farklı bir matematik öğretmeni ile gerçekleştirilerek görüşme süreci denenmiştir. Son hali verilen görüşme formu (EK-1) kullanılarak öğretmen ile bireysel görüşme yaklaşık 20 dakikalık iki oturum şeklinde gerçekleştirilmiştir. Bireysel görüşme, Burak öğretmenin kesirler öğretimi öncesinde gerçekleştirilmiş ve öğretmenin görüşme içeriğinden etkilenmemesi ve öğretimine etkide bulunmaması amacıyla kesirler konusundan üç ay önce gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen bireysel görüşme öğretmenin de izni alınarak ses kaydına alınmıştır. Bu sayede veri kaybının önlenmesi sağlanmıştır.

Görüşme Formu: Kesirlere yönelik ÖMB görüşme formu 6 alt kategoriden oluşmaktadır. Bu sorular ÖMB kategorileri ve içeriğine göre hazırlanmıştır. Görüşme formu içeriği;

Konu Alan Bilgisi

4. GAB: Kesirler konusunda öğretmenin genel olarak sahip olması gereken bilgilere yönelik sorulardan oluşmaktadır. Kesir ifadesinin tanımlanması ve kesirlerde işlemlerin gerçekleştirilebilmesine yönelik 6 sorudan oluşmaktadır.
5. UAB: Kesir kavramının her boyutuyla (farklı anlam, gösterim) incelendiği ve kesirlerde gerçekleştirilen işlemlerin matematiksel mantığına dayalı sorulardan oluşmaktadır. Bu kategoride 8 soru yer almaktadır.
6. KAP: Yatay ve dikey müfredat bilgisi olarak iki alt kategoriden oluşmaktadır. Yatay müfredat bilgisi kapsamında kesir konusunun farklı disiplinlerdeki, günlük hayattaki ve matematik konularının kendi içerisindeki ilişkisini ortaya çıkarmaya yönelik sorulardan oluşmaktadır. Dikey müfredat bilgisi kapsamında ise müfredat programında kesir öğretiminin ilişkili olduğu önceki konular, temel oluşturduğu ileri sınıf konuları, kesir kavramının geniş kapsamlı anlamı, kesirlerin farklı modelleri ve sınıf seviyelerine göre uygunluğunun yer aldığı içerikten oluşmaktadır. Bu kategoride toplam 5 soru yer almaktadır.

Pedagojik Alan Bilgisi

- AÖB: Öğrencilerin özelliklerinin, bireysel farklılıklarının, kesirlere ilişkin yaşadıkları zorluk ve yanılgılar, öğretmenin bunları gözeterek gerçekleştireceği öğretim sürecinde kullandığı yöntem ve tekniklere ilişkin bilginin ortaya konulması amacıyla 8 sorudan oluşmaktadır.
- AÖtB: Kesirler konusunun öğretimine özgü yer verilebilecek görsel, materyal, model, gösterim, teknolojik araç ve çoklu temsillere ilişkin bilginin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaçla 4 soruya yer verilmiştir.
- AMB: Öğretmenin kesirlerin öğretimi konusunda Matematik Dersi (İlkokul ve Ortaokul) Öğretim Programı (2018)'na ilişkin bilgisinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu kapsamda kazanım ve kazanımlarda belirtilen öğretim tekniklerine ilişkin bilgisine yönelik 2 soruya yer verilmiştir. Programda yer alan kesirler konusuna ilişkin kazanımlar görüşme formunun ilgili başlıkları altında yer almıştır.

2.2.2. Gözlem

Bir öğretmenin öğretme bilgisinin ortaya çıkarılmasında, sınıf içi uygulama sürecinin değerlendirilmesi için açıklamalarının ve sınıf içi hareketlerinin ayrıntılarıyla ortaya çıkarılması önemlidir (Hill, Ball ve Schilling, 2008). Bu amaçla araştırmacı katılımcı olmayan gözlemci olarak Burak öğretmenin 5. sınıf kesirler konusunu işlerken sınıf ortamında bulunmuş ve öğretim sürecini gözlemlemiştir. Gözlem süresince araştırmacı gerçekleşen faaliyetlere katılmadan gözlemleyen ve not alan roldedir. Gözlem, kesir öğretimi sürecinin tamamında gerçekleştirilmiş ve haftada 5 ders saati olmak üzere 5 hafta gözlem yapılmıştır. Gözlem için yarı-yapılandırılmış gözlem formu (EK-2), fotoğraf ve video kullanılmıştır. Bu amaçla, araştırmacı öğretmenin öğretim sürecine ilişkin gözlem notları tutmuş, herhangi bir veri kaybının yaşanmaması için dersi video kaydına almış ve fotoğraf çekmiştir. Ders gözlemi yapılan Burak Öğretmen'den gerekli izinler alınarak görüşme verilerinin desteklenmesinde gözlemlere ilişkin fotoğraflar kullanılmıştır.

2.3. Verilerin Analizi

Çalışmada görüşme ve gözlem sonucu elde edilen veriler betimsel analiz yoluyla analiz edilmiştir. Çalışmada yer alan öğretmenin öğretme bilgisi Ball, Thames ve Phelps (2008) tarafından geliştirilen ÖMB bileşenleri şemasıyla analiz edilmiştir. Görüşme süresince veri elde etmede kullanılan ses kayıtları yazıya dökülmüş ve metin halinde veriler ÖMB bileşenleri kapsamında kodlanmıştır. Elde edilen verilerin bu şekilde önceden belirlenen temalar doğrultusunda analiz edilmesi betimsel analiz olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bu amaçla uygulanan süreç aşağıda detaylandırılmıştır.

4. ÖMB kategorilerinin yer aldığı liste oluşturulmuştur. Ardından bireysel görüşmeden elde edilen veri seti yazılı metin haline dönüştürülmüş ve ÖMB bileşenleri çerçevesinde kodlanmıştır.

5. Gözlem süresince araştırmacı tarafından veri kaydedilen gözlem formu da ÖMB bileşenleri çerçevesinde kodlanmıştır. Gözlem süresince kullanılan gözlem formunun yanı sıra sınıf içi uygulamalar video ile sesli ve görüntülü kaydedilmiştir. Bu kayıtlar da yazılı metin haline getirilerek ÖMB bileşenleri kapsamında çözümlenmiştir.
6. Görüşme, gözlem ve sınıf içi uygulamalara ait görüntülerden elde edilen veriler bütüncül bir yaklaşımla ele alınmış ve gerekli yerlerde gözlem notları ve sınıf içi uygulamalara ait doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

Nitel bir araştırma olan çalışmada inandırıcılık ve transfer edilebilirliğinin sağlanmasında veri toplama araçlarında çeşitleme yapılmıştır. Çalışma boyunca görüşme, gözlem, fotoğraf ve video görüntülerinin toplanması ve arşivlenmesi sayesinde gerekli ve yeterli veri malzemesi elde edilmiştir. Çalışmada elde edilen veriler analiz edilmiş ve yazılı doküman haline getirilerek katılımcı teyidi alınmıştır. Verilerin doğru şekilde anlaşılıp/anlaşılmadığı veya doğru yorumlanıp/yorumlanmadığı konusunda yapılan analizler daha sonra katılımcı ile görüşülerek teyit edilmiştir. Bu sayede elde edilen veriler çeşitlenmiş, doğrulanmış ve karşılaştırılmıştır. Çalışmada yer alan öğretmenin amaçlı örnekleme yolu ile seçilmesi ve bireysel özelliklerinin verilmesi aynı zamanda gözlem yapılan öğretim sürecinin detaylandırılması ve doğrudan alıntılar ile sunulması sayesinde benzer durumlara ilişkin transfer edilebilirlik hedeflenmiştir.

2.4. Süreç

Çalışma 2019-2020 eğitim-öğretim yılı güz döneminde gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın amacı kapsamında belirlenen özellikleri taşıyan öğretmenle çalışmanın yürütülebilmesi için İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden gerekli izinler alınmıştır. 5. 6. 7. ve 8. sınıflarda derse giren ve 5. sınıfında özel eğitim (kaynaştırma, üstün zekalı ve yetenekli) öğrencisi olan Burak öğretmenle çalışma gerçekleştirilmiştir. Çalışmada ortaokul matematik öğretmeninin ÖMB'sini belirlemek amaçlandığından görüşme ve gözlem yoluyla veri toplanmıştır. Çalışma iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada, öğretmenin ÖMB'sinin ortaya konulması amacıyla bireysel görüşme gerçekleştirilmiştir. İkinci aşamada ise, öğretmenin kesirler konusundaki öğretim süreci sınıf içinde gözlemlenmiştir. Bu sayede görüşme ve gözlem verilerinin karşılaştırılması sağlanmıştır.

Kesirler alt öğrenme alanı Matematik Dersi (İlkokul ve Ortaokul) Öğretim Programı (MEB, 2018)'nda ortaokul 5. sınıfta Sayılar ve İşlemler öğrenme alanında Doğal Sayıların öğretimi sonrasında yer almaktadır. İlkokulda ise 1. 2. 3. ve 4. sınıfta öğretimi gerçekleştirilmektedir. Bu doğrultuda 5. sınıftaki bir öğrencinin kesirler konusuna ilişkin ön öğrenmeye sahip olduğu söylenebilir. Matematik Dersi (İlkokul ve Ortaokul) Öğretim Programı 5. Sınıf Kesirler ve Kesirlerle İşlemler konusunda 8 kazanım yer almaktadır. Programda belirtilen ilgili kazanımlar için 35 ders saati belirlenmiştir.

3. Bulgular

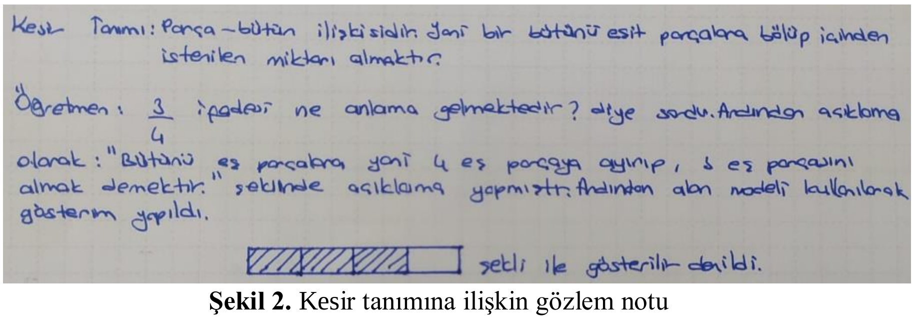
Ortaokul matematik öğretmeninin kesirler konusuna yönelik öğretme bilgisi; konu alan ve pedagojik alan bilgisi başlıkları altında sunulmuştur.

3.1. Konu Alan Bilgisi

ÖMB konu alan bilgisi kapsamında; GAB, UAB ve KAB boyutları ele alınmıştır.

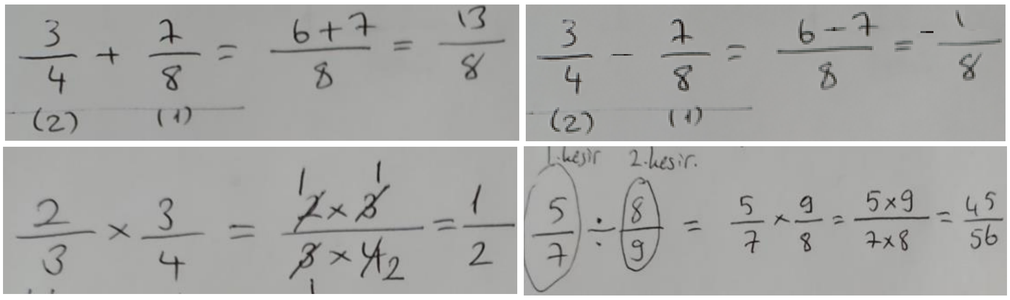
3.1.1. GAB

Öğretmenin kesirlere ilişkin GAB'ni ortaya koymak amacıyla kesirleri tanımlama ve temel işlemleri gerçekleştirmeye yönelik sorular yöneltilmiştir. İlk olarak Burak öğretmenin kesir kavramını açıklaması ve $\frac{a}{b}$ şeklinde verilen durumu ifade etmesi istenmiştir. Öğretmen, kesir kavramını "*Bir bütünü parçalara ayırıyoruz, kaç parçaya ayırıyorsak payda olur daha sonra bu parçalarından kaçını alıyorsak bu da pay olur*" şeklinde tanımlamıştır. Öğretmenin bu açıklamasından yola çıkarak kesir kavramını parça-bütün anlamından yola çıkarak tanımladığı fakat eşit parça ifadesini kullanmadığı görülmektedir. Sınıf içi gözlemlerde de kesir kavramını parça-bütün ilişkisinden yola çıkarak tanımladığı fakat bu süreçte eşit parçalara bölmeyi ifade ettiği gözlemlenmiştir (Şekil 2). Buna dayalı olarak öğretmenin kesirlerin parça-bütün anlamını içeren temel tanımlamayı yapabildiği görülmektedir.



Şekil 2. Kesir tanımına ilişkin gözlem notu

Öğretmenin kesir kavramına yönelik açıklamalarının ardından kesirlerle gerçekleştirilen toplama-çıkarma ve çarpma-bölme işlemlerine yönelik temel bilgi düzeyinde sorular yöneltilmiştir. Öğretmenin yaptığı çözüm ve açıklamalar aşağıda sunulmuştur (Şekil 3).



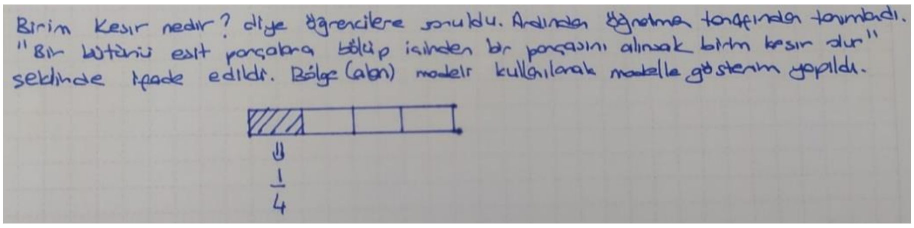
Şekil 3. Öğretmenin kesirlerle işlemlere yönelik çözümü

Burak öğretmen kesirlerle toplama-çıkarma işlemini "*Eğer paydaları eşit ise; payda yazılır ve paylar tek bir kesir çizgisinde yazılarak toplanır veya çıkarılır. Son olarak sadeleşme varsa sadeleştirme işlemi yapılır*" şeklinde ifade etmiştir. Kesirlerle çarpma işlemine yönelik "*Çarpma işleminde paylar çarpılır paya yazılır 2×3; paydalar çarpılır 3×4. Eğer sadeleştirme varsa önce sadeleştirmeler yapılır 3 ler sadeleşir, 4 ile 2 sadeleşir en sade hali ile ½*" şeklinde açıklama yapmıştır. Öğretmenin bölme işlemine yönelik açıklaması ise "*Birinci kesir yazılır, ikinci kesri ise payı ve paydası yer değişecek şekilde çarpmaya göre tersi alınır. Böylece bölme işlemi çarpma işlemine dönüştürülür. Sonra çarpmadaki kurallar geçerli olur paylar çarpılır paya yazılır, paydalar çarpılır paydaya yazılır. Bölme işleminde birinci kesri aynen yazıyoruz, ikinci kesri ise ters çevirip çarpıyoruz. Ters derken payı ile paydası yer değiştiriyor. Ardından tek bir kesir çizgisi ile yazılarak sadeleşenler var mı bakılır yoksa çarpıp yazılır*" şeklinde olmuştur. Öğretmenin yaptığı çözüm ve çözümlere yönelik açıklamalarında herhangi bir hata olmadığı görülmektedir. Kesirlerle gerçekleştirilen işlemlere yönelik öğretmenin yaptığı açıklamalara bakıldığında algoritmaya dayalı çözümler gerçekleştirdiği görülmektedir. Öğretmenin yaptığı kesirlerle işlemlere dayalı açıklamalarında kesir kavramını temel düzeyde tanımlayabildiği ve kesirlerle işlemleri gerçekleştirmede ihtiyaç duyulan işlemsel bilgiye sahip olduğu görülmektedir.

3.1.2. UAB

Bu bölümde öğretmenin kesir kavramına ve kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerin matematiksel anlamına yönelik bilgisinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda öğretmene $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılan matematiksel ifadeler verilmiş ve kesir olup olmadıklarına yönelik açıklama yapması istenmiştir. Öğretmen $\frac{2}{0}$ ifadesi için "*Bir bütün var bunu 0 parçaya bölmüşüz. Ya da elimizde bir bütün yokmuş bunun içindense 2 parça almışız yani olmayan bir şeyi yoktan var etmek. Bunu tanımlayamayız mümkün değil*" şeklinde açıklama yapmıştır. Benzer şekilde $\frac{0}{0}$ ifadesine yönelik "*bir bütün yok 0 parçaya bölüyorum, içinden 0 parça alıyorum. Ne var elinde hiçbir şey o yüzden bu belirsizdir*" şeklinde kesirlerin parça-bütün anlamından yola çıkarak açıklama yaptığı görülmektedir. Öğretmenin kesir kavramına yönelik tanımında parça-bütün anlamını benzer şekilde tüm $\frac{a}{b}$ ifadelerine taşıdığı görülmektedir. Bu durum öğretmenin kesirlerin farklı anlamlarını (ölçme, bölme, oran ve işlemci) göz önünde bulundurmadığını göstermektedir. $\left(-\frac{2}{4}\right)$ ifadesine yönelik Burak öğretmenin açıklaması "*Negatif sayıdır bu, kesir diyemeyiz. Bunları derken sınıf önemli, mesela lisede rasyonel sayı deniyor bu ifadeye*" şeklinde olmuştur. Öğretmenin bu açıklamasından yola çıkarak ilkokul ve ortaokul düzeyinde gerçekleştirilen öğretimde kesir kavramının ileri düzey sınıflarda rasyonel sayı olarak nitelendirdiği görülmektedir. Öğretmenin böyle bir anlayışa sahip olması kesir ve rasyonel sayı kavramlarını doğru tanımlayamadığını göstermektedir. Benzer şekilde kesir ve rasyonel sayıların özelliklerini göz önünde bulundurmaya yönelik $\frac{3}{4} : n$ ifadesi verilmiş ve n'in hangi değerleri için bu ifadenin bir kesir belirtebileceği sorulmuştur. Burak öğretmen "*n'nin bütün durumları için kesirdir. n'e 1 desen ¾ olur; ½ desek 3/8 olur. Her durumda kesir olur*" şeklinde açıklama yapmıştır. Öğretmenin rasyonel sayı ve kesir kavramlarının tanımlarını tam olarak yapamadığı ve özelliklerini göz önünde bulundurmadığı görülmektedir.

Kesir kavramı derinleştirilerek öğretmene kesir çeşitlerini (birim kesir, denk kesir, tam sayılı kesir) tanımlaması istenmiştir. Birim kesir Burak öğretmen tarafından "*Mesela, tahtaya bir bütün çizerim. Bu bütünü eşit parçalara bölüp içerisinden 4 tanesi yenildi diyerek, dört kardeş için kişi başına düşen parçayı söylüyorum*" şeklinde açıklamıştır. Öğretmenin yaptığı bu tanımlama kesir öğretimine yönelik yapılan sınıf içi uygulamalarında da gözlemlenmiştir (Şekil 4).



Şekil 4. Birim kesir tanımına ilişkin gözlem notu

Burak öğretmen tam sayılı kesri *"Elimizdeki bütünlerin çokluklarından yola çıkarak ifade edebilirim mesela 3 tane aynı olan bütünümüz var. 3 tane elmayı bütün olarak 2 kişiye böleceğimiz zaman bir tam birine veriyoruz, bir tam diğerine. Ardından kalan üçüncü elmayı yarıya bölerek yarısını birine yarısını diğer kişiye veriyoruz. Ardından kişinin aldığı tam ve kesri ifade ederiz. 1 tam ½ olarak"* şeklinde açıklamıştır. Denk kesirler ise "*Çizerek bir bütünü 4 eşit parçaya bölüp 3 parçasını alıyorum, aynı bütünü 8 eşit parçaya bölüp 6 tanesinin alındığını gösteriyorum. Bu sayede kesirlerin denkliklerini gösteriyorum. Hizalayıp öğrenciye aynı parçalara denk geldiğini göstermiş olurum. Bu kesirlerin birbirine denk olduğunu söylüyorum, eşit değil*" şeklinde açıklama yapılmıştır. Öğretmenin kesir çeşitlerine ilişkin tanımlamalarında öğretimini yaptığı durumlardan yola çıkarak örneklendirdiği görülmektedir. Buna dayalı olarak kesir çeşitlerinin öğretmen tarafından tanımlanamadığı örneklendirildiği söylenebilir.

Kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerin matematiksel anlamını ortaya çıkarmak amacıyla kesirlerle toplama/çıkarma ve bölme için ezbere gerçekleştirilen işlem süreci sorgulanmıştır. Kesirlerle toplama/çıkarma işleminde payda eşitlemeye yönelik Burak öğretmen "*Paydalar aynı olacak ki aynı bütünü parçalayıp dağıtabilelim. Dolayısıyla aynı değilse dağıtılamaz*" şeklinde açıklama yaparak "aynı bütünde çalışma" sebebiyle açıklama yapmıştır. Bu açıklamanın kesirlerin parça-bütün anlamı belirtilerek yapıldığı görülmektedir. Buna dayalı olarak öğretmenin, payda eşitleme işleminin altında yatan kavramsal boyutu belirttiği söylenebilir. Burak öğretmen tarafından kesirlerle bölme işleminde gerçekleştirilen "birinci kesir sabit durur, ikinci kesir ters çevrilir" ifadesinin matematiksel açıklaması "*Çarpma işlemine dönüştürme işlemi yapılır. Birinci kesir sabit tutulur ve ikinci kesrin çarpma işlemine göre tersi ile çarpılır. Yani çarpma işlemine dönüştürülür*" şeklinde yapılmıştır. Kesirlerle bölme işleminin öğretmen tarafından işlemsel sürece dayalı olarak "çarpmaya göre tersi" şeklinde açıklandığı görülmektedir. Bundan dolayı öğretmenin kesirlerle bölme işleminde gerçekleştirilen algoritmanın altında yatan matematiksel düşünceye hâkim olmadığı söylenebilir.

3.1.3. KAB

KAB boyutunda yatay ve dikey müfredat bilgisinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Yatay müfredat bilgisinde kesir konusunun farklı disiplinlerdeki, günlük hayattaki ve matematik konularındaki ilişkisinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.

Kesirlerin, matematiğin kendi içerisinde yer alan konu ve kavramlarla ilişkilendirilmesine öğretmen açıklaması "*Öğrenciler kesir kavramını öğrendiğinde bölmeyi, paylaştırmayı, paylaştırılmış parçaları toplamayı daha sonra rasyonel sayılar ile ilişkilendirmeyi öğreniyor*" şeklinde olmuştur. Burak öğretmenin yapmış olduğu bu açıklamada "*bölmeyi, paylaşmayı*" ifadeleri ile kesirlerin bölüm anlamını örneklendirdiği görülmektedir. UAB kapsamında öğretmenin kesirlerin farklı anlamlarını bilmediği sadece parça-bütün anlamına odaklandığı belirtilmiştir. Buradan yola çıkarak öğretmenin kesirlerin anlamlarını doğrudan bilip tanımlayamasa da örnekler ile ilişki kurabildiği söylenebilir. Bunun yanı sıra öğretmenin kesir kavramının ilişkili olduğu yüzdeler, oran ve orantı öğrenme alanları ile ilişkilendirme yapmadığı görülmektedir.

Kesir kavramının farklı disiplinlerle ilişkilendirilmesinde Burak öğretmen "*En başta fen tabi, fen matematikten ayrı düşünülemez. Kesirler konusuyla ilişkisine baktığımızda kesirlerden ziyade aslında rasyonel sayıyla ilişkisi var diyebiliriz. Rasyonel sayılar fende işlemlerde karşısına çıkar. Yoğunluk yazarken mesela veya işlem yaparken de rasyonel ifade olur. Ondalık gösterimlerini görür"* şeklinde fen bilgisi ile ilişkilendirmede bulunmuştur. Kesirlerin fen ile ilişkilendirilmesi ise rasyonel sayılar konusu ile ifade edilmektedir. Öğretmenin bu açıklaması ve UAB kapsamında yer alan sorulardaki açıklamalarından yola çıkarak öğretmenin kesir ve rasyonel sayıyı ayırt edemediği söylenebilir. Bunun yanı sıra Burak öğretmen kesirlerin ondalık gösterim ile ifade edildiğini belirterek, kesirlerin ilişkili olduğu konu olarak ondalık gösterim ile ilişkilendirme yapmıştır. Öğretmenin açıklamasında "*yoğunluk yazarken*" şeklinde verdiği örnekte ise kesirlerin oran anlamını örneklendirdiği görülmektedir. Buradan yola çıkarak kesir anlamı olarak oranı bilmese de ilişkilendirme yapabildiği söylenebilir. Kesirlerin günlük hayatla ilişkilendirilmesi ise "*Zaten kesirleri öğretirken günlük hayatla ilişkili örnekler veriyorum, bir tarlanın paylaştırılması, bir karpuz bölündüğünde kişi başına ne düşer gibi*" şeklinde olmuştur. Fakat öğretmenin sınıf içi uygulamalarına yönelik yapılan gözlemlerde kesirlerin ilişkili olduğu konular, disiplinler ve gerçek yaşam durumları ile ilişkilendirmede bulunmadığı gözlemlenmiştir.

Dikey müfredat bilgisi kapsamında müfredat programında kesir öğretiminin ilişkili olduğu önceki konular, temel oluşturduğu ileri sınıf konuları, kesirlerin farklı anlamları ve modellerine yönelik öğretmenin sahip olduğu bilgiler incelenmiştir. Öğretmenin kesirlerin farklı anlamlarına yönelik sahip olduğu bilgileri ortaya çıkarmak amacıyla kesirlerin hangi anlamlarının olduğu sorulmuştur. Burak öğretmen kesirlerin "*parça-bütün ve bölme*" anlamının olduğunu belirtmiştir fakat ölçme, oran ve işlemci anlamlarını ifade etmemiştir. Öğretmenin anlayışındaki bu eksikliğinin GAB'a da yansıdığı ve kesir kavramını ifade etmede eksik kaldığı görülmektedir. Burak öğretmene kesir ve rasyonel sayı ilişkisi sorulmuş ve öğretmen "S*ınıf bazında farklılık var. Daha çok 7. 8. sınıfta rasyonel sayı veriyoruz. Rasyonel sayı daha gelişmiş bir ifade, kesir daha basit; parçanın bütüne göre bölünmesi. İlerleyen zamanlarda oran var mesela oranla kesir de aynı değil; kesir bir bütünün parçaları, oran ise iki farklı cinsin birbirine bölümüdür, bir bütün yoktur burada*" şeklinde açıklama yapmıştır. Öğretmenin rasyonel sayılara ilişkin açıklamasına bakıldığında kesirlerden daha gelişmiş bir kavram olduğu ve ortaokul seviyesindeki kesirlerin düzey ilerledikçe rasyonel sayıya dönüştüğünü belirttiği görülmektedir. Bunun yanı sıra öğretmenin oran kavramına ilişkin açıklamasında kesir ve oranın farkını "*kesir bir bütünün parçaları, oran ise iki farklı cinsin birbirine bölümüdür*" şeklinde tanımlamıştır. Öğretmenin yapmış olduğu bu açıklamalar doğrultusunda kesir, rasyonel sayı ve oran kavramlarına yönelik tanımlamalarının ve ilişkilendirmelerinin eksik olduğu söylenebilir. Bu bulgu aynı zamanda UAB'de yer alan sonuç ile örtüşmektedir.

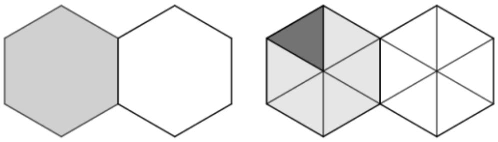
Öğretmene kesirlerin farklı anlamlarına yönelik örnek durumlar sunulmuş ve bunların kesir belirtip belirmediği, belirtiyor ise hangi anlamda kullanıldığına dair sorgulama yapılmıştır. Burak öğretmene yöneltilen örnek durumlar ve açıklamaları Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Kesirlerin farklı anlamlarına ilişkin örnek durumlar ve öğretmen açıklaması

İfade	**Açıklama**
Bir sınıfın 5'te 3'ü (parça-bütün anlamı)	***B:*** *Sınıfın tamamı 5'e bölünmüş 3 parçası alınmış. Yani parça-bütün anlamındadır. O yüzden kesirdir.*
8'de 5 kesrine ulaşmak için 1/8 kesrinden 5 tane kullanılması (işlemci anlamı)	***B:*** *8'de 5 kesrine ulaşmak için 1/8 kesrinden kaç tane; birim kesir. Bir bütünü bölüyorum 5 parçaya ilk önce birini alıyorum. Sonra 6 parçaya bölüyorum 1'ini alıyorum, sonra diyorum 5 parçada 1, 6 parçada 1'i 8 parçada 1'i o zaman her bütünün birim kesirleri vardır.*
Bir sınıftaki kızların sayısının erkeklerin sayısına göre karşılaştırılması (oran anlamı)	***B:*** *Karşılaştırma demek oran demek. Oran aynı cins iki çokluğun karşılaştırılmasıdır. Bu bir orandır kesir demeyiz*
7 tane kurabiyenin 9 öğrenciye paylaştırılması (bölme anlamı)	***B:*** *7, 9'a bölünür ve ondalık sayıdır. Pay paydaya direk bölünür.*
50 m^2 arazinin 4'te 1'inin ifade edilmesi (ölçme anlamı)	***B:*** *Ondalık sayıya çevirip ifade edebiliriz.*

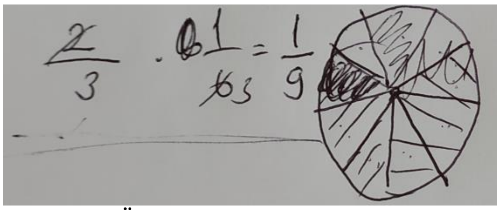
Kesirlerin farklı anlamını ifade eden örnek durumlara ilişkin öğretmenin verdiği yanıtlar incelendiğinde parça-bütün anlamını doğru ifade ettiği görülmektedir. Bunun haricindeki örnekleri ise kesirlerin farklı anlamları bağlamında doğru değerlendirme yapmadığı görülmektedir. Burak öğretmen, kesirlerin işlemci anlamına ilişkin örnekte kesrin kullanım şeklinden ziyade birim kesir olmasına odaklanmıştır. Kesirlerin oran anlamına yönelik örnekte ise öğretmenin oran ve kesir tanımının doğru olmamasından kaynaklı ifadeyi kesir değil oran olarak nitelendirmiştir. Öğretmenin kesirlerin oran anlamının olduğunu bilmemesi ve oran ifadesini kesir olarak tanımlamamasından kaynaklanan hatalı açıklamalar yaptığı görülmektedir. Bu örnek durum UAB kapsamındaki bulgularla desteklenmektedir. Kesirlerin bölüm ve ölçme anlamlarına ilişkin örnekte öğreten, kesrin kullanım anlamına değil temsil şekline odaklanılmış ve ondalık gösterim olduğu belirtilmiştir. Bu sonuçlar neticesinde öğretmenin kesirlerin farklı anlamlarını bilmediği ve bu kapsamda yer alan örnek durumları da değerlendiremediği söylenebilir. Bu kısıtlı kavrayışın öğretmenin kesir öğretimine de yansıdığı gözlemlenmektedir. Kesir kavramını tanımlamada ve öğretim sürecinde yer verilen örneklerde de sadece parça-bütün anlamına odaklanılmıştır (Şekil 2.)

Öğretmene kesirlerin farklı modellerini içeren sorular yöneltilmiştir. İlk olarak modelleme verilerek kesir gösterimi olarak neyi ifade ettiği sorulmuş, daha sonra ise kesir ifadesi verilerek öğretmen tarafından bu işlemin modellenmesi istenmiştir. Kesirlerin bölge (alan) modeline ilişkin örnek gösterim yapılmıştır (Şekil 5). Bu örnek gösterim ile öğretmenin hem bölge (alan) modelini yorumlaması hem de bu modelle temsil edilen denk kesir ifadesine yönelik bilgisinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır.



Şekil 5. Kesirlerin bölge (alan) modellemesi

Burak öğretmen şekilde yer alan modelin temsil ettiği kesre yönelik "*Bir altıgen ve bir altıgen daha alınmış, biri taralı… Örüntü blokları ile bir bütün oluşturulmuş iki tanesi ile sonra her biri 6 eşit parçaya bölünmüş aslında bu örüntünün tamamı 2 eşit parçaya bölünmüş. Yani 1/12*" şeklinde açıklama yapmıştır. Öğretmenin açıklamasına bakıldığında birinci ve ikinci görsel arasında ilişki kurarak yorumlamadığı görülmektedir. Öğretmenin verilen temsili farklı yorumlamadığı ve denk kesir, tam sayılı kesir olarak ifade etmediği görülmektedir. Bunun yanı sıra Burak öğretmenden 3'te 2'nin 6'da 1'ini modellemesi istenmiştir. Buna ilişkin öğretmen hem modelleme (Şekil 6) hem de "*Çarpma işlemini sadece işlem olarak yapsam soyut kalıyor materyalle daha iyi. Materyal dediğimde sınıfa alıp bir şey getirmiyoruz şekli tahtaya çiziyoruz ve işlemi bunun üzerinde yapıyoruz. Çocuğa 3'te 2'nin 1 bölü 6'sı desem çarpacak mıyım bölecek miyim çıkaracak mıyım diye sınıfın yarısından fazlası sorar*" şeklinde açıklama yapmıştır.

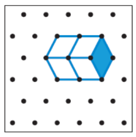


Şekil 6. Örnek işleme dair modelleme

Öğretmenin kesirlerin modellenmesine ilişkin verilen örnek işlemde bölge (alan) modelini doğru şekilde kullanarak temsil ettiği görülmektedir. Aynı zamanda verilen kesir ifadesinde öğrencilerin yaşadığı zorluğun farkında olduğu ve göz önünde bulundurduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

Farklı kesir modellerine ilişkin örnek temsiller gösterilerek öğretmenin bu gösterimleri kesir olarak nasıl ifade edebileceği sorulmuştur.

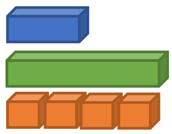
$\frac{1}{5}$ kesrinin bölge (alan) modeli ile gösterimi ve öğretmenin buna ilişkin açıklaması:



B: *Bileşik bir küp bir parçası taranmış. Yüzey alanı olarak mı sorulmuş yoksa bu hacimsel olarak mı? Hacimsel ise 2'de 1 deriz. Yüzey alanı ise yüzey alanlarını bulup 1 parçası deriz. 5 yüzey var, 5 yüzey daha var toplam 10 yüzey. 10'da 1 olur.*

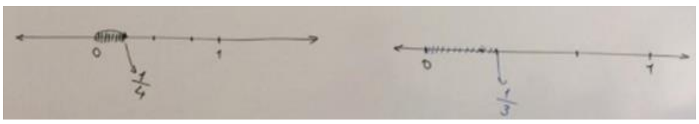
Öğretmenin açıklamasında şekli parça-bütün olarak doğru yorumladığı fakat alan ve hacim ifade ettiğini düşünüp kesir temsilini yanlış yapmıştır.

Yeşil çubuğun 1 bütünü, mavi çubuğun $\frac{1}{2}$ birimi temsil ettiği durumda, $\frac{1}{4}$ birimlik turuncu çubukların uç uca birleştirilmesi işleminin $\left(\frac{1}{2} \times 4 = 2\right)$ uzunluk modeli ile gösterimi ve öğretmen açıklaması;



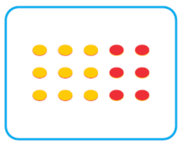
B: *Biri 1 tam diğeri de 1 tam diğeri ise 4 tam. Bir kesir ifadesi yok burada. Eşit parçalara bölünmemiş.*

Öğretmenin örnekte yer alan kesir çubuklarıyla gerçekleştirilen işlemini ifade edemediği görülmektedir. Bunun yanı sıra sayı doğrusu modelini kesirlerin büyüklük gösteriminde kullandığı gözlenmiştir (Şekil 7).



Şekil 7. Çizgi modelinin kullanımına ait ders gözlemi

Kırmızı renkli boncukların, sarı renkli boncuklara oranı $\left(\frac{6}{9}\right)$ örnek durumuna ilişkin kesirlerin küme modeli ile gösterimi ve öğretmen açıklaması;



B: *Burada bir bütün yok, ayrı ayrı cinslerin birbirlerine oranı bu. Oranlama yapılmış.*

Öğretmenin yaptığı açıklamada KAB ve UAB'de belirtildiği gibi kesirlerin sadece parça-bütün anlamına odaklandığı ve oran anlamını bilmediği görülmektedir. Bu açıklamaya dayalı olarak Burak öğretmenin kesir modelleri arasında yer alan küme modeli temsilini de bilmediği sonucuna ulaşılmaktadır.

Öğretmene gösterilen örnek kesir modelleri arasından hangi gösterimleri sınıfında kullanıp/kullanmadığı ve bu gösterimlerin sınıf seviyesine uygunluğuna ilişkin değerlendirme yapması istenmiştir. Burak öğretmenin kesirlerin gösterimlerine ilişkin görüşü "*Bu modellerin hiçbirini kullanmıyorum. Üç boyutlu bir model de kullanmıyorum sadece dörtgen çizerim, pasta çizerim, yuvarlak çizerim. Bunların hiçbirini 5. 6. veya 7. sınıfta göstermiyorum. Bunları ancak elimde bir materyal varsa kullanırım. Yoksa bunları üç boyutlu olarak tahtaya çizerek yapmam. Bu gösterimlerin hiçbirinin öğrenci seviyesi için uygun olduğunu düşünmüyorum. Hepsi uygun değil bunlar ortaokul seviyesinde gösterilemez. Mesela üçüncü şekil kesir değil zaten bir oran*" şeklinde açıklamıştır. Bu doğrultuda öğretmenin kesirlerin farklı gösterimlerine ilişkin yeterli bilgiye sahip olmadığı sonucuna ulaşılabilir. Kesirlerin farklı gösterimlerinin kullanımı ve sınıf seviyesine uygunluğuna ilişkin öğretmenin yaptığı açıklamalarda ise bu gösterimleri kullanmadığı ve ortaokul seviyesine uygun olmadığı görüşünün hâkim olduğu görülmektedir. Öğretmenin bu gösterimlere ilişkin bilgisinin yeterli olmamasından kaynaklı olarak bu düşüncelere sahip olduğu ve kullanmayı tercih etmediği düşünülmektedir. Ayrıca bu düşüncenin, öğretmenin AMB eksikliğinden kaynaklı olabileceği de düşünülmektedir.

3.2. Pedagojik Alan Bilgisi

ÖMB pedagojik alan bilgisi kapsamında; AÖB, AÖtB, AMB boyutları ele alınmıştır.

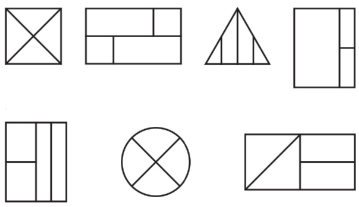
3.2.1. AÖB

AÖB kapsamında öğretmenin kesir öğretimini gerçekleştirirken öğrencilerin hazırbulunuşluklarına, yaşayacakları muhtemel zorluklara, kesirlere ilişkin yaygın kavram yanılgılarına yönelik sahip olduğu bilgisi ve bu unsurlar doğrultusunda uygun öğretimi planlamasına ilişkin bilgisinin ortaya konulması amaçlanmıştır.

Kesir öğretiminde öğrencilerin yaşadığı zorluklara ilişkin Burak öğretmenin açıklaması "*Payda eşitlemeyi bilmez, söyleneni paya mı paydaya mı yazacağını bilmez. Ödev veriyorum materyalle işlem yapması lazım bütünü parçalayın diyorum, okulda da yapmaya çalışıyorum ama öğrenen var öğrenemeyen var*" şeklinde açıklama yapmıştır. Öğretmenin açıklamasında öğrencilerin kesirler konusuna ilişkin yaşadıkları zorluklar arasında pay ve payda kavramlarını karıştırma, toplama-çıkarma işleminde paydaların eşitlemesinde sorun yaşandığını ifade ettiği görülmektedir. Benzer şekilde KAB kapsamında Burak öğretmen öğrencilerin 3'te 2 gibi ifadelerde öğrencilerin pay ve payda kavramlarını karıştırdığını belirtmişti. Bu açıklamalara dayalı olarak öğretmenin öğrencilerin kesirler konusunda yaşadığı zorlukların farkında olduğu fakat buna ilişkin önlem anlamada yetersiz kaldığı görülmektedir.

Öğrencilerin kesirlerde sahip oldukları kavram yanılgısına ilişkin öğretmenin açıklaması "*2'de 1 ifadesinde mesela kavramlarda karıştırma var. Payı nereye yazacak paydayı nereye yazacak, payın veya paydanın ne demek olduğunu genelde karıştırıyorlar. O yüzden bazen bakıyorum önceden öğrenilmiş yanlış varsa. Mesela 4'te 1. Okuyor ama yazarken 4/1 olarak yazıyor. Bazen bazı sınıflara yasaklıyorum 4'te 1 demeyeceksiniz 1 bölü 4 diyeceksiniz diyorum*" şeklinde olmuştur. Öğrencilerin pay ve paydanın yazımında yaşadığı kavram yanılgısının ve bu yanılgıya sebep olan ifadenin öğretmen tarafından farkında olduğu görülmektedir. Öğretmenin GAB, UAB ve KAB yer alan açıklamalarında ve öğretimine yönelik gözlemlerde kesirleri parça-bütün anlamına dayalı olarak ele aldığı görülürken, parça-bütün anlamını ifade etmede ise bölüm şeklinde ifade kullandığı görülmektedir. Öğrencilerin pay ve payda yazımında yaşadıkları zorlukların sebeplerinden birinin öğretmen tarafından sunulan kesirlerin anlamanın ve okunmasının farklı anlamları ifade etmesinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Öğretmenin yanıtlarını derinlemesine incelemek ve detaylandırmak için öğrencilerin kesirlere ilişkin sahip oldukları kavram yanılgıları örnek durumlar ile sunularak öğretmenin bu durumları değerlendirmesi ve kendisinin bu durumlara ilişkin çözüm oluşturmada nasıl bir öğretim süreci izleyeceği sorulmuştur. Öncelikli olarak kesir kavramı ve temsiline ilişkin yanılgılar örneklendirilmiştir. Öğretmene $\frac{1}{4}$ kesrinin öğrenciler tarafından temsilinde örnekler gösterilmiş (Şekil 8) ve bu yanıtların öğretmen tarafından değerlendirilmesi istenmiştir.



Şekil 8. $\frac{1}{4}$ kesrinin temsiline ilişkin gösterimler

Burak öğretmenin $\frac{1}{4}$ kesrinin temsiline ilişkin gösterimlere yönelik açıklaması "*Demek ki o öğrenciye kesir kavramı verilirken eşit parçalar ifadesi vurgulanmamış. Çocuk bakmış hepsi 4 parçaya bölünmüş ama eşit mi değil mi vurgulanmamış. Öğretmenin hatası olmuş anlatmamış ya da öğrenci orayı kaçırmış. Benim öğrenciler bunu demez çünkü eşit parçaya bölünmesi gerektiğini vurguluyorum*" şeklinde olmuştur. Açıklamada öğretmenin ilgili kavram yanılgısının altında yatan sebebin farkında olduğu fakat bunu gidermek amacıyla etkili bir çözüm geliştirmediği görülmektedir.

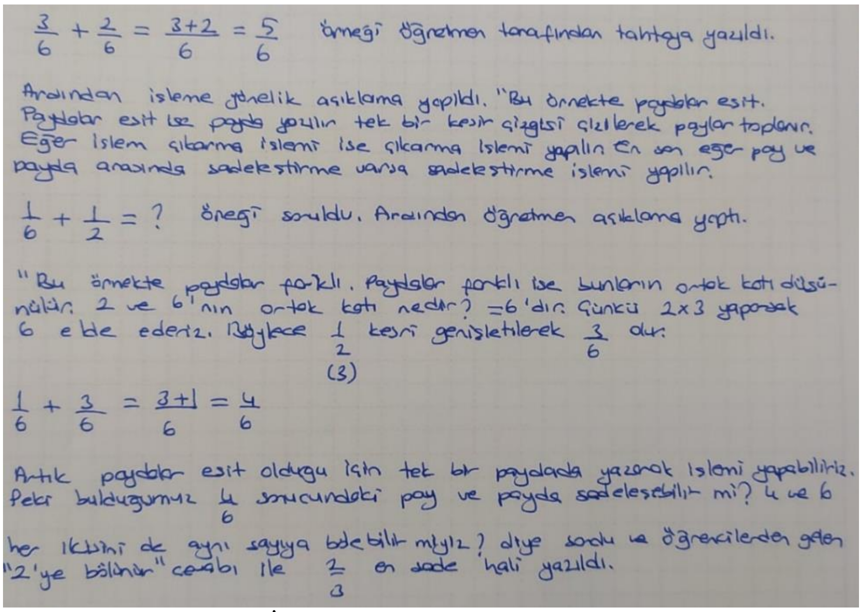
Kesirlerle işlemlerde öğrencilerin sahip oldukları yanılgılar örneklendirilerek öğretmenin değerlendirme yapması ve çözüm yolları geliştirmesi istenmiştir. Kesirlerle toplama işlemine örnek duruma $\left(\frac{13}{5}+\frac{2}{22}=\frac{15}{27}\right)$ yönelik Burak öğretmen "*Ne yazık ki bu yapılıyor evet. Burada özellikle öğrenciye şunu vurgulamak lazım hangi işlemi yapıyorsun? Öğrenci hangi işlemi yaptığına bakmadan direk başlıyor. Bunun ayrımını çocuğa yaptırmak lazım. Böylece önlenir"* şeklinde açıklama yapmıştır. Kesirlerle çarpma işlemine yönelik *"Çarpma işlemi çarpılan sayıları daima büyütür, bölme işlemi ise küçültür"* ifadesi sorulmuştur. Burak öğretmenin ilgili yanılgıya ilişkin açıklaması "*Burada vurgulama yapılmamış. Çocuk sağlama yapmayı bilmiyor. İlkle sonu karşılaştırmayı bilmiyor. Ben çocuğa işlemi yaptıktan sonra karşılaştırıyorum. Bir baksın çarpmadan önce sayı ne işlemden sonra ne olmuş neyle yapmış bu çarpmayı. Bir ondalık sayı ile doğal sayıyı çarpınca sonuç doğal sayıdan büyük mü küçük mü sonuçlar alıyor. Bunları yorumlatıyorum çocuklara*" şeklinde olmuştur. Bu açıklamalara bakıldığında öğretmenin kesirlerle işlemlerin altında yatan kavramsal durumun farkında olmadığı bu sebeple etkili bir çözüm yolu geliştiremediği söylenebilir. UAB kapsamında öğretmenin de kesirlerle işlemlerin altında yatan matematiksel anlamın farkında olmadığı ortaya konulmuştur. Bu bulgulara dayalı olarak öğretmenin kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerin kavramsal anlamının farkında olmaması sebebiyle öğrencilerin kavram yanılgılarını değerlendirmede ve gidermede de yetersiz kaldığı sonucuna ulaşılmaktadır.

Öğretmenin öğrencilerin bireysel özelliklerinin farkında olup/olmama ve öğretim sürecinde bu özelliklerine dikkat edip/etmemesinin ortaya çıkarılması amacıyla sorular sorulmuştur. Burak öğretmen "*5. sınıfta 3 tane kaynaştırma öğrencisi var birisi disleksi mesela. Algılamayla sorunu yok kesirler, kesirlerde toplama bunların hepsini alıyor yalnız diğer 2 öğrencimde ilerleme kat edemiyoruz çünkü zihinsel olarak sorun var. Öğrenme kapasiteleri yok bugün öğreniyor yarın unutuyor. Üstün zekâlı tanısı olan çocuk da var ama kesirlerle ilgili farklı işlemler gösteriyorum mesela alamıyor bazı çarpma işlemlerini zihinden yapmayı öğretmeye çalıştım mesela anlayamadı demek ki üstün zekâlı filan değil yani bu çocuk*" şeklinde açıklama yapmıştır. Öğretmenin sınıfında bulunan öğrenciler arasında kaynaştırma, üstün zekalı ve yetenekli tanısı konulmuş öğrencilerinin farkında olduğu görülmektedir. Bunun yanı sıra sınıf içi öğretim sürecinde bu öğrencilere yönelik özel bir planlama ve uygulama yapmadığı gözlenmiştir. Kaynaştırma öğrencisi için özellikle okulda uygulanan sınıf dışı ders anlatımı yapılmakta ve Burak öğretmen de bu uygulama dahilinde destek eğitimi yapmaktadır. Öğretmenin kaynaştırma öğrencisinin dezavantajlı olduğu durumun bilgisinde olmadığı ve sınıf içerisinde destek uygulamadığı gözlenmiştir.

3.2.2. AÖtB

Öğretmenin kesir öğretiminde etkili olan öğretim yöntem ve tekniklere ilişkin bilgisinin belirlenmesi ve konuya özgü ders tasarlayabilmesine ilişkin öğretim bilgisinin ortaya konulması amaçlanmıştır. Bu amaçla öğretmenin kesir öğretimine özgü görsel, materyal, model, gösterim ve teknolojik araç-gereç kullanımına ilişkin bilgisi ortaya çıkarılmıştır.

Öğretmenin kesir öğretimini gerçekleştirme sürecini değerlendirmesi istenmiştir. Burak öğretmen öğretim sürecinde tercih ettiği öğretimi "*Yöntem teknik olarak genelde kendim anlatıyorum öğrenciler verdiğim soruları çözüyor"* şeklinde ifade etmiştir. Benzer şekilde kesir öğretimine yönelik yapılan gözlemlerde de öğretmen merkezli bir öğretimin gerçekleştiği gözlenmiştir. Yine öğretmenin de belirttiği gibi öğretimde soru çözümlerinin yer aldığı işlemsel uygulamaların ağırlıkta olduğu gözlenmiştir (Şekil 9).



$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$ örneği öğretmen tarafından tahtaya yazıldı.

Ardından isleme yönelik asıklama yapıldı. "Bu örnekte paydalar esit. Paydalar esit ise payda yazılır tek bir kesir çizgisi çizilerek paylar toplanır. Eğer islem çıkarma islemi ise çıkarma islemi yapılır. En son eğer pay ve payda arasında sadelestirme varsa sadelestirme islemi yapılır.

$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = ?$ öneği soruldu. Ardından öğretmen asıklama yaptı.

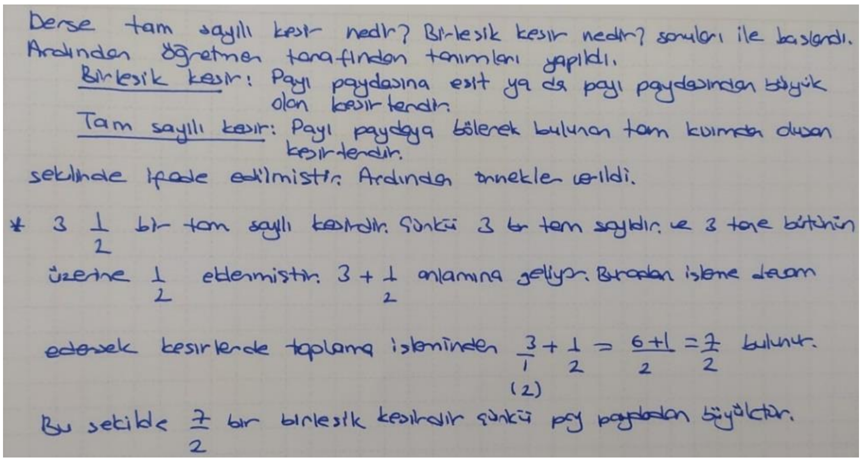
"Bu örnekte paydalar farklı. Paydalar farklı ise bunların ortak katı düsünülür. 2 ve 6'nın ortak katı nedir? =6'dır. Çünkü 2x3 yaparsak 6 elde ederiz. Böylece $\underset{(3)}{\frac{1}{2}}$ kesri genisletilerek $\frac{3}{6}$ dır.

$\frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6}$

Artık paydalar esit olduğu için tek bir paydada yazarak islemi yapabiliriz. Peki bulduğumuz $\frac{4}{6}$ sonucundaki pay ve payda sadelesebilir mi? 4 ve 6 her ikisini de aynı sayıya bölebilir miyiz? diye sordu ve öğrencilerden gelen "2'ye bölünür" cevabı ile $\frac{2}{3}$ en sade hali yazıldı.

Şekil 9. İşlemsel sürece ilişkin gözlem notu

KAB kapsamında öğretmenin kesir çeşitlerini tanımlaması istenmiş fakat öğretmen tarafından tanımlamalar yapılmadan sınıf içi uygulamalarından yola çıkılarak örneklendirilmiştir. Kesir öğretimine yönelik yapılan gözlemlerde ise tam sayılı kesir, birleşik ve denk kesir kavramlarına yönelik sadece tanımların yapıldığı ve ardından işleme dayalı uygulamalara geçildiği gözlemlenmiştir (Şekil 10).



Derse tam sayılı kesir nedir? Birlesik kesir nedir? soruları ile baslandı. Ardından öğretmen tarafından tanımları yapıldı.

Birlesik kesir: Payı paydasına esit ya da payı paydasından büyük olan kesirlerdir.

Tam sayılı kesir: Payı paydaya bölerek bulunan tam kısımdan oluşan kesirlerdir.

seklinde ifade edilmistir. Ardından örnekler verildi.

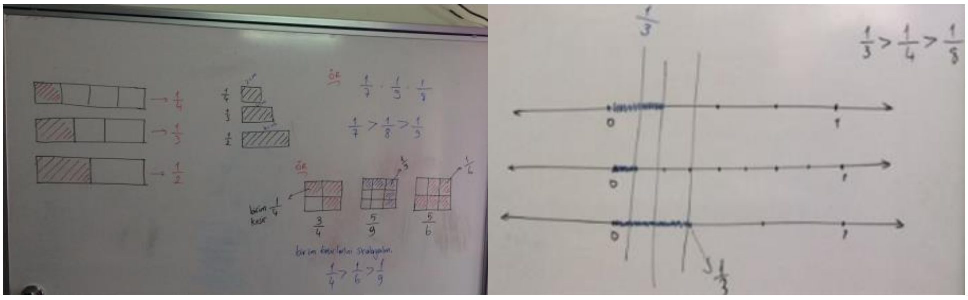
* $3\frac{1}{2}$ bir tam sayılı kesirdir. Çünkü 3 bir tam sayıdır ve 3 tane bütünün üzerine $\frac{1}{2}$ eklenmistir. $3 + \frac{1}{2}$ anlamına geliyor. Buradan isleme devam edersek kesirlerde toplama isleminden $\underset{(2)}{\frac{3}{1}} + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2}$ bulunur.

Bu sekilde $\frac{7}{2}$ bir birlesik kesirdir çünkü pay paydadan büyüktür.

Şekil 10. Kesir çeşitlerini tanımlamaya yönelik gözlem notu

Öğretmenin kesir çeşitlerine ilişkin açıklamalarında bileşik, tam sayılı ve denk kesir kavramlarının tanımını bildiğini fakat KAB'de ifade ettiği şekilde öğretim sürecinde örneklendirerek uygulamadığı görülmektedir. Bu durumda öğretmenin kesir çeşitlerini ve temsillerini bildiği fakat öğretim sürecinde uygulamadığı sonucuna ulaşılmaktadır.

Kesir öğretiminde kullanılabilecek materyal, model ve teknolojik araçlara ilişkin Burak öğretmenin açıklaması "*Ne yazık ki okulda materyal yok sadece tahta kalem kullanıyoruz. Çiziyorum genelde, genelde bir bütünü çizerim, tarayarak bunun kaçta kaçını temsil ettiğini gösteririm…Akıllı tahta kullanmayı faydalı bulmuyorum. Ne zaman kullanırım? Soru çözümünde belki*" şeklinde olmuştur. Öğretmenin de belirttiği gibi öğretim sürecinde teknolojik araç-gereç kullanımı gözlenmemiştir. Kesir kavramının parça-bütün anlamının ifadesinde bölge (alan) modeli ve kesirlerin sıralamasında uzunluk modeli kullanıştır (Şekil 11). Kesir çeşitlerinin öğretiminde ve kesirlerle işlemler sadece işlemsel uygulamalar ile gerçekleştirilmiştir.



Şekil 11. Bölge (alan) ve uzunluk modelinin kullanımına yönelik ders gözlemi

Öğretmenin kesir öğretiminde düz anlatıma dayalı bir öğretimi tercih ettiği, ders içeriğini zenginleştirici öğretim materyal ve modellerden yararlanmada eksiklikleri olduğu görülmektedir. Buna dayalı olarak öğretmenin, kesir öğretimini etkili kılacak yöntem ve teknikleri, kesirlere özgü model, materyal ve araç-gereçleri bilmede ve öğretimde yer vermede eksiklikleri olduğu ortaya çıkmaktadır. KAB kapsamında öğretmenin kesir modelleri konusunda yeterli bilgiye sahip olmadığı ortaya konulmuştu. Bu doğrultuda öğretmenin kesir modellerine ilişkin yeterli bilgiye sahip olmaması öğretim sürecinde de farklı modelleri kullanmasına engel olduğu sonucuna ulaşılmaktadır.

3.2.3. AMB

Burak öğretmenin kesir öğretimi sürecini ders kitabında yer alan başlıklar doğrultusunda planladığı ve uyguladığı gözlenmiştir. Öğretmenin Matematik Dersi Öğretim Programı'na ilişkin bilgisinin ortaya çıkarılması amacıyla sorular yöneltilmiştir. Burak öğretmenin kesirlerle ilgili kazanımlara ilişkin görüşleri "*Kazanımların yeterli olduğunu düşünmüyorum programı hazırlayanlar da düşünmüyor ki yerleri değiştiriliyor eksiliyor sonra çıkarılan kazanımın gerekli olduğu düşünülüp tekrar ekleniyor. Demek ki uygun değil program.*" şeklinde olmuştur. Öğretmenin kesir öğretimini programda yer alan kazanımlara göre planlamasına ilişkin görüşleri ise "*Kazanımda var yok bakmıyorum öğrencinin ihtiyacı neyse ona uygun şekilde vermeye çalışıyorum. Bizim amacımız eğer çocuğu bir üst kuruma hazırlamaksa mezun olan öğrencilerimize bakarsak geri dönütlere benim yaptığım bu ders işleme şeklinin ve uygulamaların yerinde olduğunu gösteriyor. Baktığınızda öğrenciler fen lisesine yerleşmiş, gelip diyor "hocam çok iyi öğretmişsiniz hiç zorlanmıyoruz." O yüzden doğru yaptığımı düşünüyorum, yani sadece kazanım olarak bakmıyorum çocuklara ek alabilecekleri şeyleri veriyorum. 5. sınıfta belki müfredatta yok ama ben ek şeyler de veriyorum*" şeklindedir.

Öğretmenin "*ek olarak veriyorum*" şeklinde fazlasıyla bilgi verdiğini belirtirken aslında öğretim programında yer alan kazanımları bile gerektiği şekilde tam olarak vermediği görülmektedir. Bunun yanı sıra öğrencilerinin merkezi sınavlarda başarılı olduğunu ve iyi okullara yerleştiklerini belirttiği görülmektedir. Hem kesir öğretim sürecine yönelik yapılan gözlemler hem de öğretmen açıklamaları sonucunda Burak öğretmenin kesir öğretimi konusunda AMB'sinin yetersiz olduğu söylenebilir. Öğretmenin başarılı öğrencileri örneklendirirken sınıfında yer alan öğrenme güçlüğü yaşayan kaynaştırma öğrencilerini göz önünde bulundurmadığı görülmektedir. Bu sonuç öğretmenin AÖB kapsamında belirtilen sonuç ile paralellik göstermektedir.

Öğretmenin öğretim programında yer alan kazanımları bilmediği ve öğretim sürecini de hedef ve kazanımlar doğrultusunda planlamadığı görülmektedir. Öğretmenin AMB kapsamında yetersiz olması AÖB'sinde de elde edilen sonuçlarla örtüşmektedir. Öğretim programında belirtilen kesir öğretimine özgü yöntem ve tekniklerin kullanılmaması, model, materyal ve araç-gereçlerin öğretim sürecine dahil edilmemesi, farklı anlamlarının verilmemesi ve kesir öğretiminde kavramsal boyutun eksik bırakılarak genellikle algoritmaya dayalı işlemsel uygulamaların yapılmasının sebepleri arasında öğretmenin AMB'sinin eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir. Öğretmenin bu konuda yeterli bilgiye sahip olmaması sonucu kesir öğretimi süreci öğretim programında belirtildiği şekilde 35 ders saati değil 25 ders saati yapılmıştır. Öğretim programında kesir öğretimine ayrılan süre öğretmen tarafından göz ardı edilerek diğer bir alt öğrenme alanı olan ondalık gösterim konusuna geçilmiştir.

4. Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada bir ortaokul matematik öğretmeninin matematik öğretme bilgisi alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi bileşenleri boyutunda ele alınmıştır. Çalışmada ulaşılan sonuçlar doğrultusunda çalışmada yer alan öğretmenin alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisi bileşenleri kapsamında yeterli olmadığı buna paralel ÖMB'sinin de kısıtlı olduğunu göstermiştir.

GAB ve UAB kapsamında çalışmada yer alan öğretmenin kesir ve kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerle ilgili gerekli matematiksel düşünceye sahip olmadığı görülmüştür. Bu durum öğretmenin sınıf içi uygulamalarına da yansımıştır. Öğretmen kesir kavramını sadece parça-bütün anlamı ile tanımlamaktadır. Bu durum öğretmenin UAB'sinin yetersiz olduğunu göstermekle beraber KAB ve AÖtB'sinin de eksik olmasına sebep olmaktadır.

Öğretim sürecinde kesir kavramı eksik bırakılmış ve sadece parça-bütün anlamına yönelik bir öğretim gerçekleştirilmiştir. Clarke ve arkadaşları (2008) ilkokul kesir öğretiminde parça-bütün anlamının yanı sıra bölüm, ölçme, oran ve işlemci anlamalarının verilmemesinin öğrencilerde kesir kavramına ilişkin eksik anlayışa sebep olunacağını belirtmektedir. Öğretmenin kısıtlı kavrayışının kesirlerle işlemlerde de olduğu görülmüştür. Öğretmen tarafından işlemlere yönelik çözüm ve açıklamalar ezberlenmiş kalıp ifadelerden oluşmaktadır. Kinach (2002) kesirlerle gerçekleştirilen işlemlere yönelik öğretmenlerin yaptıkları açıklamaların genelde kural ve işlemlere dayalı olduğu belirtilmektedir. Yapılan çalışmalarda kesirlerle bölme konusunda öğretmenlerin "ters çevir-çap" yöntemini uyguladıkları ve öğrencilerine de bu matematiksel işlemin altında yatan sebebi açıklayamadıkları görülmektedir (Holm ve Kajander, 2011; Klemer, Rapoport ve Lev-Zamir, 2018). Baumert ve arkadaşları (2010) bir öğretmenin matematiği öğretebilmesi için öncelikle matematiği kavramsal olarak anlamasının öncelikli olduğunu belirtmiştir. Bu doğrultuda bir öğretmenin kesirlerle işlemleri gerçekleştirmesinin ötesinde bu işlemin kavramsal alt yapısını ve matematiksel anlamını bilmesi önem kazanmaktadır (Kajander ve Holm, 2016).

Öğretmenin kesirlere yönelik alan bilgisinin eksik olmasının pedagojik alan bilgisine de yansıdığı görülmüştür. Kieren (1993) ve Fazio ve Siegler (2011) çalışmalarında a/b şeklinde ifadelerin öğretmenler tarafından tanımlanmasında hatalı sınıflamaların yapıldığı belirtilmiştir. Benzer şekilde Burak öğretmenin de kesirlerin farklı anlamlarını bilmemesi sebebiyle kesir, rasyonel sayı ve oran kavramlarına ilişkin tanımlarının net olmadığı ve aralarındaki benzerlik/farklılık durumlarını doğru şekilde ayırt edemediği görülmektedir. Öğretmenin alan bilgisinin yetersizliği sebebiyle kesirlerle işlemler, algoritmaya dayalı ve işlem odaklı gerçekleştirilmiştir. Pantziara ve Philippou (2011) kavramsal anlamaya yeteri kadar zaman ayrılmamasının öğrencilerde kesir kavramı ve gerçekleştirilecek işlemlere yönelik yanılgılara sebep olacağını belirtmektedir. Özellikle kavramsal anlamın verilmeden işlem ve algoritmaların sunulması ve işleme dayalı öğretimin gerçekleşmesi öğrencilerin kesirle ilgili ezber yapmalarına sebep olmaktadır (Mok, Cai ve Fong-Fung, 2008). Benzer şekilde Hanson (1995) öğrencilerin algoritmaya dayalı işlemleri ezberlemeye çalışmalarının hata ve yanılgılara sebep olan etkenlerden olduğunu ifade etmektedir. Charalambous ve Pitta-Pantazi (2005) kesirlerin ölçme anlamının kesirlerle çarpma işleminin gerçekleştirilmesinde önemli bir kavramsal bilgi olduğunu belirtmektedir. Çalışmada öğretmenin KAB kapsamında kesirlerin anlamlarına yönelik bilgisi ortaya çıkarılmış ve ölçme, işlemci ve bölüm anlamlarının farkında olmadığı, buna paralel olarak da dersinde sadece parça-bütün anlamına dayalı öğretim yaptığı görülmüştür. Öğretmenin alan bilgisinin yetersiz olması sebebiyle kesirlerle gerçekleştirilen işlemlerin gerektirdiği matematiksel mantığı bilmediği ve öğretimini algoritmaya dayalı gerçekleştirdiği görülmektedir.

Kesirler konusunda öğretimin uygun şekilde yapılandırılması, temsillerin nasıl kullanılacağının bilinmesi öğrencilerin öğrenmelerini etkilediği için öğretmenlerin sahip olmaları gereken pedagojik bilgidir (Kajander ve Boland, 2014; Mitchell, Charalambous ve Hill, 2014). Çalışmada yer alan öğretmenin alan bilgisi kapsamında kesirlerin sadece parça-bütün anlamına odaklandığı ve buna paralel öğretiminde de sadece parça-bütün anlamına yönelik gösterimler yaparak bölge (alan) modelini kullandığı görülmüştür. Benzer şekilde öğretmenin kesir materyalleri (kesir çubukları, kesir takımı, vb.) ve araç-gereçleri kullanmadığı görülmektedir. Bu sonuçlara dayalı olarak öğretmenin AÖtB'nin düşük olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Benzer şekilde Chestnut-Andrews (2007)'nin çalışmasında pedagojik alan bilgisi düşük olan öğretmenlerin öğretim sürecini çeşitlendirmede yetersiz kaldıklarını belirtmektedir.

Öğrencilerin kesir kavramına ilişkin yaşadıkları zorluk ve yanılgılarının sebepleri arasında öğretim sürecinin özensiz gerçekleştirilmesi bulunmaktadır (Reys ve ark., 1998; Van de Walle ve ark., 2013). Öğretim programında a/b şeklindeki ifadeye örnek olarak ¼ kesri verilmiş ve "*Kesir gösterimlerinin okunmasında, parça-bütün ilişkisini vurgulayacak ifadeler kullanılır. Örneğin ¼ kesri "dörtte bir" biçiminde okunur ve bir bütünün 4'e bölünüp bir parçası alındığı şeklinde açıklanır*" şeklinde ifade edilmiştir (MEB, 2018; s. 40). Çalışmada yer alan öğretmenin AMB'sinin yetersiz olması sebebiyle kesir ifadesinin okunmasına dikkat etmediği görülmüştür. Özellikle öğrencilerin kesirlerin okunuşunda pay ve payda yazımında yanılgıların olduğu öğretmen tarafından ifade edilmiştir. Bu yanılgıya ilişkin kendi çözümünün de "bölüm" ifadesini vurgulamak olduğu görülmüştür. Siebert ve Gaskin (2006) çalışmasında kesirlerin ifade edilmesinde "üç bölü dört" şeklinde ifadelerden kaçınılması ve "dörtte üç" denilmesinin uygun olduğunu belirtmiştir. Çalışmada yer alan öğretmenin bu şekilde bir ifade kullanmasının öğrencilerin pay ve paydaya yönelik yanılgıya sebep olduğu düşünülmektedir. Bunun yanı sıra Burak öğretmen öğrencilerin kesirlerle ilgili yaşadıkları kavram yanılgılarını örneklendirmede sadece pay ve paydanın yerini belirleyememeyi belirtmiştir. Benzer şekilde, yapılan çalışmalarda da (Amato, 2005; Siegler, 2003; Soylu ve Soylu, 2002) öğretmenlerin öğrencilerin kesirlerde sahip oldukları yanılgıları öngörmede yetersiz oldukları belirtilmiştir. Shulman (1986) öğrencilerin kavram yanılgılarının belirlenme ve giderilmesinde pedagojik alan bilgisinin etkili olduğunu belirtmiştir. Çalışma doğrultusunda öğretmenin öğrencilerin var olan yanılgılarının farkında olmadığı, ortaya çıkarma ve gidermede AÖB'sinin yeterli olmadığı görülmektedir. Öğretmenin AÖB'sinin yetersiz olduğu sınıfında yer alan özel gereksinimli öğrencilerin özelliklerini bilmediği ve ihtiyaçlarını dikkate almadığı görülmüştür. Öğretmenlerin özel gereksinimli öğrencilerin ihtiyaçları ve özelliklerine yönelik bilgilerinin incelendiği çalışmalarda da (Brownell, Ross, Colon ve McCallum, 2005;

Donnely ve Watkins, 2011; Savolainen, 2009) benzer şekilde öğretmenlerin özel eğitim konusu ile ilgili yetersiz bilgiye sahip oldukları ve sınıflarında sınırlı uygulamalar yaptıkları ortaya konulmuştur. Bu çalışmada yer alan öğretmenin özel gereksinimli öğrencilerin ihtiyaçları konusunda yeterli bilgiye sahip olmaması beraberinde bu öğrencilere yönelik öğretim planlamasında da eksikliklerinin olmasına sebep olmuştur. Öğretmenin öğrencilerin bireysel özelliklerini ve ihtiyaçlarını göz önünde bulundurarak öğretim planlamadığı ve AÖtB'sinin de bu anlamda yetersiz olduğu görülmektedir. Bu sonuç öğretmenin AÖB'sinin AÖtB'sini de etkilediğini göstermektedir.

Çalışmada yer alan öğretmenin ders içeriğini öğretim programında belirtilen kazanımlar doğrultusunda planlamadığı görülmüştür. Öğretmenin müfredata yönelik bilgisinin yetersiz olması sebebiyle ders içeriği, programda belirlenen hedef ve kazanımlar çerçevesinde işlenmemiş, programda belirtilen öğretim yöntem ve teknikleri, model ve araç-gereçler, etkinlikler uygulanmamıştır. Bu sonuç, öğretmenin AMB'sinin yetersiz olmasının AÖtB'yi de etkilediğini göstermektedir. Ayrıca çalışmada yer alan öğretmen kesirler ve kesirlerle işlemler öğretimini 25 ders saatinde tamamlayarak programda belirtilen sürenin dışına çıkmıştır. Öğretmenin müfredatta yer alan kazanımlara ilişkin bilgisinin yetersizliği sebebiyle programda belirtilen kesirlerin kavramsal bilgi boyutu eksik bırakılmış algoritmaya dayalı uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuçlar neticesinde kesir öğretiminde öğretmenin alan bilgisinin yetersiz olmasının pedagojik alan bilgisinin de kısıtlı olmasına sebep olduğu ve bu durumun sınıf içi öğretimi de olumsuz etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

5. Öneriler

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda matematik öğretmenlerinin alan bilgilerinin ve pedagojik alan bilgilerinin yeterli olacak düzeye getirilmesinin önemli olduğu sonucuna ulaşılmaktadır. Bu sonuca dayalı olarak öğretmenlerin hizmet öncesi (lisans eğitimi) ve hizmet içi (kurs, program, vb.) eğitimlerle alan bilgisi ve pedagojik alan bilgisinin desteklenebileceği düşünülmektedir. Mesleki gelişim programlarında öğretmenlerin zorluk yaşadığı ve yanılgıya sahip oldukları konular arasında olan kesirlere odaklanılarak ne olduğu ve nasıl öğretilebileceği konusuna yer verilebilir. Öğretmenlere kesirlerle yapılan işlemlerin matematiksel anlamı sunularak kesir kavramına yönelik anlayış geliştirilebilir. Bunun yanı sıra kesirler konusunda öğrencilerin yaşadıkları zorluklar ve yanılgılarına ilişkin örnek durumlar verilerek olası sebeplerin neler olabileceği ve giderilme yolları tartışılabilir. Aynı zamanda sınıf içi uygulamalar yolu ile çözüm yollarının etkililiği değerlendirilebilir. Öğretmenlerin kesir öğretimini anlamlı hale getirecek ve zengin öğrenme fırsatları sunacak öğretim modellerini, materyallerini ve araç-gereçlerini öğrenmeleri sağlanarak kullanmaları konusunda desteklenmeleri sağlanabilir. Mesleki gelişim programlarında özel eğitim konusunda öğretmenler bilgilendirilerek sınıflarında yer alan özel öğrencilere yönelik bilgiler sunabilir. Bu sayede öğretimlerinde bu öğrencilerin yer almaları da sağlanabilir.

Bu çalışma tek bir matematik öğretmeni ile gerçekleştirilmiştir. Daha fazla katılımcı ile yürütülen çalışmalar, öğretmenlerin kesirlerle ilgili bilgileri ve kesirleri öğretme konusunda daha fazla bilgi sahibi olmamızı sağlayabilir. Bu çalışma, matematiği öğretme bilgisinin kesirler ve kesirleri öğretme bağlamında yürütülmüştür. Çeşitli matematik konuları ve kavramları üzerine yapılan araştırmalar, öğretmenlerin alanı öğretme bilgileri üzerine kapsamlı bir çalışma ağı oluşturabilir. Bu sayede matematik öğretmenlerinin çeşitli öğrenme alanları ve eksikliklerini ve dolayısıyla bu tür eksikliklere çözümler getirmek için bir fırsatlar elde edilebilir.

Ekler

Ek 1. ÖMB Görüşme Formu

Sayın hocam,
Görüşmemiz, kesirlerin öğretimini gerçekleştirme sürecinize ilişkin görüşlerinizi belirlemek amacıyla gerçekleştirilecektir. Görüşme içeriğimiz ve kişisel bilgileriniz tamamen gizli tutulacak olup üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır. Cevaplarınızı eksiksiz kaydedebilmek için ses kaydı kullanacağım. İzniniz olursa görüşmemize başlayabiliriz.

C. Kişisel Bilgiler

1. Hangi Fakülteden mezun oldunuz?
2. Mesleğinizde kaçıncı yılınız?
3. Bu okulda kaç yıldır görev yapmaktasınız?
4. Kaçıncı sınıfların matematik derslerine girmektesiniz?

D. Kesirler Konusuna Yönelik ÖMB Soruları

B. 1. Konu Alan Bilgisi Soruları

B. 1. 1. GAB

1. Kesir nedir? Kesir kavramını nasıl tanımlarsınız?

2. $\frac{7}{11}$, ifadesini nasıl okursunuz?
3. Kesirlerin toplama veya çıkarma işlemini nasıl gerçekleştirirsiniz?
4. Kesirlerin çarpma işlemini nasıl gerçekleştirirsiniz?
5. Kesirlerin bölme işlemini nasıl gerçekleştirirsiniz?
6. Aşağıdaki işlemleri yapınız:

$$\frac{2}{3} \text{x} \frac{3}{4} \qquad \frac{5}{7} \div \frac{8}{9} =$$

7. Kesirlerin bölme işlemini nasıl gerçekleştirirsiniz?

B.1. 2. UAB

1. Size göstereceğim ifadelerden hangilerinin kesir olduğunu düşünüyorsunuz. Her bir ifade için açıklama yapabilir misiniz?

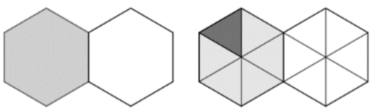
$$\frac{\pi}{4}, \frac{0}{2}, \frac{2}{0}, -\frac{2}{4}, \frac{2}{4}, \frac{-2}{-4}, \frac{0}{0}, \frac{\sqrt{5}}{7}, \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{49}}{5}, 9, 0, \frac{3}{5}, \frac{a+b}{a-b}$$

2. $\frac{3}{4} \div n$ ifadesi n'in hangi durumları için kesir ifade edebilir?
3. Birim kesir nedir?
4. Tam sayılı kesir nedir?
5. Denk kesir nedir?
6. Kesirlerde eşitlik ve denklik ifadeleri aynı/farklı mıdır?
7. Kesirlerde toplama veya çıkarma işlemi yapılırken paydalar neden eşitlenir? Bu işlemin altındaki matematiksel mantık nedir?
8. Kesirlerde bölme işleminde "Birinci kesir sabit durur, ikinci kesir ters çevrilir" ifadesinin matematiksel açıklaması nedir?

B.1. 3. KAB

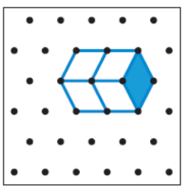
1. Kesirlerin öğrenilmesi öğrenci için neden önemlidir? Kesirler hangi konuların öğrenilmesine temel oluşturur?
   - İleri seviye konular
   - Günlük hayatla ilişkisi
2. Kesirlerin hangi anlamları vardır?
   - Rasyonel sayı ile ilişkisi
   - Yüzde gösterim
   - Ondalık gösterim
3. Size okuyacağım ifadelerde yer alan kesirlerin neyi ifade ettiğini açıklar mısınız?
   - Bir sınıfın 5'te 3'ü
   - 8 de 5 kesrine ulaşmak için 1/8 kesrinden kaç tane kullanmalıyız?
   - Bir sınıftaki kızların sayısının erkeklerin sayısına göre karşılaştırılması
   - 7 tane kurabiyenin 9 öğrenciye paylaştırılması
   - 50 m^2 arazinin 4'te 1'i

4. Şekilde örüntü blokları ile temsil edilmiş kesir ifadesi bulunmakta. Bu temsili işlem sizce nedir?



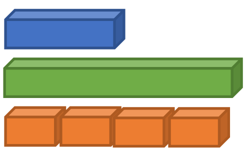
5. $\frac{2}{3}$'nin $\frac{1}{6}$'sını bulunuz.
6. Şekildeki gösterimlerin neyi ifade ettiğini açıklayınız.

$\frac{1}{5}$ kesrinin gösterimi;

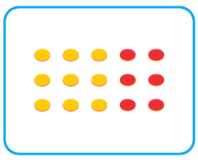


$\frac{1}{2} \times 4 = 2$ işleminin gösterimi;

Yeşil çubuk: 1 br
Mavi çubuk: 1/2 br
Turuncu çubuk: 1/4 br



$\frac{6}{9}$ gösterimi;

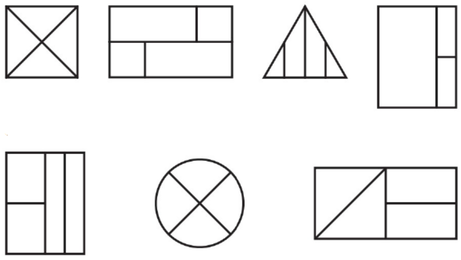


7. Kesirlerin öğretiminde siz hangi gösterimi kullanıyorsunuz?
8. Hangi gösterimin hangi seviye için daha uygun olduğunu düşünüyorsunuz?

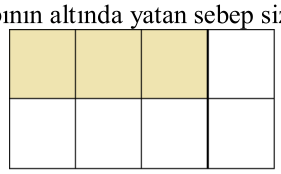
C. Pedagojik Alan Bilgisi

C. 1. AÖB

1. Öğrenciler kesirlerin öğreniminde ne tür zorluklar yaşamaktadır?
2. Sizin bu zorluklara karşı aldığınız önlemler var mı? Neler?
3. Öğrenciler kesirlerde hangi kavram yanılgılarına sahipler?
4. Göstereceğim şekillere yönelik bir öğretmenin "hangisi ¼'ü temsil eder sorusuna ilişkin öğrenci cevabı hepsi olmuştur. Öğrencinin yanıtını değerlendiriniz. Bu yanıtı veren öğrenci için açıklamanız ne olur?



5. $\frac{13}{5}+\frac{2}{22}=\frac{15}{25}$ işlemine yönelik öğrencinin yaptığı çözümü değerlendiriniz. Öğrencinin bu yaptığının sebebi ne olabilir? Nasıl bir açıklamada bulunursunuz?
6. "Çarpma işlemi çarpılan sayıları daima büyütür, bölme işlemi ise küçültür" diyen öğrencinin cevabını değerlendiriniz.
7. Göstereceğim şeklin ifadesi için öğrenci cevabı $\frac{3}{5}$ olmuştur. Öğrenci cevabını değerlendiriniz. Doğru/yanlış ya da kabul edilebilir mi? Öğrenci cevabının altında yatan sebep sizce neler olabilir?



8. Öğretim yaparken öğrencilerin hangi özelliklerine dikkat ediyorsunuz?

- Kaynaştırma,
- Öğrenme güçlüğü,
- Üstün zekâlı, vs.

C. 2. AÖtB

1. Kesir öğretimi yaparken kullandığınız yöntem ve teknikler neler?
2. Kesirleri öğretirken kullandığınız materyaller var mı? Neler?
3. Teknolojik araç-gereçlerden faydalanıyor musunuz? Ne şekilde?
4. Kesirleri öğretirken kullandığınız gösterimler var mı? Neler?

C. 3. AMB

1. Kesirler konusundaki kazanımların yeterli olduğunu düşünüyor musunuz?
2. Kazanımların ilerleyişi hakkındaki düşünceleriniz neler?

Ek 2. Gözlem Formu

Tarih:

1. Kesir tanımı nasıl yapıldı?
2. Kesir ifadesinin okunuşu nasıl yapıldı?
3. Kesir çeşitlerinin tanımlanması nasıl yapıldı?
   Birim kesir;
   Tam sayılı kesir;
   Denk kesir;
4. Kesirlerle işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) nasıl tanımlandı ve gerçekleştirildi?
5. Kesirlerin farklı anlamları verildi mi?
6. Kesirlerin çoklu gösterimi yapıldı mı?
7. Kesir konusuna ilişkin hedef ve kazanımları biliyor mu?
8. Öğretim amaç ve kazanımlar doğrultusunda gerçekleştiriliyor mu?
9. Öğrencilerin ön bilgileri ortaya çıkarıldı mı?

10. Öğrenci zorluklarını ve kavram yanılgılarını ortaya çıkardı mı? Olası zorluk ve yanılgılara yönelik önlem alındı mı?
11. Öğrencilerin bireysel özelliklerine yönelik bireyselleştirilmiş öğretim yapıldı mı?
12. Kesirlerin diğer anlamları ile ilişkilendirme yapıldı mı?
13. Konuya yönelik günlük hayat veya diğer disiplinler ile ilişkilendirme yapıldı mı?
14. Hangi yöntem ve teknikler kullanıldı? Teknolojik araç-gereç, materyal ya da model kullanıldı mı?
15. Ölçme ve değerlendirme nasıl yapıldı?

Diğer Açıklamalar

Etik Kurul Onay Bilgileri: Araştırma ile ilgili Yozgat Bozok Üniversitesi, Proje Koordinasyon Uygulama ve Araştırma Merkezi Müdürlüğü Etik Kurulu'ndan 30/04/2020 tarih ve E.10353 evrak numarası ile etik kurul uygunluk onayı alınmıştır.

Kaynaklar / References

Amato, A. S. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Australia.

Aslan-Tutak, F., & Köklü, O. (2016). Öğretmek için matematik bilgisi. E. Bingölbali, S. Arslan & İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler* içinde (s. 701-720). Ankara: Pegem Akademi.

Baek, J. M., Wickstrom, M. H., Tobias, J. M., Miller, A. L., Safak, E., Wessman-Enzinger, N., & Kirwan, J. V. (2017). Preservice teachers' pictorial strategies for a multistep multiplicative fraction problem. *The Journal of Mathematical Behavior, 45*, 1-14. doi: 10.1016/j.jmathb.2016.10.005

Bailey, D. H., Hoard, M. K., Nugent, L., & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(3), 447-455. doi: 10.1016/j.jecp.2012.06.004

Ball, D. L., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Yi-Miau, T. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180. doi:10.3102/0002831209345157

Begle, E. (1979). *Critical variables in mathematics education: Findings from a survey of the empirical literature*. Washington, DC: The Mathematical Association of America and the National Council of Teachers of Mathematics.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Brownell, M. T., Ross, D. D., Colon, E. P., & McCallum, C. L. (2005). Critical features of special education teacher preparation: A comparison with general teacher education. *The Journal of Special Education, 38*(4), 242-252.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pintazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the international group for the psychology of mathematics education, 2,* 233-240.

Chestnut-Andrews, A. (2007). *Pedagogical content knowledge and scaffolds: Measuring teacher knowledge of equivalent fractions in a didactic setting*. (Doctoral Dissertation). City University of New York.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2008). 10 practical tips for making fractions come alive and make sense. *Mathematics Teaching in The Middle School*, *13*(7), 372-380.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in The Middle School*, *13*(8), 490-496. doi: 10.5951/MTMS.13.8.0490

Davis, G. E. (2003). Teaching and classroom experiments dealing with fractions and proportional reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *22*(2), 107-111. doi:10.1016/S0732-3123(03)00016-6

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12-25. doi: 10.1016/j.tate.2013.03.001

Donnelly, V., & Watkins, A. (2011). Teacher education for inclusion in Europe. *Prospects*, *41*(3), 341-353. doi: 10.1007/s11125-011-9199-1

Eli, J. A., Mohr-Schroeder, M. J., & Lee, C. W. (2013). Mathematical connections and their relationship to mathematics knowledge for teaching geometry. *School Science and Mathematics, 113*(3), 120-134. doi:10.1111/ssm.12009

Fazio, L. K., DeWolf, M., & Siegler, R. S. (2016). Strategy use and strategy choice in fraction magnitude comparison. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 42*(1), 1-16. doi: 10.1037/xlm0000153

Fazio, L. K., & Siegler, R. S. (2011). *Teaching fractions.* Educational Practices Series 22. Geneva: International Academy of Education International Bureau of Education.

Fernandez, M. L. (2005). Learning through microteaching lesson study in teacher preparation. *Action in Teacher Education, 26*(4), 37-47. doi:10.1080/01626620.2005.10463341

Ferrini-Mundy, J., & Findell, B. (2001). The mathematical education of prospective teachers of secondary school mathematics: Old assumptions, new challenges. In *CUPM discussion papers about mathematics and the mathematical sciences in 2010: What should students know?* (pp. 31-41). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Flores, A., Samson, J., & Yanık, H. B. (2006). Quotient and measurement interpretations of rational numbers. *Teaching Children Mathematics, 13(1),* 34-39.

Fraenkel, J. R., & Wallen, N. E. (2006). *How to design and evaluate research in education*. New York: McGraw-Hill.

Fuchs, L. S., Schumacher, R. F., Long, J., Namkung, J., Hamlett, C. L., Cirino, P. T., ... Changas, P. (2013). Improving at risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology, 105*(3), 683-700. doi: 10.1037/a0032446

Goulding, M., Hatch, G., & Rodd, M. (2003). Undergraduate mathematics experience: Its significance in secondary mathematics teacher preparation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*(4), 361-393. doi:10.1023/A:1026362813351

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education.* New York: Teachers College Press.

Hanselman C. A. (1997). Stop using foul language in the mathematics classroom. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(2), 154-160.

Hanson, D. (1995). *Understanding fractions (Grades 5 to 8)*. Retrieved from http://mathcentral.uregina.ca/RR/ database/RR.09.95/hanson4.html

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351. doi:10.2307/30034819

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4). 372-400.

Hill, H. C., Rowan, R., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H. C., Schilling, S. G., & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007). Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts? In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age.

Holm, J., & Kajander, A. (2011). "I finally get it": Developing mathematical understanding during teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*(5), 563-574. doi: 10.1080/0020739X.2011.62280

Işık, C., & Kar, T. (2012). An error analysis in division problems in fractions posed by preservice elementary mathematics teachers. *Educational Sciences: Theory and Practice, 12*(3), 2303-2309.

Işıksal, M., & Çakıroglu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: the case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(3), 213-230. doi:10.1007/s10857-010-9160-x

Joyner, V. (1994). *Elementary school teachers' knowledge of rational number concepts*. A paper presented at the Annual Conference of the National Council of Teachers of Mathematics in Indianapolis, Indiana.

Kajander, A., & Boland, T. (2014). *Mathematical models for teaching: Reasoning without memorization.* Toronto, ON: Canadian Scholars' Press.

Kajander, A., & Holm, J. (2016). What math matters? Types of mathematics knowledge and relationships to methods course performance. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(3), 273-283. doi: 10.1080/14926156.2016.1183837

Kamii C., & Dominick, A. (1998). The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In L. J. Morrow, M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics* (pp. 130-140). Reston (VA): NCTM.

Kellman, P. J., Massey, C. M., Roth, Z., Burke, T., Zucker, J., Saw, A., ... Wise, J. (2008). Perceptual learning and the technology of expertise: Studies in fraction learning and algebra. *Learning Technologies and Cognition: Special issue of Pragmatics & Cognition, 16*(2), 356-405.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fractions and non-standard representations: Pre-service teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics, 27*(2), 191-204.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49 -84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kinach, B. M. (2002). Understanding and learning-to-explain by representing mathematics: Epistemological dilemmas facing teacher educators in the Secondary mathematics "methods" course. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(2), 153-186. doi: 10.1023/A:1015822104536

Kleickmann, T., Richter, D., Kunter, M., Elsner, J., Besser, M., Krauss, S., & Baumert, J. (2013). Teachers' content and pedagogical content knowledge: The role of structural differences in teacher education. *Journal of Teacher Education, 64*(1), 90-106. doi: 10.1177/0022487112460398

Klemer, A., Rapoport, S., & Lev-Zamir, H. (2019). The missing link in teachers' knowledge about common fractions division. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(8), 1256-1272. doi:10.1080/0020739X.2018.1522677

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte: Information Age Publishing.

Li, Y., & Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: The case of fraction division. *ZDM Mathematics Education, 40*(5), 833-843. doi:10.1007/s11858-008-0148-2

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*(6), 481-500. doi: 10.1007/s10857-012-9221-4

Luo, F., Lo, J.-J., & Leu, Y.-C. (2011). Fundamental fraction knowledge of preservice elementary teachers: A cross-national study in the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics, 111*(4), 164-177. doi: 10.1111/j.1949-8594.2011.00074.x

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Magnusson, S., Krajcik, J., & Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge for science teaching. In J. Gess-Newsome & N. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 95-132). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction, 37*, 14-20. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.12.004

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction, 14*(5), 519-534. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.016.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB). (2018). *Matematik dersi (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Mitchell, R., Charalambous, C., & Hill, H. (2014). Examining the task and knowledge demands needed to teach with representations. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(1), 37-60. doi: 10.1007/s10857-013-9253-4.

Mok, I., Cai, J., & Fong-Fung, A. (2008). Missing learning opportunities in classroom instruction: evidence from an analysis of a well-structured lesson on comparing fractions. *The Mathematics Educator,11*(1-2), 111-126.

Monk, D. (1994). Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13*(2), 125-145. doi: 10.1016/0272-7757(94)90003-5

Morris, A. K., Hiebert, J., & Spitzer, S. (2009). Mathematical knowledge for teaching in planning and evaluating instruction: What can pre-service teachers learn? *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(5), 491-521.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 127-147.

National Council of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: Author.

National Mathematics Advisory Panel (NMP). (2008). *Foundations for success*. Jessup, MD: U. S. Department of Education. Retrieved from www.ed.gov/MathPanel.

Obersteiner, A., Van Dooren, W., Van Hoof, J., & Verschaffel, L. (2013). The natural number bias and magnitude representation in fraction comparison by expert mathematicians. *Learning an Instruction, 28,* 64-72. doi: 10.1016/j.learninstruc.2013.05.003.

Ölmez, İ. B., & Izsák, A. (2020). Characterizing reasoning about fraction arithmetic of middle grades teachers in three latent classes. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-29. doi: 10.1080/10986065.2020.1780368

Özel, S. (2013). An analysis of in-service teachers' pedagogical content knowledge of division of fractions. *The Anthropologist*, *16*(1-2), 1-5. doi:10.1080/09720073.2013.11891330

Pantziara, M., & Philippou, G. (2011). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics,79*(1), 61-83. doi: 10.1007/s10649-011-9338-x

Petocz, P., & Reid, A. (2003). What on earth is sustainability in mathematics? *New Zealand Journal of Mathematics*, *32*, 135-144.

Reys, R. E., Suydam, M. N., & Lindquist, M. M., & Smith, N. L. (1998). *Helping children learn mathematics.* Boston: Allen and Bacon.

Rowan, B., Chiang, F. S., & Miller, R. J. (1997). Using research on employees' performance to study the effects of teachers on student achievement. *Sociology of Education*, *70*(4), 256-284. doi: 10.2307/2673267

Sahin, Ö., Gökkurt, B., & Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(4), 531-551. doi:10.1080/0020739X.2015.1092178

Savolainen, H. (2009). Responding to diversity and striving for excellence. An analysis of international comparison of learning outcomes with a particular focus in Finland. In C. Acedo, M. Amadio, R. Opertti (Eds), *Defining an inclusive education agenda: Reflections around the 48th session of the International Conference on Education* (pp. 49-59). Geneva, UNESCO-IBE.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Shulman, L., S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Siebert, D., & Gaskin, N. (2006). Creating, naming, and justifying fractions. *Teaching Children Mathematics, 12*(8), 394-400.

Siegler, R. S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In Kilpatrick, J., Martin, W. B., & Schifter, D. E. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 219-233). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE 2010-4039). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Retrieved from https://ies.ed.gov/ncee/wwc/Docs/PracticeGuide/fractions_pg_093010.pdf

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233-254. doi: 10.2307/749346

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 3-17). Reston, VA: NCTM.

Soylu Y, & Soylu C. (2002). Learning difficulties of 5th class in primary education at fraction: ordering, adding, subtraction, multiplication in fraction and problems related to fraction. *Erzincan University Journal of Education, 7*(2), 101-117.

Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2013). Preservice mathematics teachers' knowledge of students about the algebraic concepts. *Australian Journal of Teacher Education*, *38*(2), 1-18.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25. doi:10.2307/749817

Toluk, Z. (2002). İlkokul öğrencilerinin bölme işlemi ve rasyonel sayıları ilişkilendirme süreçleri. *Boğaziçi Üniversitesi Eğitim Dergisi*, *19*(2), 81-101.

Vamvakoussi, X. & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: a conceptual change approach. *Learning and Instruction, 14*(5), 453-467. doi: 10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 344-355. doi: 10.1016/j.jmathb.2012.02.001

Van de Walle, Karp, & Bay-Williams (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8th Edition). Boston: Pearson.

Van Dooren, W., Lehtinen, E., & Verschaffel, L. (2015). Unraveling the gap between natural and rational numbers. *Learning and Instruction, 37,* 1-4. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2015.01.001

Warrington, M. A. (1997). How children think about division with fractions. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *2*(6), 390-94.

Webel, C., & DeLeeuw, W. W. (2016). Meaning for fraction multiplication: Thematic analysis of mathematical talk in three fifth grade classes. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 123-140. doi: 10.1016/j.jmathb.2015.12.003

Wu, H. H. (2011). *Understanding elementary school mathematics.* Washington, DC: Mathematical Association of America.

Yanık, H. B. (2013). Rasyonel sayılar. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır & A. Delice (Eds.), *Tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (s. 95-110). Ankara: Pegem Akademi.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yin, R. K. (2003). *Applications of case study research.* Beverly Hills, CA: Sage Publishing.Zhou, Z., Peverly, S. T., & Xin, T. (2006). Knowing and teaching fractions: A cross cultural study of American and Chinese mathematics teachers. *Contemporary Educational Psychology, 31*(4), 438-457. doi:10.1016/j.cedpsych.2006.02.001