Lorenzt Uzayında Spacelike İnvolüt B-Scroll Üzerine

Süleyman ŞENYURT

Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
ORDU

ÖZET

Bu çalışmada, spacelike eğrisi ~ time eğrisinin bir involütü olarak alındığında spacelike involüt eğrisinin Frenet vektörleri, eğrilik ve torsiyonu ~ timelike eğrisinin W Darboux vektörü ile B binormal vektörü arasındaki lorentzian ¨ açısına bağlı olarak verildi. Bu durumda involüt eğri boyunca oluşan B-scroll'un şekil operatörüne karşılık gelen matris, Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, I. ve II. temel formları yeniden hesaplandı.

Mathematics Subject Classification: 53A04

Anahtar Kelimeler: B-scroll, spacelike involüt B-scroll

On Spacelike Involute B- Scroll a New View

Süleyman ŞENYURT

Ordu University Faculty of Arts and Science Department Of Mathematic

ABSTRACT

In this paper, when is considered as the spacelike involute of the ~ timelike curve, Frenet vectors, curvature and torsion of are given, respectively depending on the angle , ¨ which is betwen W Darboux vector and B binormal vector of ~ curve. In this case, matrix corresponding to the transformation weingarten, Gausian and mean curvatures, I. and I. fundamental forms of B – scroll generated by involute curve have been calculated.

Mathematics Subject Classification: 53A04

Keywords: B-scroll, spacelike involute B-scroll

1.GİRİŞ

Bir parametreye bağlı dogrular ailesinin geometrik yeri bir regle yüzey olarak bilinmektedir. 1960'lı yıllardan itibaren regle yüzeyler üzerinde birçok bilim adamı çalışmalar yapmaya başlanmış ve1982 de Sabuncuoğlu, Genelleştirilmiş Regle Yüzeyler üzerine isimli doçentlik tezi hazırlayarak bu yüzeylerin özeliklerini inceledi. Regle yüzeyler için yapılan çalışmalar Lorentz (Minkowski) uzayında da yapıldı. Turgut, 3−boyutlu Lorentz uzayında timelike ve spacelike regle yüzeyler ile bunlara ait boğaz noktası, dağılma parametresi ve açılabilir regle yüzey kavramları üzerinde durdu, [13]. Graves, dayanak eğrisi null olan bir eğri boyunca binormal vektörün hareketiyle oluşan timelike regle yüzeyleri B−scroll olarak tanımladı, [7]. Bundan sonra Ekmekçi ve İlarslan, Lorentz uzayında eğrilerin Frenet formüllerini hesapladı,[6]. Balgetir, n−boyutlu Lorentz uzayında genelleştirilmiş null scroll'lar üzerinde çalıştı, [2]. 2006 da Kılıçoğlu, n−boyutlu Lorentz uzayında timelike ve spacelike B−scroll'ların şekil operatörüne karşılık gelen matrisi, Gauss eğriliği,ortalama eğriliği, asimptotik çizgileri, I. ve II. temel formları hesapladı,[9]. Özüsağlam ve arkadaşları, Minkowski 3-uzayında B-Scroll yüzeylerinin genişletilmişi ve B-Scroll yüzeylerinin, KII ikinci Gaussian eğriliği ve ortalama eğriliğini hesapladı, [16]. Şenyurt, involüt eğri boyunca oluşan B-scroll'un Gauss eğriliği, ortalama eğriliği, I. ve II. temel formları evolüt eğrisinin Darboux vektörü ile B binormal vektörü arasındaki açıya bağlı olarak verdi, [12].

$$g : IR^3 \times IR^3 \to IR \qquad \mathrm{g}\left(X,Y\right) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Lorentz metriği, $\left\{IR^3, g\right\}$ ikilisine 3-boyutlu Lorentz uzayı denirve IL^3 ile gösterilir.Bir $X \in IL^3$ vektörü için;

i) $g(X,X) > 0$ veya $X = 0$ ise X vektörüne spacelike vektör, (uzay benzeri)

ii) $g(X,X) < 0$ ise X vektörüne timelike vektör, (zaman benzeri)

iii) $g(X,X) = 0$ ise X vektörüne lightlike veya null vektör (ışık benzeri) denir.Bir $X \in IL^3$ vektörünün normu

$$\|X\|_{IL} = \sqrt{\left|g\left(X,X\right)\right|}$$

şeklinde tanımlanır. $X = (x_1, x_2, x_3)$ ve $Y = (y_1, y_2, y_3) \in IL^3$ olmak üzere

$$X \wedge Y = (x_3y_2 - x_2y_3, x_1y_3 - x_3y_1, x_1y_2 - x_2y_1) \qquad (1.1)$$

vektörüne X ve Y nin vektörel çarpımı denir,(Akutugawa and Nishikawa 1990).

$\alpha : I \to IL^3$ diferensiyellenebilireğrisininFrenetçatısı $\{T, N, B\}$ olsun. B binormal vektör ile W vektörü arasındaki Lorentzian açı θ ile gösterilsin.

a) α timelike ise Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases} \qquad (1.2)$$

şeklinde([15], [6]), ani dönme vektörü

$T \wedge N = -B$, $N \wedge B = T$ ve $B \wedge T = -N$ olmak üzere

$$W = \tau T - \kappa B \qquad (1.3)$$

şeklinde [14],

b) α spacelike binormalli spacelike ise Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases} \qquad (1.4)$$

şeklinde [15], ani dönme vektörü

$T \wedge N = -B$, $N \wedge B = -T$ ve $B \wedge T = N$ olmak üzere

$$W = -\tau T + \kappa B \qquad (1.5)$$

şeklinde [14],

c) α timelike binormalli spacelike ise Frenet formülleri

$$\begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = -\kappa T + \tau B \\ B' = \tau N \end{cases} \qquad (1.6)$$

şeklinde, [15] ani dönme vektörü de

$T \wedge N = B$, $N \wedge B = -T$ ve $B \wedge T = -N$ olmak üzere

$$W = \tau T - \kappa B \qquad (1.7)$$

şeklinde bulunur [14].

IL^3 3−boyutlu Lorentz uzayında bir yüzey M olsun. M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik, Lorentz metriği ise M ye timelike yüzey denir, ([3], [13]). $\sim : I \to IL^3$ ve $: I \to IL^3$ eğrileri verilmiş olsun. $\sim$ eğrisinin teğet doğruları eğrisinin teğet doğrularına dik oluyorsa eğrisine $\sim$ eğrisinin bir involütü denir ve involüt eğrinin denklemi

$$(s) = \sim(s) + \text{ª}(s)T(s), \quad \text{ª} \in IR \tag{1.8}$$

şeklinde yazılır. Burada $\text{ª} = (c-s), \quad c = sbt, \quad \forall s \in I, [8]$.

Teorem 1.1: $: I \to IL^3$ spacelike eğrisi $\sim : I \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. ve $\sim$ eğrisinin eğrilikleri sırasıyla ©^* ve ²^*, © ve ² ile gösterilirse bu eğrilikler arasında

$$\begin{cases} \text{©}^* = \dfrac{\sqrt{\text{²}^2 - \text{©}^2}}{(c-s)\text{©}}, & N^* spacelike \\ \text{©}^* = \dfrac{\sqrt{\text{©}^2 - \text{²}^2}}{(c-s)\text{©}}, & N^* timelike \\ \text{²}^* = \dfrac{\left(\dfrac{\text{²}}{\text{©}}\right)' \text{©}}{(c-s)(\text{©}^2 - \text{²}^2)} \end{cases} \tag{1.9}$$

bağıntısı vardır, [5].

Teorem 1.2: $: I \to IL^3$ spacelike eğrisi $\sim : I \to IL^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ ve eğrilerinin Frenet çatıları sırasıyla $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ ile gösterilsin. $\sim$ eğrisinin B binormal ile W Darboux vektörü arasındaki Lorentzian açı ¨ olmak üzere bu çatılar arasında

a) W spacelike ise $(|\text{©}| > |\text{²}|)$

$$\begin{cases} \text{©} = \|W\| \cosh \text{¨} \\ \text{²} = \|W\| \sinh \text{¨} \end{cases}, \quad \|W\|^2 = \text{©}^2 - \text{²}^2, \tag{1.10}$$

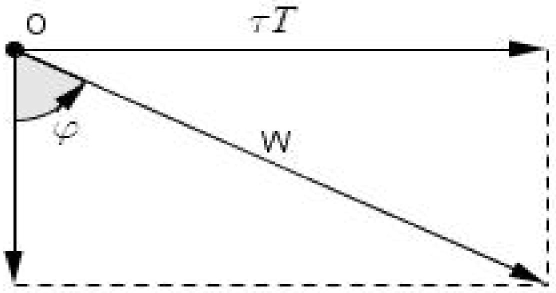
$$\begin{cases} T^* = N \\ N^* = -\cosh \text{¨}\, T + \sinh \text{¨}\, B \\ B^* = -\sinh \text{¨}\, T + \cosh \text{¨}\, B \end{cases} \tag{1.11}$$

a) W timelike ise $\left(|©| < |²|\right)$

$$\begin{cases} © = \|W\| \sinh ¨ \\ ² = \|W\| \cosh ¨ \end{cases}, \quad \|W\|^2 = -\left(©^2 - ²^2\right) \tag{1.12}$$

$$\begin{cases} T^* = N \\ N^* = \sinh ¨\, T - \cosh ¨\, B \\ B^* = \cosh ¨\, T + \sinh ¨\, B \end{cases} \tag{1.13}$$

bağıntısı vardır, [4].



Şekil 1Darboux vektörü

$~ : I \to IL^3$ timelike birim hızlı eğrisinin Frenet 3 –ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. B spacelike binormal vektörü tarafından üretilen regle yüzeye $B-$scroll denir ve denklemi

$$¨(s,u) = ~(s) + uB(s) \tag{1.14}$$

şeklinde yazılır, [7]. Bu yüzeyin birim normali $N_{\smile}$, şekil operatörüne karşılık gelen matris S ,Gauss eğriliği K ve ortalama eğriliği H ile gösterilsin. Bu durumda

$$N_{\smile} = \frac{u² T - N}{\sqrt{(u²)^2 - 1}}, \tag{1.15}$$

$$S = \begin{bmatrix} \dfrac{© - u²' - u^{²2\,²}©}{\left(u^{²2\,²} - 1\right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{²}{u^{²2\,²} - 1} \\ -\dfrac{²}{u^{²2\,²} - 1} & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.16}$$

$$K = \det S = -\frac{2^{\;2}}{\left(u^{2}2^{\;2}-1\right)^{2}}, \qquad (1.17)$$

$$H = İzS = \frac{© - u2' - u^{2}2^{\;2}©}{\left(u^{2}2^{\;2}-1\right)^{\frac{3}{2}}}, \qquad (1.18)$$

I. ve II. temel formları sırasıyla I ve II ile gösterilirse bu formların matrissel ifadeleri sırasıyla

$$I = \begin{bmatrix} u^{2}2^{\;2}-1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.19)$$

$$II = \begin{bmatrix} \dfrac{© - u2' - u^{2}2^{\;2}©}{\sqrt{u^{2}2^{\;2}-1}} & -\dfrac{2}{\sqrt{u^{2}2^{\;2}-1}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{u^{2}2^{\;2}-1}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.20)$$

şeklinde bulunur, [10].

2. Lorenzt uzayında Spacelike involüt B-scroll üzerine

$: I \to E^3$ spacelike eğrisi $\sim : I \to E^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. Bu durumda spacelike involüt B-scroll’un denklemi

$$\ddot{}^{*}(s,u) = \quad (s) + v(s)B^{*}(s)$$

şeklinde yazılır. Burada ve B^{*}ın yerine sırasıyla $(1.8), (1.11)$ ve (1.13) den karşılıkları yazılırsa bu denklem

$$\begin{cases} \ddot{}^{*}(s,v) = \sim(s) + (c - s - v\sinh \ddot{}\,)T + v\cosh \ddot{}\,B, & W \text{ spacelike} \\ \ddot{}^{*}(s,v) = \sim(s) + (c - s + v\cosh \ddot{}\,)T + v\sinh \ddot{}\,B, & W \text{ timelike} \end{cases} \qquad (2.1)$$

olur.

Teorem 2.1: $: I \to E^3$ spacelike eğrisi $\sim : I \to E^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla

$$\begin{cases} \text{©}^{*} = \dfrac{\sec h^{\text{¨}}}{(c-s)}, \\ \text{²}^{*} = \dfrac{\text{¨}\,'\operatorname{sech}\text{¨}}{(c-s)\|W\|} = \dfrac{\text{¨}\,'}{\|W\|}\text{©}^{*}. \end{cases} \qquad (2.2)$$

İspat: eğrisi ~ eğrisinin bir involütü olduğundan (1.11) bağıntısından N^{*}timelike olur. Bu durumda (1.10) bağıntısı (1.9) da yerine yazılırsa aranan bulunmuş olur.

Teorem 2.2: $: I \to E^{3}$ spacelike eğrisi $\sim : I \to E^{3}$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. ~ eğrisi boyunca timelike B-scroll ile eğrisi boyunca spacelike involüt B-scroll'un arakesit eğrisinin denklemi

$$\begin{cases} \text{¨}\,(s) = \sim(s) + (c-s)\tan h^{\text{¨}}\, B(s), & W \text{ spacelike}, \\ \text{¨}\,(s) = \sim(s) - (c-s)\cot h^{\text{¨}}\, B(s), & W \text{ timelike}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

İspat: (2.1) bağıntısından

$$(c-s) - v\sinh\text{¨} = 0 \text{ ve } v\cosh\text{¨} = u$$

veya

$$(c-s) + v\cosh\text{¨} = 0 \text{ ve } v\sinh\text{¨} = u$$

olmalıdır. Buradan

$$u = (c-s)\tan h^{\text{¨}}$$

veya

$$u = -(c-s)\cot h^{\text{¨}}$$

olur. Bu değer (2.1) de yerine yazılırsa işlem tamamlanmış olur.

Teorem 2.3: $: I \to E^{3}$ spaclike eğrisi $\sim : I \to E^{3}$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. eğrisi boyuncaspacelike involüt B-scroll'un birim normal vektörü alanı N ile gösterilirse

$$N = \frac{-\cosh\text{¨}\, T + \dfrac{v\text{¨}\,'\sec h^{\text{¨}}}{(c-s)\|W\|} N + \sinh\text{¨}\, B}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v\text{¨}\,'\sec h^{\text{¨}}}{(c-s)\|W\|}\right)^{2}}}. \qquad (2.4)$$

İspat: $\text{¨}^{*}(s,v) = (s) + vB^{*}(s)$ denklemi ile verilen $B-$scroll'un birim normalı

$$N \;=\frac{v²^{\,*}T^{*}+N^{*}}{\sqrt{1-\left(v²^{\,*}\right)^{2}}}$$

dir, (Turgut 1995). Burada $(1.10),(1.11)$ ve (2.2) bağıntıları yerlerine yazılırsa istenen elde edilmiş olur.

Teorem 2.4: $: I \rightarrow E^3$ spaclike eğrisi $\sim : I \rightarrow E^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. $\sim$ eğrisi boyunca B-scroll'un $N_{\sim}$ birim normal vektörü alanı eğrisi boyunca involüt B-scroll'un N birim normal vektörü alanına dik ise

$$v=\frac{|c-s|©²}{¨\,'\,\text{sech}\,¨}u. \qquad (2.5)$$

İspat: $N_{\sim} \perp N \;\Rightarrow \langle N_{\sim}, N \rangle = 0$ olur. Buradan

$$\left\langle \frac{u²\,T-N}{\sqrt{\left(u²\right)^{2}-1}},\frac{-\cosh¨\,T+\dfrac{v¨\,'\sec h¨}{(c-s)\|W\|}N+\sinh¨\,B}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v¨\,'\sec h¨}{(c-s)\|W\|}\right)^{2}}}\right\rangle=0$$

$$\Rightarrow u²\cosh¨ - v¨\,'\frac{\sec h¨}{(c-s)\|W\|}=0$$

$$\Rightarrow v=\frac{(c-s)\cosh¨\,\|W\|²}{¨\,'\sec h¨}u$$

$$\Rightarrow v=\frac{(c-s)©²}{¨\,'\,\text{sech}\,¨}u.$$

Teorem 2.5: $: I \rightarrow E^3$ spacelike eğrisi $\sim : I \rightarrow E^3$ timelike eğrisinin bir involütü olsun. eğrisi boyunca spacelike involut B-scroll'un şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$\overline{S}=\begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{\sec h\ddot{\ }}{(c-s)}-v\left(\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)'+\dfrac{\sec h\ddot{\ }}{(c-s)}\left(\dfrac{v\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}}{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2}\right)^2}{\left(1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}}{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2} \\ -\dfrac{\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}}{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }\,'\operatorname{sech}\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(2.6)$$

şeklindedir.

İspat: Spacelike involut B-scroll'un şekil operatörüne karşılık gelen matris $\overline{S}$ ile gösterilirse

$$\overline{S}=\begin{bmatrix} \left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{s}\right),\ddot{\ }^{*}_{s}\right\rangle & \left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{s}\right),\ddot{\ }^{*}_{v}\right\rangle \\ \left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{v}\right),\ddot{\ }^{*}_{s}\right\rangle & \left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{v}\right),\ddot{\ }^{*}_{v}\right\rangle \end{bmatrix}$$

yazılır. $\ddot{\ }^{*}(s,v)=\ (s)+vB^{*}(s)$ ifadesinin s ve v ya göre türevleri alınırsa

$$\frac{\ddot{\ }^{*}_{s}}{\left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\|}=\frac{T^{*}-v2^{*}N^{*}}{\sqrt{\left|1-\left(v2^{*}\right)^{2}\right|}}\quad \text{ve}\quad \frac{\ddot{\ }^{*}_{v}}{\left\|\ddot{\ }^{*}_{v}\right\|}=B^{*}$$

olur ve buradan

$$S\left(\frac{\ddot{\ }^{*}_{s}}{\left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\|}\right)=\frac{1}{\left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\|}\frac{\partial N}{\partial s}=\frac{1}{\sqrt{\left|1-\left(v2^{*}\right)^{2}\right|}}\frac{\partial N}{\partial s},$$

$$S\left(\frac{\ddot{\ }^{*}_{s}}{\left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\|}\right)=-\frac{\left(-©^{*}+v2^{*\prime}+v^{2}©^{*}2^{*2}\right)T^{*}+\left(v©^{*}2^{*}-v^{2}2^{*}©^{*\prime}-v^{3}©^{*}2^{*3}\right)N^{*}-\left(2^{*}-v^{2}2^{*3}\right)B^{*}}{\left(1-v^{2}2^{*2}\right)^{2}},$$

$$S\left(\frac{\ddot{}^{*}_{v}}{\left\|\ddot{}^{*}_{v}\right\|}\right)=\frac{-2^{*}T^{*}+v2^{*2}N^{*}}{\left(1-v^{2}2^{*2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left\langle S\left(\frac{\ddot{}^{*}_{s}}{\left\|\ddot{}^{*}_{s}\right\|}\right),\frac{\ddot{}^{*}_{s}}{\left\|\ddot{}^{*}_{s}\right\|}\right\rangle=\frac{\copyright^{*}-v\left(2^{*}\right)'+v^{2}\copyright^{*}\left(2^{*}\right)^{2}}{\left(1-v^{2}2^{*2}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left\langle S\left(\frac{\ddot{}^{*}_{s}}{\left\|\ddot{}^{*}_{s}\right\|}\right),\frac{\ddot{}^{*}_{v}}{\left\|\ddot{}^{*}_{v}\right\|}\right\rangle=-\frac{2^{*}}{1-v^{2}2^{*2}},$$

$$\left\langle S\left(\frac{\ddot{}^{*}_{v}}{\left\|\ddot{}^{*}_{v}\right\|}\right),\frac{\ddot{}^{*}_{v}}{\left\|\ddot{}^{*}_{v}\right\|}\right\rangle=0$$

bulunur.Bu ifadeler $\overline{S}$ matrisinde yerine yazılırsa

$$\overline{S}=\begin{bmatrix}\dfrac{\copyright^{*}-v\left(2^{*}\right)'+v^{2}\copyright^{*}\left(2^{*}\right)^{2}}{\left(1-v^{2}2^{*2}\right)^{\frac{3}{2}}} & -\dfrac{2^{*}}{1-v^{2}2^{*2}}\\ -\dfrac{2^{*}}{1-v^{2}2^{*2}} & 0\end{bmatrix}$$

olur. Burada $\copyright^{*}$ve 2^{*} yerine (2.2)deki ifadeleri yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 2.1: $:I\to E^{3}$ spaclike eğrisi boyunca oluşan involüt B-scroll'un Gauss eğriliği $\overline{\mathrm{K}}$ ve ortalama eğriliği $\overline{\mathrm{H}}$ ile gösterilirse bu eğrilikler sırasıyla

$$\overline{\mathrm{K}}=\det\overline{S}=-\left\{\frac{\dfrac{\ddot{}\,'\operatorname{sech}\ddot{}}{(c-s)\|W\|}}{1-\left(v\dfrac{\ddot{}\,'\operatorname{sech}\ddot{}}{(c-s)\|W\|}\right)^{2}}\right\}^{2} \qquad (2.7)$$

$$\overline{\mathrm{H}} = \dot{I}z\overline{S} = \frac{\dfrac{\sec h\ddot{\ }}{(c-s)} - v\left(\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)' + \dfrac{\sec h\ddot{\ }}{(c-s)}\left(v\dfrac{\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}}{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2}\right)^2}{\left(1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (2.8)$$

olur.

Teorem 2.6: $: I \rightarrow E^3$ spaclike eğrisi boyunca oluşan involüt B-scroll'un I. ve II. temel formları sırasıyla $\overline{I}$ ve $\overline{II}$ ile gösterilirse

$$\overline{I} = \begin{bmatrix} \left(1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \dfrac{\dfrac{\sec h\ddot{\ }}{(c-s)} - v\left(\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)' + \dfrac{v^2\sec h\ddot{\ }}{(c-s)}\dfrac{\left(\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2}{\left(1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2\right)^2}}{\sqrt{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2}} & -\dfrac{\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}}{\sqrt{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2}} \\ -\dfrac{\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}}{\sqrt{1-\left(v\dfrac{\ddot{\ }'\mathrm{sech}\,\ddot{\ }}{(c-s)\|W\|}\right)^2}} & 0 \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

İspat: Spacelike involut B-scroll'un I. ve II. temel formları sırasıyla $\overline{I}$ ve $\overline{II}$ ile gösterilirse

$$\overline{I} = \left\langle \ddot{\ }^{*}_{s}, \ddot{\ }^{*}_{s} \right\rangle dsds + \left\langle \ddot{\ }^{*}_{s}, \ddot{\ }^{*}_{v} \right\rangle dsdv + \left\langle \ddot{\ }^{*}_{v}, \ddot{\ }^{*}_{v} \right\rangle dvdv,$$

$$\overline{I} = \left(1 - v^{2}\text{²}^{*2}\right)^{2} dsds + 0dsdv + 1dvdv,$$

$$\overline{II} = \left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{s}\right), \ddot{\ }^{*}_{s} \right\rangle \left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\|^{2} dsds + 2\left\langle S\left(\ddot{\ }^{*}_{s}\right), \ddot{\ }^{*}_{v} \right\rangle \left\|\ddot{\ }^{*}_{s}\right\| dsdv + \left\langle \ddot{\ }^{*}_{v}, \ddot{\ }^{*}_{v} \right\rangle \left\|\ddot{\ }^{*}_{v}\right\|^{2} dvdv,$$

$$\overline{II} = \frac{-\text{©}^{*} + v\text{²}^{*\prime} + v^{2}\text{©}^{*}\text{²}^{*2}}{\sqrt{1-\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}}} dsds - \frac{\text{²²}^{*}}{\sqrt{1-\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}}} dsdv + 0dvdv$$

olur. Bu ifadeler matris formunda yazılırsa

$$\overline{I} = \begin{bmatrix} \left(v^{2}\text{²}^{*2}+1\right)^{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{II} = \begin{bmatrix} \dfrac{-\text{©}^{*} + v\text{²}^{*\prime} + v^{2}\text{©}^{*}\text{²}^{*2}}{\sqrt{1-\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}}} & -\dfrac{\text{²}^{*}}{\sqrt{1-\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}}} \\ -\dfrac{\text{²}^{*}}{\sqrt{1-\left(v\text{²}^{*}\right)^{2}}} & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada ©^{*} ve ²^{*} yerine (2.3) deki ifadeleri yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

Örnek2.1 $\sim(s) = \left(\sqrt{2}\sinh s, \sqrt{2}\cosh s, s\right)$ timelike eğrisinin (şekil2) Frenet elemanları

$$T(s) = \left(\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\,\text{sinhs}, 1\right), N(s) = \left(\sinh s, \text{cosh}, 0\right),$$

$$B(s) = \left(\cosh s, \text{sinh}, \sqrt{2}\right),$$

$$\text{©} = \sqrt{2}\ ,\ \text{²} = -1.$$

$\sim$ timelike eğrisine ait B- scroll'un denklemi (şekil 3)

$$\ddot{\ }(s,u) = \left(\sqrt{2}\sinh s + u\cosh s, \sqrt{2}\cosh s + u\sinh s, s + u\sqrt{2}\right).$$

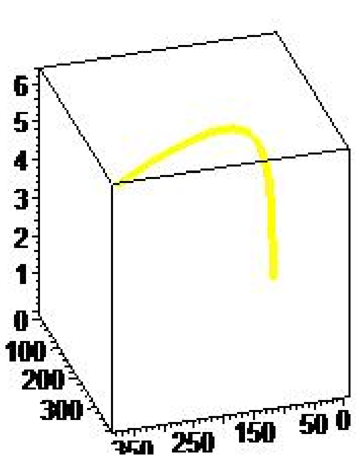
$(s) = \left(\sqrt{2}\sinh s + (c-s)\sqrt{2}\cosh s, \sqrt{2}\cosh s + (c-s)\sqrt{2}\sinh s, c\right)$ spacelike eğrisinin (şekil 4) Frenet elemanları

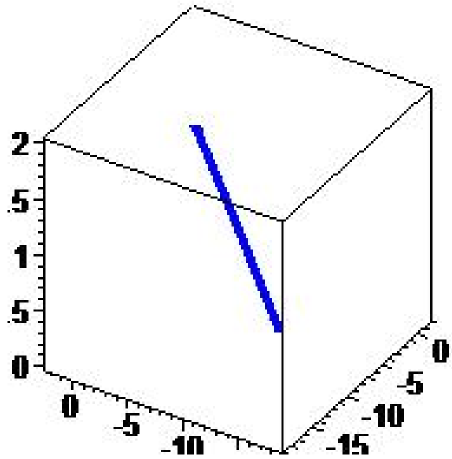
$T^{*}(s)=(\sinh s,\text{coshs},0)$, $N^{*}(s)=(\cosh s,\text{sinhs},0)$, $B^{*}(s)=(0,0,-1)$,

$$©^{*}=\frac{1}{\sqrt{2}(c-s)},\ ²^{*}=0.$$

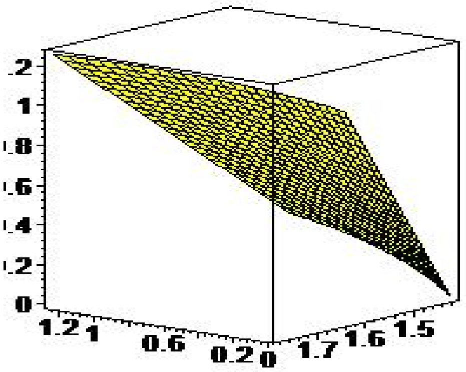
spacelike eğrisine ait B- scroll'un denklemi (şekil 5)

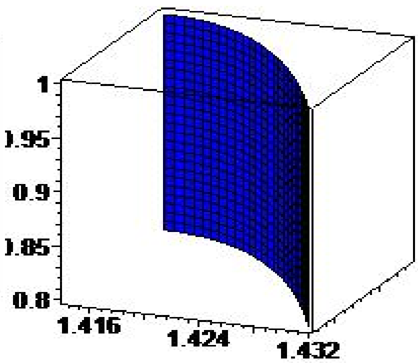
$$¨^{*}(s,v)=\left(\sqrt{2}\sinh s+(c-s)\sqrt{2}\cosh s,\sqrt{2}\cosh s+(c-s)\sqrt{2}\sinh s,c-v\right).$$





Şekil 2~ timelike eğrisi Şekil 3 spacelike involut eğrisi





Şekil 4 timelike B- scroll Şekil 5 spacelike involüt B- scroll

KAYNAKLAR

[1] Akutugawa, K., Nishikawa S., **(1990),** The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3−space. Tohoku Math.J.(2), 42(1), 67-82.

[2] Balgetir, H., **(2002),** Lorentz uzayında genelleştirilmiş null scroll'lar. Doktora tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[3] Beem, J.K., Ehrliche, P.E., **(1981),** Global Lorentzian Geometry,Marcel Dekker, Inc. New York.

[4] Bilici, M., **(2011),***Natural lifts and the geodesic sprays for the spherical indicatrices of the involutes of a timelike curve inMinkowski 3-Space " International Journal of Physical Sciences ,vol. 6(20), 4706-4711.*

[5] Bilici, M., **(2009),** on the timelike or spacelike involute-evolute curve couples,University of Ondokuz Mayıs,Instituteof Science,Ph. D Thesis.

[6] Ekmekçi, N., İlarslan, K., **(1998),** Higher curvatures of a regular curve in Lorentzian space. Jour. of Inst. of Math & Camp. Sci. (Math. Ser) Vol. 11, No.2,97-102.

[7] Graves L.K., **(1979),** Codimension one isometric immersion between lorentz space, Trans. Amer. Soc. 252,367-392.

[8] Hacısalihoğlu H.H., **(1998),** Diferensiyel Geometri,Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, 3.Baskı.

[9] Kılıçoğlu,Ş., **(2011),** On the Involute B-scrolls in the Euclidean 3-space IE^3 ,XIII.International Conference Geometry, Integrability and Quantization, June 3-8, Varna, Bulgaria.

[10] Kılıçoğlu,Ş., **(2006),** n-boyutlu Lorentz uzayında B- scrollar, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[11] Sabuncuoğlu A., **(2006),** Diferensiyel Geometri , Nobel Yayınları.

[12] Şenyurt, S., **(2014),** On Involute B-Scroll A New View, Ordu Univ. J. Sci. Tech., Vol. 4, No.1,59-74.

[13] Turgut, A., **(1995),** 3- Boyutlu Minkowski Uzayında Spacelike ve Timelike Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[14] Uğurlu,H.H., **(1997),** On the Geometry of Timelike surfaces, Commun. Fac. Sci. Univ.Ank. Series A1,V.46, 211-223.

[15] Woestijne, V.D.I., **(1990),** Minimal Surfaces of the 3- dimensional Minkowski Space.Word scientific Publishing, 344-369, Singapore.

[16] Özüsağlam, E., Ekici,C., **(2007),** Görgülü,A., Second Gaussian Curvature of B-Scroll surfaces inMinkowski 3-Space, SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-Dergi)2(2), 210-215.