Ordu Üniv. Bil. Tek. Derg.,Cilt:4,Sayı:1,2014,59-74/Ordu Univ. J. Sci. Tech.,Vol:4,No:1,2014,59-74

İNVOLÜT B-SCROLL ÜZERİNE YENİ BİR BAKIŞ

Süleyman ŞENYURT *

Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi ,Matematik Bölümü, Ordu

ÖZET

Bu çalışmada, eğrisi $\sim$ eğrisinin bir involütü olarak alındığında involüt eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu $\sim$ eğrisinin W Darboux (Jean Gaston Darboux,1842-1917) vektörü ile B binormal vektörü arasındaki ¨ açısına bağlı olarak verildi. Bu durumda involüt eğri boyunca oluşan B-scroll'un Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, I. ve II. temel formları yeniden hesaplanmıştır. Son olarak da helis eğrisi boyunca oluşan involut B-scroll'ların mapple programı ile çizimi verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: B-scroll, involüt B-scroll
Mathematics Subject Classification: 53A04

ON INVOLUTE B-SCROLL A NEW VIEW

ABSTRACT

In this paper, when is considered as the involute of the $\sim$ curve, Frenet vectors, curvature and torsion of are given, respectively depending on the angle , ¨ which is between W Darboux vector and B binormal vector of $\sim$ curve. In this case, Gaussian and mean curvatures, I. and II. Fundamental forms of B-scroll generated by involute curve have been calculated. Finally the involute B-scrolls generated by helix curve have drawn application.

Keywords: B-scroll, involüt B-scroll
Mathematics Subject Classification: 53A04

* *Sorumlu Yazar:* senyurtsuleyman@hotmail.com

1. GİRİŞ

$\sim : I \rightarrow E^3$, $\sim(s) = (\sim_1(s), \sim_2(s), \sim_3(s))$ diferensiyellenebilir birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğrinin Frenet 3-ayaklısı

$$\begin{cases} T(s) = \sim'(s) \\ N(s) = \dfrac{\sim''(s)}{\left\|\sim''(s)\right\|} \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases} \qquad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\sim$ eğrinin eğriliği $\copyright(s)$, torsiyonu ${}^{2}(s)$ ile gösterilirse

$$\begin{cases} \copyright(s) = \left\|\sim''(s)\right\| \\ {}^{2}(s) = \dfrac{\langle \sim' \times \sim'', \sim''' \rangle}{\left\|\sim' \times \sim''\right\|^2} \end{cases} \qquad (1.2)$$

olur. T, N ve B Frenet vektörleri ile bu vektörlerin türev vektörleri arasında

$$\begin{cases} T'(s) = \copyright(s) N(s), \\ N'(s) = -\copyright(s) T(s) + {}^{2}(s) B(s), \\ B'(s) = -{}^{2}(s) N(s) \end{cases} \qquad (1.3)$$

bağıntı vardır ve bu bağıntıya Frenet formülleri adı verilir, $[3]$.

Tanım 1.1: $\sim : I \rightarrow E^3$ ve $\ : I \rightarrow E^3$ eğrileri verilmiş olsun. $\sim$ eğrisinin teğet doğruları   eğrisinin teğet doğrularına dik oluyorsa   eğrisine $\sim$ eğrisinin bir **involütü** denir.   eğrisi $\sim$ eğrisinin bir involütü ise

$$\ (s) = \sim(s) + {}^{\text{a}}(s) T(s), \quad {}^{\text{a}} \in IR. \qquad (1.4)$$

Teorem 1.1: $\ : I \rightarrow E^3$ eğrisi $\sim : I \rightarrow E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. Bu durumda $\sim(s)$ ve $\ (s)$ noktaları arasındaki uzaklık

$$d(\sim(s), \ (s)) = |c - s|, \quad c = sbt, \quad \forall s \in I \qquad (1.5)$$

dır, $[3]$.

Teorem 1.2: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ ve eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ ile gösterilirse bu çatılar arasında

$$\begin{cases} T^* = N \\ N^* = -\dfrac{\text{©}}{\sqrt{\text{©}^2 + \text{²}^2}} T + \dfrac{\text{²}}{\sqrt{\text{©}^2 + \text{²}^2}} B \\ B^* = \dfrac{\text{²}}{\sqrt{\text{©}^2 + \text{²}^2}} T + \dfrac{\text{©}}{\sqrt{\text{©}^2 + \text{²}^2}} B \end{cases} \tag{1.6}$$

bağıntısı vardır, [6].

Teorem 1.3: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ eğrisinin eğrilikleri © ve ², eğrisinin eğrilikleri ©^* ve ²^* ise bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \text{©}^* = \dfrac{\sqrt{\text{©}^2 + \text{²}^2}}{\text{ª}\text{©}}, \quad \text{ª} = c - s \\ \text{²}^* = \dfrac{\left(\dfrac{\text{²}}{\text{©}}\right)' \text{©}}{\text{ª}\left(\text{©}^2 + \text{²}^2\right)} \end{cases} \tag{1.7}$$

bağıntısı vardır, [6].

Teorem 1.4: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ ve eğrisinin $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ Frenet çatıları arasında

$$\begin{cases} \dot{T}^* = \dfrac{-1}{\mathsf{a}} T + \dfrac{\mathsf{2}}{\mathsf{a}©} B \\ \dot{N}^* = \dfrac{©^{\mathsf{2}} \left(\dfrac{\mathsf{2}}{©} \right)'}{\left(©^2 + \mathsf{2}^2 \right)^{3/2}} T - \dfrac{\sqrt{©^2 + \mathsf{2}^2}}{\mathsf{a}©} N + \dfrac{©^2 \left(\dfrac{\mathsf{2}}{©} \right)'}{\left(©^2 + \mathsf{2}^2 \right)^{3/2}} B \\ \dot{B}^* = \dfrac{1}{\mathsf{a}} T - \dfrac{\mathsf{2}}{\mathsf{a}©} B \end{cases} \qquad (1.8)$$

bağıntısı vardır, $[4]$.

Sonuç 1.1:
a) $\mathsf{2} = 0 \Rightarrow \mathsf{2}^* = 0$ olur. Bu durumda eğriler düzlemseldir.
b) $\mathsf{2} \neq 0$ ve $\mathsf{2} = sabit$ ise $\mathsf{2}^* = \dfrac{©'\mathsf{2}}{\mathsf{a}©\sqrt{©^2 + \mathsf{2}^2}}$
c) $\sim$ eğrisi helis ise $\sim^*$ düzlemseldir.

Teorem1.5: $\sim : I \rightarrow E^3$ eğrisi boyunca oluşan B-scroll'un şekil operatörüne karşılık gelen matris S ile gösterilirse bu matris

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{© - u\mathsf{2}' + u^{2}\mathsf{2}^{2}©}{\left(u^{2}\mathsf{2}^{2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{\mathsf{2}}{u^{2}\mathsf{2}^{2} + 1} \\ -\dfrac{\mathsf{2}}{u^{2}\mathsf{2}^{2} + 1} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

dir, $[5]$.

Tanım 1.2: $\sim : I \rightarrow E^3$ eğrisi boyunca oluşan B-scroll'un K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği sırasıyla

$$\mathrm{K} = \det S = -\dfrac{\mathsf{2}^2}{\left(u^{2}\mathsf{2}^{2} + 1 \right)^{2}} \qquad (1.10)$$

$$\mathrm{H} = \dot{I}zS = \dfrac{© - u\mathsf{2}' + u^{2}\mathsf{2}^{2}©}{\left(u^{2}\mathsf{2}^{2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1.11)$$

dır, $[5,6]$.

Tanım 1.3: E^3 de bir yüzeyin 1. ve II. temel formları sırasıyla I ve II ile gösterilirse

$$I = \langle ¨_s, ¨_s \rangle dsds + \langle ¨_s, ¨_u \rangle dsdu + \langle ¨_u, ¨_u \rangle dudu$$

$$II = \langle S(d¨), d¨ \rangle \text{ ve } d¨ = ¨_s ds + ¨_u du$$

dır. Burada S yüzeyin şekil operatörüdür. Bu tanıma göre bir $\sim : I \to E^3$ eğrisi boyunca oluşan B-scroll'un 1. ve II. temel formlara karşılık gelen matris sırasıyla

$$I = \begin{bmatrix} u^2 2^2 + 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.12)$$

$$II = \begin{bmatrix} \dfrac{© - u2' + u^2 2^2 ©}{\sqrt{u^2 2^2 + 1}} & -\dfrac{2}{\sqrt{u^2 2^2 + 1}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{u^2 2^2 + 1}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.13)$$

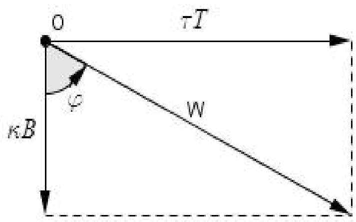
olur [6].

2. İNVOLÜT B-SCROLL ÜZERİNE YENİ BİR BAKIŞ

$\sim : I \to E^3$ eğrisi üzerinde $\{T, N, B\}$ çatısı her s anında bir eksen etrafında ani helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene Darboux ekseni denir. Bu eksen doğrultusundaki vektöre W ile gösterilirse

$$W = 2T + ©B \qquad (2.1)$$

şeklinde bulunur ve bu vektöre Darboux vektörü denir, [1]. W vektörü ile B binormal vektörü arasındaki açı ¨ ile gösterilirse şekil 1 den



Şekil 1Darboux vektörü

$$\sin\varphi = \frac{\tau}{\|W\|} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{\kappa}{\|W\|} \tag{2.2}$$

Bu durumda (1.6), (1.7) ve (1.8) ifadelerinin yeni durumları

$$\begin{cases} T^{*} = N \\ N^{*} = -\cos\varphi\, T + \sin\varphi\, B \\ B^{*} = \sin\varphi\, T + \cos\varphi\, B \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} \kappa^{*} = \dfrac{\sec\varphi}{\lambda} \\ \tau^{*} = \dfrac{\varphi' \sec\varphi}{\lambda \|W\|} \end{cases} \tag{2.4}$$

$$\begin{cases} \dot{T}^{*} = -\dfrac{1}{\lambda} T + \dfrac{\tan\varphi}{\lambda} B \\ \dot{N}^{*} = \dfrac{\varphi' \tan\varphi}{\lambda \|W\|} T - \dfrac{\sec\varphi}{\lambda} N + \dfrac{\varphi'}{\lambda \|W\|} B \\ \dot{B}^{*} = \dfrac{1}{\lambda} T - \dfrac{\tan\varphi}{\lambda} B \end{cases} \tag{2.5}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.1: $\alpha : I \to E^{3}$ birim hızlı eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olsun. α eğrisi boyunca B binormal vektörünün meydana getirdiği regle yüzeye B-scroll (binormal scroll) denir. Burada α eğrisine B-scroll'un dayanak eğrisi, B binormal vektörüne de doğrultmanı veya ana doğrusu denir. Bu durumda B-scroll parametrik denklemi

$$\varphi(s,u) = \alpha(s) + u(s) B(s) \tag{2.6}$$

şeklinde yazılır, $[2]$.

Tanım 2.2: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ nın bir involütü ve eğrisinin Frenet çatısı $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun. eğrisi boyunca B^* binormal vektörünün meydana getirdiği regle yüzeye involüt B-scroll , eğrisine dayanak eğrisi, B^* binormal vektörüne de doğrultman veya ana doğru denir. Bu durumda B-scroll parametrik denklemi

$$\ddot{}^{*}(s,v) = (s) + v(s)B^*(s) \qquad (2.7)$$

şeklinde yazılır, [4].

Teorem 2.1: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. Involüt B-scroll' un denklemi

$$\ddot{}^{*}(s,v) = \sim(s) + (ª + v\sin\ddot{}\,)T + v\cos\ddot{}\,B \qquad (2.8)$$

İspat: $\ddot{}^{*}(s,u) = (s) + v(s)B^*(s)$ ifadesinde ve B^* ın yerine sırasıyla (1.4) ve (2.3) den karşılıkları yazılırsa ispat yapılmış olur.

Teorem 2.2: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ eğrisi boyunca B-scroll'u ile eğrisi boyunca involüt B-scroll'nun arakesit eğrisinin denklemi

$$\ddot{}(s) = \sim(s) - ª\cot\ddot{}\,B(s). \qquad (2.9)$$

İspat: (2.8) bağıntısından $ª + v\sin\ddot{} = 0$ ve $v\cos\ddot{} = u$ olmalıdır. Buradan $u = -ª\cot\ddot{}$ olur. Bu değer (2.8) de yerine yazılırsa işlem tamamlanmış olur.

Teorem 2.3: $\sim : I \to E^3$ eğrisi boyunca B-scroll'un birim normal vektörü alanı $N_{\sim}$ ile gösterilirse

$$N_{\sim} = -\frac{u^2 T + N}{\sqrt{1 + (u^2)^2}}. \qquad (2.10)$$

İspat: (2.6) ifadesinin s ve u göre türevleri alınır ve bu türevler $N_{\sim} = \dfrac{\ddot{}_s \wedge \ddot{}_u}{\left\| \ddot{}_s \wedge \ddot{}_u \right\|}$ ifadesinde yerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.4: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. eğrisi boyunca involüt B-scroll'un birim normal vektörü alanı N ile gösterilirse

$$N = \frac{\cos{}^{\cdot\cdot} T - \dfrac{v^{\cdot\cdot}{}'\sec{}^{\cdot\cdot}}{\text{a}\,\|W\|} N - \sin{}^{\cdot\cdot} B}{\sqrt{1+\left(\dfrac{v^{\cdot\cdot}{}'\sec{}^{\cdot\cdot}}{\text{a}\,\|W\|}\right)^2}} \qquad (2.11)$$

İspat: (2.7) ifadesinin s ve v göre türevleri alınır ve bu türevler

$N = \dfrac{{}^{\cdot\cdot *}_{s} \wedge {}^{\cdot\cdot *}_{v}}{\left\| {}^{\cdot\cdot *}_{s} \wedge {}^{\cdot\cdot *}_{v} \right\|}$ de yerine yazılırsa

$$N = -\frac{v^{2\,*} T^* + N^*}{\sqrt{1+\left(v^{2\,*}\right)^2}}$$

Burada T^*, N^* ve $^{2\,*}$ yerine sırasıyla (2.3) ve (2.4) den karşılıkları yazılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 2.5: $: I \to E^3$ eğrisi $\sim : I \to E^3$ eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ eğrisi boyunca B-scroll'un $N_{\sim}$ birim normal vektörü alanı eğrisi boyunca involüt B-scroll'un N birim normal vektörü alanına dik ise

$$v = \frac{\text{a} \;\; W \;\; ^2 \sin{}^{\cdot\cdot} \cos^2{}^{\cdot\cdot}}{{}^{\cdot\cdot}{}'} u.$$

(2.12)

İspat: $N_{\sim} \perp N \Rightarrow \left\langle N_{\sim}, N \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow \left\langle -\frac{u^2 T + N}{\sqrt{1+\left(u^2\right)^2}}, \frac{\cos{}^{\cdot\cdot} T - \dfrac{v^{\cdot\cdot}{}'\sec{}^{\cdot\cdot}}{\text{a}\,\|W\|} N - \sin{}^{\cdot\cdot} B}{\sqrt{1+\left(\dfrac{v^{\cdot\cdot}{}'\sec{}^{\cdot\cdot}}{\text{a}\,\|W\|}\right)^2}} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow -u^2 \cos{}^{\cdot\cdot} + v^{\cdot\cdot}{}' \frac{\sec{}^{\cdot\cdot}}{\text{a}\,\|W\|} = 0$$

$$\Rightarrow v=\frac{\text{a}\,\|W\|^2 \sin \text{¨} \cos^2 \text{¨}}{\text{¨}'}u$$

Teorem2.6: $\sim : I \rightarrow E^3$ eğrisi boyunca oluşan involüt B-scroll'un şekil operatörüne karşılık gelen matris $\overline{S}$ ile gösterilirse bu matris

$$\overline{S}=\begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{\sec \text{¨}}{\text{a}}-v\left(\dfrac{\text{¨}'\sec \text{¨}}{\text{a}\|W\|}\right)^2-\dfrac{(\text{¨}')^2\sec^3 \text{¨}}{\text{a}^2\|W\|^2}}{\left(v^2\left(\dfrac{\text{¨}'\sec \text{¨}}{\text{a}\|W\|}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{\dfrac{\text{¨}'\sec \text{¨}}{\text{a}\|W\|}}{v^2\left(\dfrac{\text{¨}'\sec \text{¨}}{\text{a}\|W\|}\right)^2+1} \\ -\dfrac{\dfrac{\text{¨}'\sec \text{¨}}{\text{a}\|W\|}}{v^2\left(\dfrac{\text{¨}'\sec \text{¨}}{\text{a}\|W\|}\right)^2+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.13)$$

İspat: Involüt eğri boyunca oluşan involüt B-scroll'un şekil operatörüne karşılık gelen matris $\overline{S}$ ile gösterilirse

$$\overline{S}=\begin{bmatrix} \left\langle S\left(\text{¨}_s^*\right),\text{¨}_s^*\right\rangle & \left\langle S\left(\text{¨}_s^*\right),\text{¨}_v^*\right\rangle \\ \left\langle S\left(\text{¨}_v^*\right),\text{¨}_s^*\right\rangle & \left\langle S\left(\text{¨}_v^*\right),\text{¨}_v^*\right\rangle \end{bmatrix}$$

olur. (2.8) ve (2.11) ifadelerinden

$$\begin{cases} \dfrac{\text{¨}_s^*}{\left\|\text{¨}_s^*\right\|}=\dfrac{T^*-v2^*N^*}{\sqrt{\left(v2^*\right)^2+1}} \\ \dfrac{\text{¨}_v^*}{\left\|\text{¨}_v^*\right\|}=B^*, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S\left(\dfrac{\ddot{s}^*}{\left\|\ddot{s}^*\right\|}\right)=\dfrac{\left(©^*-v2^{*\prime}+v^2©^{*}2^{*2}\right)T^*+\left(v^22^{*}©^{*\prime}-v©^{*}2^{*}-v^3©^{*}2^{*3}\right)N^*-\left(v^22^{*3}+2^{*}\right)B^*}{\left(v^22^{*2}+1\right)^2} \\ \\ S\left(\dfrac{\ddot{v}^*}{\left\|\ddot{v}^*\right\|}\right)=\dfrac{-2^{*}T^*+v2^{*2}N^*}{\left(v^22^{*2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\langle S\left(\dfrac{\ddot{s}^*}{\left\|\ddot{s}^*\right\|}\right),\dfrac{\ddot{s}^*}{\left\|\ddot{s}^*\right\|}\right\rangle=\dfrac{©^*-v\left(2^{*}\right)'+v^2©^{*}\left(2^{*}\right)^2}{\left(v^22^{*2}+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \\ \left\langle S\left(\dfrac{\ddot{s}^*}{\left\|\ddot{s}^*\right\|}\right),\dfrac{\ddot{v}^*}{\left\|\ddot{v}^*\right\|}\right\rangle=-\dfrac{2^{*}}{v^22^{*2}+1} \\ \\ \left\langle S\left(\dfrac{\ddot{s}^*}{\left\|\ddot{s}^*\right\|}\right),\dfrac{\ddot{v}^*}{\left\|\ddot{v}^*\right\|}\right\rangle=0 \end{cases}$$

bulunur. Burada (2.4) bağıntısı dikkate alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç2.1: $:I\to E^3$ eğrisi boyunca oluşan involüt B-scroll'un Gauss eğriliği $\overline{\mathrm{K}}$ ve ortalama eğriliği $\overline{\mathrm{H}}$ ile gösterilirse bu eğrilikler sırasıyla

$$\overline{\mathrm{K}}=\det\overline{S}=-\frac{\left(\dfrac{\ddot{}\,'\sec\ddot{}}{\mathrm{a}\left\|W\right\|}\right)^2}{\left(v^2\left(\dfrac{\ddot{}\,'\sec\ddot{}}{\mathrm{a}\left\|W\right\|}\right)^2+1\right)^2} \qquad (2.14)$$

$$\overline{\mathrm{H}} = \dot{I}z\overline{S} = \frac{\dfrac{\sec^{\cdot\cdot}}{a} - v\left(\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 - \dfrac{\left({}^{\cdot\cdot\prime}\right)^2\sec^3{}^{\cdot\cdot}}{a^2\,\|W\|^2}}{\left(v^2\left(\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.15)$$

olur.

Teorem2.7: $: I \to E^3$ eğrisi boyunca oluşan involut B-scroll'un 1. ve II. temel formları sırasıyla $\overline{I}$ ve $\overline{II}$ ile gösterilirse

$$\overline{I} = \begin{bmatrix} \left(\left(v\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 + 1\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{\sec^{\cdot\cdot}}{a} - v\left(\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 - \dfrac{\left({}^{\cdot\cdot\prime}\right)^2\sec^3{}^{\cdot\cdot}}{a^2\,\|W\|^2}}{\sqrt{\left(v\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 + 1}} & -\dfrac{\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}}{\sqrt{\left(v\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 + 1}} \\ -\dfrac{\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}}{\sqrt{\left(v\dfrac{{}^{\cdot\cdot\prime}\sec^{\cdot\cdot}}{a\,\|W\|}\right)^2 + 1}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.17)$$

İspat: Involüt eğri boyunca oluşan involut B-scroll'un 1. ve II. temel formları sırasıyla $\overline{I}$ ve $\overline{II}$ ile gösterilirse

$$\overline{I} = \left\langle {}^{\cdot\cdot}{}^{*}_{s}, {}^{\cdot\cdot}{}^{*}_{s} \right\rangle dsds + \left\langle {}^{\cdot\cdot}{}^{*}_{s}, {}^{\cdot\cdot}{}^{*}_{v} \right\rangle dsdv + \left\langle {}^{\cdot\cdot}{}^{*}_{v}, {}^{\cdot\cdot}{}^{*}_{v} \right\rangle dvdv,$$

$$\overline{I} = \left(v^{2}2^{*2} + 1\right)^2 dsds + 0dsdv + 1dvdv,$$

$$\overline{II} = \left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{s}\right), \ddot{\ }^{*}_{s}\right\rangle \left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\|^{2} dsds + 2\left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{s}\right), \ddot{\ }^{*}_{v}\right\rangle \left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\| dsdv + \left\langle \ddot{\ }^{*}_{v}, \ddot{\ }^{*}_{v}\right\rangle \left\|\ddot{\ }^{*}_{v}\right\|^{2} dvdv,$$

$$\overline{II} = \frac{\text{©}^{*} - v\text{²}^{*\prime} + v^{2}\text{©}^{*}\text{²}^{*2}}{\sqrt{\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}+1}} dsds - \frac{\text{2²}^{*}}{\sqrt{\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}+1}} dsdv + 0dvdv$$

olur. Bu ifadeler matris formunda yazılırsa

$$\overline{I} = \begin{bmatrix} \left(v^{2}\text{²}^{*2}+1\right)^{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \dfrac{\text{©}^{*} - v\text{²}^{*\prime} + v^{2}\text{©}^{*}\text{²}^{*2}}{\sqrt{\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}+1}} & -\dfrac{\text{²}^{*}}{\sqrt{\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}+1}} \\ -\dfrac{\text{²}^{*}}{\sqrt{\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}+1}} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada (2.4) bağıntısı dikkate alınırsa ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.1: $\sim(s) = \left(a\cos(\frac{s}{d}), a\sin(\frac{s}{d}), \frac{bs}{d}\right), d = \sqrt{a^{2}+b^{2}}$ helis eğrisinin (Şekil 2) Frenet vektörleri, eğrilikleri, I. ve II.temel formları sırasıyla

$$T(s) = \left(-\frac{a}{d}\sin(\frac{s}{d}), \frac{a}{d}\cos(\frac{s}{d}), \frac{b}{d}\right),$$

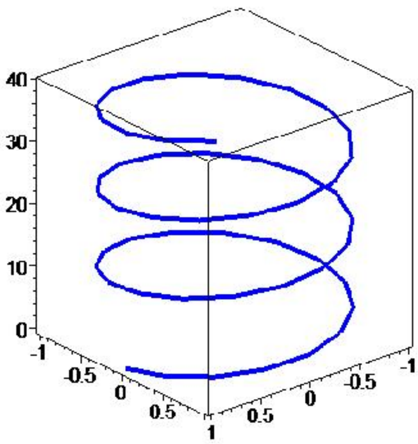
$$N(s) = -\left(\cos(\frac{s}{d}), \sin(\frac{s}{d}), 0\right)$$

$$B(s) = \left(\frac{b}{d}\sin(\frac{s}{d}), -\frac{b}{d}\cos(\frac{s}{d}), \frac{a}{d}\right),$$

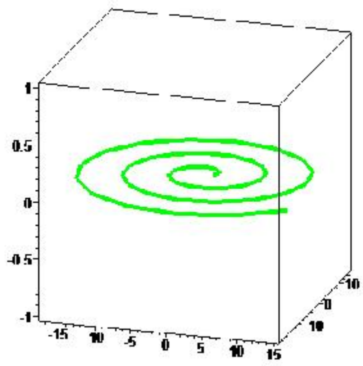
$$\text{©}(s) = \frac{a}{a^{2}+b^{2}} \qquad , \text{²}(s) = \frac{b}{a^{2}+b^{2}}$$

$$I = \begin{bmatrix} \dfrac{(ub)^2 + \left(a^2+b^2\right)^2}{\left(a^2+b^2\right)^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$II = \begin{bmatrix} \dfrac{© + u^{2}2\ ^{2}©}{\sqrt{u^{2}2\ ^{2} + 1}} & -\dfrac{b}{\sqrt{u^2b^2 + \left(a^2+b^2\right)^2}} \\ -\dfrac{b}{\sqrt{u^2b^2 + \left(a^2+b^2\right)^2}} & 0 \end{bmatrix}.$$



Şekil 2 helis eğrisi



Şekil 3 helis eğrisinin involütü

$\sim(s)$ helis eğrisine ait involüt eğrisinin (Şekil 3) denklemi, Frenet vektörleri, eğrilikleri, I. ve II.temel formları sırasıyla

$$(s)=\left[a\left(\cos(\frac{s}{d})-\frac{ª}{d}\sin(\frac{s}{d})\right),a\left(\sin(\frac{s}{d})+\frac{ª}{d}\cos(\frac{s}{d})\right),\frac{b(s+ª)}{d}\right],$$

$$ª=c-s, c=sabit$$

$$T^{*}(s)=N=-\left(\cos(\frac{s}{d}),\sin(\frac{s}{d}),0\right),$$

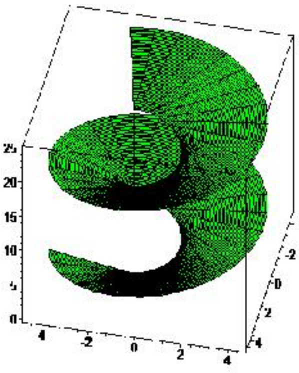
$$N^{*}(s)=-\frac{a}{d}T+\frac{b}{d}B=\left(\sin(\frac{s}{d}),-\cos(\frac{s}{d}),0\right)$$

$$B^{*}(s)=\frac{b}{d}T+\frac{a}{d}B=(0,0,1),$$

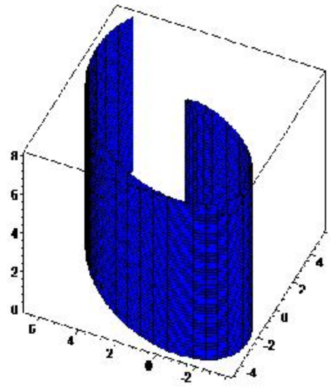
$$©^{*}(s)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{aª},\ ²^{*}(s)=0$$

Helis eğrisi boyunca B- scroll'un denklemi (Şekil 4)

$$\ddot{}\,(s,u)=\left(a\cos(\frac{s}{d})+\frac{ub}{d}\sin(\frac{s}{d}),a\sin(\frac{s}{d})-\frac{ub}{d}\cos(\frac{s}{d}),\frac{bs+ua}{d}\right)$$



Şekil 4 B-scroll



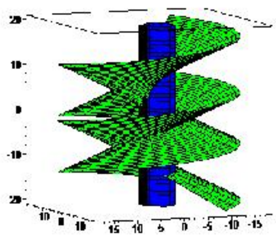
Şekil 5 involüt B- scroll

Involüt eğri boyunca B- scrollun denklemi (Şekil 5)

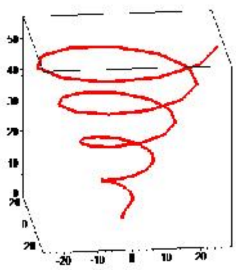
$$\ddot{\ }^{*}(s,v)=\left[a\left(\cos(\frac{s}{d})-\frac{\text{ª}}{d}\sin(\frac{s}{d})\right),a\left(\sin(\frac{s}{d})+\frac{\text{ª}}{d}\cos(\frac{s}{d})\right),\frac{b(s+\text{ª})}{d}+v\right]$$

Arakesit B- scrollun denklemi (şekil 6 ,Şekil 7)

$$\ddot{\ }(s)=\left[a\left(\cos(\frac{s}{d})-\frac{\text{ª}a}{d}\sin(\frac{s}{d})\right),a\left(\sin(\frac{s}{d})+\frac{\text{ª}a}{d}\cos(\frac{s}{d})\right),\frac{(b^{2}s-\text{ª}a^{2})}{db}\right]$$



Şekil 6 B-scroll $\cap$ İnvolüt B-scroll



Şekil 7 B-scroll ile involüt B-scroll'un arakesit eğrisi

REFERENCES

[1] Gray Alfred, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, pp. 201-202, 1997.

[2] Graves L.K., Codimension one isometric immersion between lorentz space, Trans. Amer. Soc. 252,367-392, 1979.

[3] Hacısalihoğlu H. Hilmi, Diferensiyel Geometri,Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 3.Baskı,1998.

[4] Kılıçoğlu Şeyda, On the Involute B-scrolls in the Euclidean 3-space IE^3 ,XIII.International Conference Geometry, Integrability and Quantization, June 3-8 2011, Varna, Bulgaria.

[5] Kılıçoğlu Şeyda, n-boyutlu Lorentz uzayında B- scrollar, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü,2006.

[6] Sabuncuoğlu Arif, Diferensiyel Geometri , Nobel Yayınları, 2006.