IBAD Sosyal Bilimler Dergisi
IBAD Journal of Social Sciences

IBAD journal

IBAD, 2020; (8): 244-258
DOI: 10.21733/ibad.732665
Özgün Araştırma / Original Article

Genelleme Sürecinin Çember ve Noktalar Problemi Bağlamında İncelenmesi

Dr. Öğr. Üyesi Handan Demircioğlu[1*]
H. Akif Tuncay[2]

Geliş tarihi: 05.05.2020
Kabul tarihi: 06.06.2020

Atıf bilgisi:
IBAD Sosyal Bilimler Dergisi
Sayı: 8 **Sayfa:** 244-258
Yıl: 2020 **Dönem:** Güz

This article was checked by *iThenticate.*
Similarity Index 9%
Bu makalede araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

[1]Cumhuriyet Üniversitesi, Türkiye, handandemircioglu@gmail.com
ORCID ID 0000-0001-7037-6140

[2] MEB, Türkiye, hattuncay@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-6922-2221

* Sorumlu yazar

ÖZ

Bu çalışmanın amacı matematik öğretmen adaylarının, matematik öğretmenlerinin ve matematikçinin genelleme sürecini, aldıkları özel durumları, kullandıkları stratejileri çember ve noktalar problemi bağlamında incelemektir. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile yürütülmüştür. Çalışmanın katılımcılarını bir akademisyen, iki matematik öğretmeni ve iki matematik öğretmeni adayı olmak üzere toplam 5 kişi oluşturmaktadır. Veriler çember ve noktalar problemi ile toplanmıştır. Veriler klinik görüşme yöntemi, doküman incelemesi ve gözlem ile gerçekleştirilmiştir. Elde edilen bulgular tüm katılımcıların dört veya beş durum sonrasında genelleme yaptıklarını, genelleme sonucunda herhangi bir özel durumda doğrulama yapmadıklarını ve genelleme becerilerini geliştirmede problemlerin önemli olduğunu göstermiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleme, Genelleme Süreci, Genelleme Stratejileri, Matematik Öğretmeni, Matematik Öğretmeni Adayı

Examination of Generalization Process in the Context of " the Circles and Points" Problem

Assist. Prof. Dr. Handan Demircioğlu[1*]
H. Akif Tuncay[2]

First received:
Accepted:

Citation:
IBAD Journal of Social Sciences
Issue: 8 **Pages:** 244-258
Year: 2020 **Session:** Fall

This article was checked by *iThenticate.* Similarity Index 9%

[1]Cumhuriyet University, Turkey, handandemircioglu@gmail.com
ORCID ID 0000-0001-7037-6140

[2] MEB, Turkey, hattuncay@gmail.com
ORCID ID: 0000-0002-6922-2221

* **Corresponding Author**

ABSTRACT

The aim of this study is to examine the generalization process of preservice mathematics teacher, mathematics teachers and mathematicians, the special situations they take, and the strategies they use in the context of "the circle and points" problem. It was carried out by case study, one of the qualitative research methods. The participants of the study consist of 5 people, one academician, two mathematics teachers and two preservice mathematics teacher. The data were collected with the problem of circles and dots. The data were obtained by clinical interview method, document review and observation. The findings showed that all participants generalized after four or five situations, did not verify in any particular case as a result of generalization and problems were important in developing generalization skills.

Keywords: Generalization, Generalization Process, Generalization Strategies, Mathematics Teacher, Preservice Mathematics Teacher

GİRİŞ

Genelleme, yalnızca zihnin ilgi çekici ve büyüleyici bir yönü değil, aynı zamanda matematiksel düşüncenin, özellikle de yüksek mertebeden matematiksel düşüncenin önemli bir yönüdür (Sriraman, 2004). Matematik öğrenimi, matematiksel düşünme gerektiren bir süreçtir. Matematiksel düşünmenin doğası genel olan durumu tanımayı, değerlendirmeyi, ifade etmeyi ve yönlendirmeyi gerektirmektedir (Mason, 1996). Genelleme, matematikte bir kalp atışı, matematiğin kalbi, matematiğin özü (Mason, 1996; Mason, Stacey & Burton, 2010), matematik dersinin en otantik uygulaması (Strachota, 2016) aynı zamanda cebirin özü (Strachota, 2016) olarak da tanımlanmaktadır. Lee (1996) "*cebirin ve aslında tüm matematiğin kalıpları genelleştirmekle ilgili olduğunu*" (s. 103) ifade etmiştir. Dörfler'e (1991) göre genelleme bir düşünme ve iletişim aracıdır. Genelleme matematiğin yanı sıra günlük hayat durumlarında da büyük öneme sahiptir. Aslında eğitim öğrencilerin hem sınıf içinde hem de dışında karar verme, problem çözme ve genelleme yapacak sağlam anlayışlar geliştirmelerine yardımcı olmayı amaçlamaktadır (Lobato, 2006; Strachota, 2016). Bundan dolayı gerek matematik öğretiminin gerekse okuldaki eğitiminin temel amaçlarından birisidir. Çeşitli disiplinlerin öğretim programları da uygun genellemelere yol açacak şekilde düzenlenir ve öğretmenlere bu sürecin nasıl yönlendirileceği, çocukların ulaştığı genelleme düzeyinin nasıl doğrulanacağı hakkında ayrıntılı yönergeler vermektedir (Davydov, 1990). Mason (1996) eğer öğretmenler bu sürecin varlığından habersizse ve öğrencileri kendi genellemelerini ifade etme konusunda çalışma alışkanlığı içinde değilse, matematiksel düşünmenin gerçekleşemeyeceğine vurgu yapmaktadır.

Genelleme örnek durumlar arasındaki ortak özelliklerin akıl yürütme ile belirlenmesi veya açığa çıkarılması, ileri bir seviyeye bu ilişkileri veya yapıları taşıma (Kaput, 1999), ilişkiyi tanımaya yardımcı olan düşünmedeki sıralı eylemler (Malara, 2012) olarak da ifade edilmektedir. Daha genel olarak Davydov (1990) genellemelerin özelden genele akıl yürütme ile gerçekleştiğini ifade etmektedir. Polya (1957, s. 108) ise genellemeyi bir kavrama ilişkin anlayıştan kavramı içeren kümeye dair veya sınırlı bir kümeye ilişkin kavrayıştan bu sınırlı kümeyi de içeren daha kapsamlı bir kümeye ilişkin kavrayışa geçmek olarak tanımlamıştır. Özel durumlar ile genel durum arasındaki bu ilişki matematiksel düşünmenin özelleştirme ve genelleme becerileri ile açıklanmaktadır. Mason ve Pimm (1984) ifade ettiği gibi geneli özel yoluyla ve özel olanı genel aracılığıyla görmektir. Mason (1996) genelde özel olanı görmeyi teorinin, birikmiş deneyimin, perspektifin uygulanmasını mümkün kılan uzmanlaşma olarak açıklamaktadır.

Davydov (1990) genelleme terimin bağlantılı olduğu iki fenomen olduğunu ifade etmiştir. Bunlardan birincisi süreç olması diğeri süreç sonundaki üründür. Ellis (2007) yaptığı çalışmada genellemeyi, "süreç (genelleme eylemleri)" ve "ürün (yansıma genellemeleri)" şeklinde ele almıştır. Genelleme sürecinde sergilenen davranışlar, izlenen adımlar ve kullanılan genelleme stratejiler birçok araştırmanın konusu olmuştur. Ellis (2007) bir genelleme taksonomisi ifade etmiştir ve genellemeyi, genelleme eylemleri (ilişkilendirme, araştırma, genişletme) ve refleksiyon genellemeleri (belirleme veya açıklama, tanımlama, etki) şeklinde sınıflandırmıştır. Lobato (2003) öğrencilerin problemlerin arasındaki benzerlikleri oluşturma süreçlerini, öğrenen perspektifinden değerlendirmiş ve öğrenen odaklı transfer ile bireylerin karşılaştığı yeni durumu, önceden zihninde hangi yapıları ile nasıl ilişkilendirdiği ile ilgili ipuçları vermiştir. Radford'a (2010) göre ise genellemeler olgusal, bağlamsal ve sembolik olmak üzere üç aşamadan oluşmaktadır. İlk aşama, genellikle eylemlerin işlemsel olarak yürütüldüğü ve yapılan genellemenin fiziksel boyutta kaldığı olgusal genellemedir. İkinci aşama, öğrencinin şekillerden yola çıkarak bir sonraki terim hakkında yorum yaptığı daha soyut olan ve yapılan genellemelerin tanımlanması için dilin kullanıldığı bağlamsal genellemedir. Üçüncü aşama ise cebirsel gösterimlerin yapılarak genellemenin ifade edildiği sembolik genelleme aşamasıdır. Varhol, Gunnar ve Hansen (2020) 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel genelleme problemlerinde genelleme yaparken nasıl işbirliği yaptıkları ve nasıl katkıda bulunduklarını incelemişlerdir. Bu çalışmada Radford (2010) tarafından önerilen çerçeveyi kullanmışlardır. Bulgular oluşturulan işbirliği gruplarının cebirsel genelleme ile başladıklarını ve daha sonra olgusal ve bağlamsal genelleme ile ilerlediklerini göstermiştir. Ayrıca, tüm grupların sembolik genelleme düzeyinde çözümler ürettiklerini göstermiştir. Garcia-Cruz ve Martinón (1998) öğrencilerin lineer örüntülerdeki genelleme seviyelerini üç aşamada incelemişlerdir. Birinci seviye "Prosedürel aktivite", ikincisi "Prosedürel anlama-Lokal genelleme" ve son aşama ise "kavramsal anlama-Global genelleme" dir**.** Prosedürel aktivite aşamasında öğrenci lineer örüntünün tekrarlayan karakterlerini fark eder ve bunlar giriş soruları için kullanılır. Bu stratejiler genelleştirilemez, ancak lineer modelin sabit farkını vurgulamada önemlidir. Prosedürel anlayış veya yerel genelleme aşamasında öğrenci yerel bir genelleme oluşturur. Bu, görsel veya sayısal dizide gerçekleştirilen bir eylemden bir değişmez kurulabildiği anlamına gelmektedir, ancak bu değişmez problemden probleme farklı olabilir. Buradaki temel özellik, prosedürel aktiviteden prosedürel anlamaya geçişin gerçekleşmiş olmasıdır ve bu değişim öğrencilerin performansında açıkça gözlemlenebilir. Kavramsal anlama veya global genelleme aşamasında ise öğrenci bir stratejiyi genelleştirmiştir. Bu, yeni ve benzer bir problemde aynı eylemi gerçekleştirdiği ve aynı değişmezi kurduğu anlamına gelir. Bu düzeyde, genelleme olarak elde edilen şey, bu durumlarla uğraşırken öğrencinin genel performansıdır ve buna strateji denilmektedir. Dolayısıyla, bir stratejinin belirli bir durumda bileşen olarak oluşturduğu eylem ve değişmez vardır. Krutetskii (1976) matematiksel kavramları genelleme yoluyla öğrenen öğrencilerde iki yöntem keşfetmiştir. Birinci yöntem matematikte başarılı olamayan öğrencilerin kullandığı, belirli sembollerin sistematik bir şekilde değiştiği genelleme durumlarına dayanan *"deneysel genelleme"* dir. İkinci yöntem olan başarılı öğrencilerin tercih ettiği, öğrenciler genelleme durumlarındaki bağıntıları ve ilişkileri tanımlayarak sadece bir örnekle bile çözümü genelleyebildikleri *"teorik genellemede"dir.*

Öğrencilerin genellemeleri doğru bir şekilde formüle edebilmeleri için, belirli içeriklerden soyutlamaları ve benzerlikleri, yapıları ve ilişkileri tek tek tanımlamaları gerekir (Davydov, 1990; Sriraman, 2004). Bu nedenle de matematiksel genelleme yapmanın birçok öğrenci için zor olduğu yaygın olarak kabul edilmektedir (Bills, Ainley & Wilson, 2006; Lee, 1996, Stacey, 1989; Stacey &MacGregor 2001; Becker & Rivera, 2005). Yapılan çalışmalarda genellemenin farklı yönlerine odaklanmışlardır. Bunlar farklı genelleme türlerini sınıflandırmak, genelleme yaklaşımlarını incelemek, kullanılan stratejilere odaklanmak, farklı öğretim yöntemleri kullanarak öğrencilerin genelleme becerilerinin gelişimine yardımcı olmaktır. Bu çalışmalar farklı kademelerdeki öğrenci, öğretmen veya öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın katılımcıları ise eğitim kademesi olarak doktora, yüksek lisans, ve lisans, öğretmen, öğretmen adayı ve akademisyen aynı zamanda da matematikçi ve matematik eğitimcisi olarak farklılık göstermektedir. Dolayısıyla katılımcıların genelleme sürecindeki davranışları karşılaştırıldığında çalışmanın bulgularının alana katkısı önemli olmaktadır. Aynı zamanda da ele alınan problem açısından bakıldığında belli bir adımdan sonra kural sağlanmadığından genelleme ile ilgili yapılmış çalışmalardan ayrılmaktadır. Bu nedenle de bu çalışma hem ele aldığı problem ile hem de katılımcılarından birisinin Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora yapan akademisyen olması nedeni ile yapılan çalışmalardan ayrılmaktadır. Nitekim araştırmanın amacı matematik öğretmen adaylarının, matematik öğretmenlerinin ve matematikçinin genelleme sürecini, aldıkları özel durumları, kullandıkları stratejileri çember ve noktalar problemi bağlamında incelemektir. Bu doğrultuda da çalışmanın odak noktası genelleme becerisinde ele alınan problem durumlarının önemli olduğu ve genelleme becerilerinin öğretiminde farklı problemler durumlarının önemine vurgu yapmaktadır.

Yöntem

Matematikçi (Fen Bilimleri Esnstitüsünde Matematik Ana Bilim Dalında doktora yapan araştırma görevlisi), matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının çember ve noktalar probleminde genelleme süreçlerini, ele aldıkları özel durumları, düşünme süreçleri ve kullandıkları stratejilerin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Bu çalışmada katılımcılara ait veriler görüşme sürecindeki zamanla, görüşme sürecinde ifade ettikleri ve teslim ettikleri çözüm yaptıkları kâğıtlarındaki veriler ve çember ve noktalar problemi ile sınırlıdır. Bu nedenle bir olgunun bir ya da birkaç örneğinin derinlemesine çalışıldığı, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir yaklaşım olan durum çalışması dikkate alınmıştır (Creswell, 2007).

Katılımcılar

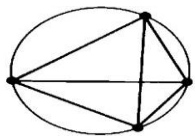
Çalışma son sınıfta öğrenimlerine devam eden iki matematik öğretmen adayı, Anadolu lisesinde görev yapan iki matematik öğretmeni ve bir matematikçi olmak üzere toplam beş gönüllü katılımcı ile yürütülmüştür. Çalışmanın etiği açısından katılımcıların ismi gizli tutulmuş ve öğretmen adayları için ÖA1 ve ÖA2, öğretmenler için Ö1 ve Ö2 ve matematikçi araştırma görevlisi için A1 şeklinde isimlendirme yapılmıştır. Öğretmenler 12 ve 13 yıllık mesleki deneyime sahiptir. A1, Fen Bilimleri

Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora eğitimi yapmaktadır. Ö1, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans eğitimini tamamlamıştır.

Veri toplama aracı

Öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme yaparken düşünme süreçlerini ortaya çıkarmak amacı Çember ve Noktalar Sorusu kullanılmıştır. Bu soru Mason vd., (2010, s.75) "*the circle and spots*" probleminden uyarlanmıştır.

Bir çember etrafına "n" nokta yerleştiriniz ve her çift noktayı düz çizgilerle birleştiriniz. Çemberin bölünebildiği en fazla bölgenin sayısı nedir? Örneğin aşağıdaki şekilde 4 nokta varken 8 olası bölge oluşur



Çember ve noktalar sorusu bilgiye dayalı bir soru değildir. Yalnızca görsel düşünme becerisi ve genelleme becerisine sahip olmayı gerektirmektedir. Bu nedenle genelleme süreci boyunca neler düşündüklerini daha iyi ortaya çıkarılabileceği düşünülmüştür. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş ayrı ayrı başlıklar halinde verilmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır.

Verilerin toplanması

Veriler katılımcıların uygun olduğu zaman dilimlerinde ve önceden randevu alınarak, bireysel olarak toplanmıştır. Katılımcılara veri toplama süreci boyunca oturumun kameraya alınacağı belirtilmiş ve hiçbir katılımcı tedirginlik duymamıştır. Sadece kamera kayıtlarında yüzleri çekilmemeye özen gösterilmiştir. Oturum boyunca kâğıt ve kalem hazır olarak verilmiştir. Çözüm süreci boyunca düşündükleri her şeyi ifade etmeleri istenmiştir. Çözüm yaptıkları kâğıtlar alınmıştır.

Verilerin analizi

Yarı yapılandırılmış klinik görüşmelerde yapılan video kayıtları öncelikle bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Daha sonra yazılı hale getirilmiş, katılımcıların teslim ettikleri çözüm kâğıtları ile birlikte dosyalanmıştır. Araştırma sürecini daha iyi yansıtabilmek, katılımcıların süreç içindeki düşünme yaklaşımlarını daha iyi izleyebilmek ve karşılaştırmalar yapabilmek için her bir katılımcı için bulgular ayrı ayrı verilmiştir. Daha sonra karşılaştırmalar yapılarak benzerlikler, farklılıklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Güvenirliği arttırmak için, araştırmacı takip ettiği süreçleri açık bir biçimde tanımlamış ve ilgili dokümanlarla desteklemiştir. Ayrıca güvenirliğinin sağlanması için öncelikle araştırmanın veri kaynağı olan öğretmen adayları, öğretmenler ve matematikçi açık bir biçimde tanımlanmıştır. Araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığı açıklanmıştır. Gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla açıklanmıştır.

BULGULAR ve YORUM

Araştırmanın problemine cevap verebilmek için katılımcılara çember ve noktalar sorusu yöneltilmiştir. Her bir katılımcının süreç boyunca ne düşündükleri ve sonuca nasıl ulaştıkları önce tek tek incelenmiş daha sonra birlikte yorumlanmıştır. Genelleme sorularında ki amaç katılımcıların genelleme sürecindeki ele aldıkları özel durumlar, yaklaşımları, düşündükleri ve nasıl bir genellemeye ulaştıklarının ortaya çıkarılmasıdır.

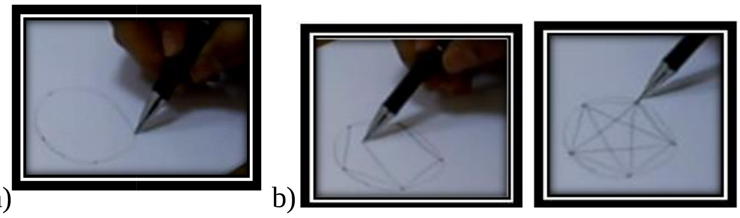
A1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

A1 soruyu okuduktan sonra dönüt almak için araştırmacıyla arasında aşağıdaki gibi diyalog gerçekleşmiştir.

A1*: yani noktalara ile bölge arasında bir uyum mu yakalamaya çalışacağız?*

ARAŞTIRMACI*: evet, aşağıda bir tane örneğimiz verilmiş.*

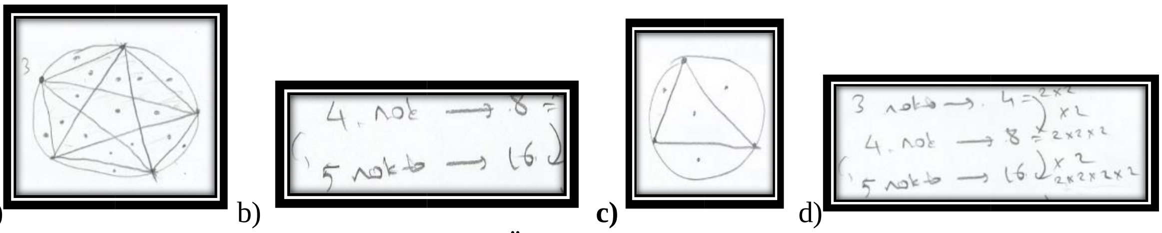
Daha sonra A1 “*bunu mesela herhangi bir 5 nokta için oluşturmaya çalışsak nasıl bir şey olur*” ifadesini belirtmiş ve Şekil 1a’ daki gibi kâğıdına, üzerinde 5 nokta bulunan çember çizmiş, Şekil 1b’ deki gibi sırayla noktaları birleştirmiştir.



a) b)

Şekil 1. *A1’in Çözüm İçin Çizdiği Birinci Çember ve çember Üzerinde Noktaları Birleştirmesi*

Çember üzerinde oluşan bölgeleri saymada bir müddet sıkıntı çekmiştir. Oluşan bölgelerin hangilerini sayacağını tamamlamak için verilen örneği tekrar incelemiş, örnekte oluşan bölgeleri saymıştır. Problemde verilen örnek çemberi inceledikten sonra A1 çember üzerinde 5 nokta almış ve çizmiş olduğu bölgeleri Şekil2a’daki gibi işaretleyerek saymıştır.



a) b) **c)** d)

Şekil 2. *A1’in Çember Üzerinde Oluşan Bölgeleri Sayması*

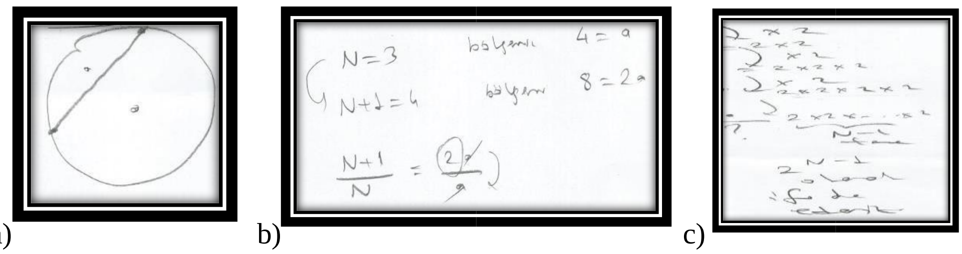
Oluşan bölgeleri saydıktan sonra “*O halde, 4 nokta için 8 olası bölge ifade ederken, 5 nokta için 16 mı? Şekilden öyle çıktı, acaba nokta sayısı arttıkça ki ben bir de burada 3 noktayı denemek istiyorum.*” demiştir. Araştırmacının “*neden 3 noktayı deniyorsunuz*” sorusu üzerine A1 “*noktalar birer arttıkça acaba* (Şekil 2b) *noktalar arası bir uyum var mı diye bakacağım*” şeklinde cevap vermiş ve Şekil 2c. deki çemberi çizmiş, oluşan bölgeleri saymıştır. Almış olduğu noktaları ve bu noktalar sonucu oluşan bölge sayılarını Şekil 2d’ deki gibi kâğıdına “*Yani 3 nokta için 4 olası bölgemiz var. Dolayısıyla noktalar birer artıkça, olası bölgelerinde ikişer kat arttığı görülüyor.*” açıklamasında bulunarak yazmıştır. Daha sonra araştırmacı “*peki yeterli mi bizim için bu 3 deneme*” şeklinde soru yöneltmiştir. Bu soru üzerine aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

A1: *3 deneme yeterli midir? Zaten sen iki nokta verdiğin anda, çemberin ne oluşur iki bölge oluşturursun.*

ARAŞTIRMACI: *Şekil üzerinde gösterebilir misiniz?*

A1: *Şekildeki gibi (şekil 3a) farklı iki nokta verdiğin anda bölgeyi iki noktaya ayırdı. 3 nokta verdiğin anda 4 bölgeye ayırdı, dolayısıyla aritmetik bir şekilde, ifade ettiğimizde noktalar birer artıkça, bölgelerin ikişer kat arttığını gördük. Dolayısıyla n nokta verdiğinde…*”

açıklamasında bulunmuş ve almış olduğu çemberler örneklerini inceleyerek düşünmeye başlamıştır.



a) b) c)

Şekil 3. *A1’in İncelediği Üçüncü Çember ve İncelediği Nokta Sayıları ve Bölgeler Arasındaki İlişki*

Araştırmacının “*ne düşünüyorsunuz”* sorusu üzerine “*bağlantı kurmaya çalışacağım. n-nokta verdiğim de acaba o ilişkiyi nasıl görebiliriz. n-nokta için acaba ilişkimiz nasıl olur*?” şeklinde bir düşüncelerini ifade etmiş ve ilişki aramıştır. Bu arayışını aşağıda ki gibi sesli bir biçimde açıklayarak gerçekleştirmiştir.

A1: *genel bir yargıya varmak istiyorum burada. n-nokta için bu sayıları nasıl gösterebiliriz? Bölgemiz neydi, n=3 seçelim mesela tamam mı, bölgemiz neydi 3nokta için neydi 4 tü, onu da “a” olarak ifade ettim. Şimdi, diğerinde noktamız ne oldu “n+1” oldu yani 4 oldu, bölgemiz ne oldu, 4-nokta için, 8 oldu yani oda ne oldu “2a” oldu. Dolayısıyla ben taraf tarafa oranlama yaparsam* (Şekil 3b), *dolayısıyla oran 2 çıkıyor;* Devamında *“n-nokta olursa 2n mi acaba. Noktalar ile bölgeler arasında ki oranın, birer artıkça oranın 2 kat arttığını gördük. hımm acaba n-nokta olduğunda bölgesel anlamda kaç bölge olduğunu n-cinsinden nasıl ifade edeceğiz.*” ifadesinde bulunmuştur. Bu ifadeden sonra bir müddet daha düşünmüştür. Daha sonra “*n-ye bağlı bir sayı ifade edeceğiz*” demiştir ve noktalar ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramaya devam etmiştir. Sonuç olarak “*2 ile bölgeler arasında bağlantı, oran kurabilir miyim diye düşünüyorum da, dolayısıyla nokta sayısı 5 iken 4tane 2'nin çarpımı var. n tane nokta olduğunda 2x2x2x2x...x2, (n-1) tane bölge oluşacak onu da 2^{n-1} olarak ifade ederiz*” şeklinde açıklamada bulunmuş, kağıdına Şekil 3c deki gibi yazmış, çözümünü sonlandırmıştır.

A1‘in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; A1 soruyu okuduktan sonra çember üzerinde 5 nokta almıştır. Alınan bu noktaları birleştirerek oluşan bölge sayılarını saymıştır. Almış olduğu 5 nokta ile soruda verilen 4 nokta sonucu oluşan bölge sayılarını karşılaştırmıştır (ilişkilendirme). Daha sonra çember üzerinde 3 nokta almaya karar vermiştir. Almış olduğu bu noktalar sonucu oluşan bölge sayılarını kâğıdına yazarak bölge sayıları arasında bir ilişki aramıştır (araştırma). Bu ilişkiyi ararken araştırmacının *“bir ilişki kurma açısından 3 nokta bizim için yeterli mi?*” sorusu üzerine, çember üzerinde 2 nokta alarak oluşan bölgelere bakmıştır. Ardışık farklı iki nokta sayısını ve oluşan bölge sayısını oranlayarak arada ki artış miktarının 2 kat olduğunu belirtmiş ve bir müddet düşündükten sonra, nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında 2^{n-1} şeklinde (Genelleme) genel bir kural olacağını ifade etmiştir. Görüldüğü üzere, A1 burada sırası ile n=5,4,3,2 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramış ve n-nokta için sonucu 2^{n-1} şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Genelleme yaparken kullandığı stratejiler örnekler oluşturma, varsayımlarını test etmek için örnekler verme (2. noktayı alması), örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme ve genellemeye ulaşma şeklindedir.

Ö1'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö1 problemi okuduktan sonra bir süre düşünmüştür. Daha sonra kağıdına Şekil 4 deki çemberler çizerek, bu çemberler üzerinde sırası ile nokta sayısını 2,3 ve 4 olarak almıştır. Bu noktaları birleştirerek oluşan bölge sayılarını çemberlerin altlarına yazmıştır.

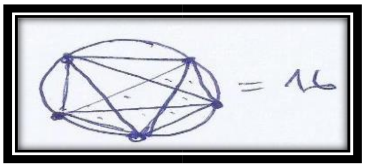
Şekil 4. *Ö1'in Çember Üzerinde Sırası İle Aldığı Noktalar*

Kâğıdına çizmiş olduğu çemberleri ve yaptığı işlemleri ise “*iki nokta varken 2 bölge çıkar. 3 nokta varken 4 bölge çıkar. Dairenin bölünebildiği bölge sayısı 2 bölge var 4 bölge var. 4 nokta içinde 8 bölge zaten. 2'nin kuvvetleri olma olasılığı yüksek 2^n diye düşünüyorum şuan*” şeklinde açıklamıştır. 2^n genellemesini teyit etme açısından araştırmacı ile Ö1 arasında aşağıda ki şekilde diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI: *2^n tane olur diyorsunuz.*

Ö1: *Yoo!!! 2^{n-1} çünkü 2 noktada bir bölge oluyor. 2^{n-1} oluyor. 2 noktadan 2 bölge çıkıyor, 3 noktadan 4 nokta çıkıyor. ama nasıl ispatlarım.*

Bu diyalogdan sonra Ö1, 2^n genellemesini 2^{n-1} şeklinde değiştirmiştir. Fakat şüpheci bir şekilde yaklaştığından dolayı araştırmacı "*niye emin değilsiniz hocam*" şeklinde Ö1'e soru yöneltmiştir. Ö1 "*çünkü kural oluşturmadık henüz.*" şeklinde yanıtlamış ve *"biraz daha düşünelim. 3 noktadan 4 noktaya geçerken neler değişiyor ona bir bakmam lazım, 3 noktada 4 bölge var 4. noktayı eklediğimizde 3 tane artıyor yani, çizdiğimden artı 1 geldi* (şekiller üzerinde göstererek)" ifadesinde bulunmuş, çember üzerinde 5 nokta almış Şekil 5 deki gibi oluşan bölge sayısını incelemiştir.



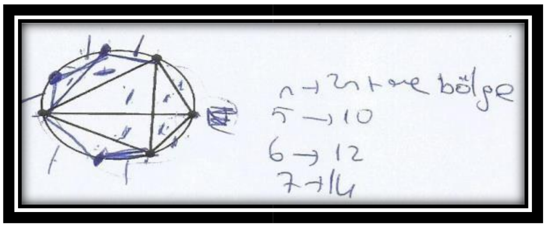
Şekil 5. *Ö1'in İncelediği Çember Üzerinde ki 5 Noktalı Örneği*

Araştırmacının "*16 nokta oluşuyor, yani kuraldan emin misiniz?"* sorusu üzerine Ö1 oluşan bölge sayılarını tekrar sayarak "*yazdığımız formül doğru gözüküyor. Sebebini tam açıklayamasakta*" şeklinde ifadesinde bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

Ö1'in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö1 soruyu okuduktan sonra ilk olarak şekil çizmiş, şekil üzerinde sırası ile n=2,3,4 noktalarını alarak oluşan bölgeleri ve bu bölgeler arasında ki ilişkileri incelemiştir (ilişkilendirme-araştırma). İnceleme sonucu önce 2^n şeklinde bir kuralına ulaşmıştır (genelleme). Araştırmacının emin olmak için sorular yöneltmesi üzerine Ö1 bir müddet düşünerek kuralını 2^{n-1} şeklinde değiştirmiştir. Daha sonra bu kuralını ispatlama düşüncesiyle hareketle, (emin olmak için) çember üzerinde 5 nokta almış, oluşan bölge sayısını şekil üzerinde saymış, aynı zamanda söylemiş olduğu kural ile de hesaplamıştır. Dolayısıyla şüpheci ve emin olmayan bir yaklaşım ile "*yazdığımız kural doğru gözüküyor, yani n nokta için 2^{n-1} bölge*" oluşacağı yanıtını vermiş soruyu sonlandırmıştır. Görüldüğü üzere, Ö1 sırası ile n=2,3,4,5 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramış ve n-nokta için sonucu 2^{n-1} şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnekler oluşturma, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme, varsayımlarına test etmek için örnekler verme (5. noktayı alması) ve genellemeye ulaşma şeklindedir.

Ö2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

Ö2 soruyu okuduktan sonra ilk olarak oluşan bölge sayısını sonsuz olarak belirtmiş. Bunu ise "*Sonsuz tane olmaz mı? Bir çember etrafına n-tane nokta yerleştiriyorsun"* şeklinde açıklamıştır. Daha sonra bir müddet düşünmüş ve soru da verilen örnek çemberden faydalanarak kâğıdına Şekil 6 daki gibi sırası ile 5 ve 6 nokta almış, oluşan bölge sayılarını karşılarına yazmıştır.



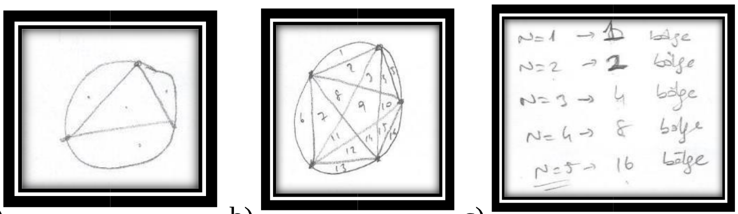
Şekil 6. *ÖA2'nin İncelemiş Olduğu Çemberler ve Çıkarımları*

Kâğıda yazdıklarını "5-*nokta olursa 10 bölge olur. Şöyle 6-nokta alalım onu da sayalım. 6-nokta için 12 bölge oldu. O zaman n-tane için "2n" tane bölge oluyor*" şeklinde açıklamıştır. Araştırmacının söylenenleri doğrulamak adına "*Yani n-tane koyduğumuz da 2n bölge mi oluşur diyorsunuz?"* sorusu üzerine Ö2 "*evet öyle düşünüyorum.* (Şekil 6) *bir tane daha yapalım 7 tane bölge olsun, onları da birleştirelim. 2 tane gelecek zaten, 1 tane 2 taneye bölünecek böylelikle 2 tane gelmiş olacak. Dolayısıyla 14 tane olmuş olacak"* cevabını vermiştir.

Ö2‘nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; Ö2 soruyu okuduktan sonra soruda verilen örnek çemberden faydalanarak 5 ve 6 nokta almış, bu noktaları birleştirmiştir. Bu noktalar sonucu oluşan bölge sayılarını sırası ile 10 ve 12 şeklinde belirtmiştir. Almış oldukları nokta sayısı ve oluşan bölge sayıları arasında ki ilişkiye (ilişkilendirme - araştırma) bakarak “2n” varsayımında bulunmuştur (genelleme). Bu kuralının doğruluğunu göstermek adına aynı çember üzerinde 7. noktayı alarak bölgeleri saymıştır. Şekil üzerinde 14 bölge oluştuğunu göstererek. Kuralının doğru olduğunu ifade etmiştir. Görüldüğü üzere, Ö2 sırası ile n=4,5,6,7 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramış ve n-nokta için sonucu 2n şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnekler oluşturma, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme, varsayımlarına test etmek için örnekler verme (7. noktayı alması) ve genellemeye ulaşma şeklindedir.

ÖA1’den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA1 soruyu okuduktan sonra “*oluşabilecek bölge sayısından kasıt nedir?*” şeklinde araştırmacıdan dönüt alma gereksinimi duymuştur. Araştırmacı soruda verilen örneği göstererek açıklamada bulunmuştur. Daha sonra ÖA1 *“n’ye ben 1 desem, 1 tane noktam var zaten onunla da hiçbir şekil oluşturamam. O yüzden burada ki sayı benim için “0” bölge diyelim. “n” şimdi 2 alalım, 2 noktadan 1 doğru geçer, başkada bir şansı yok. O yüzden 2 bölge oluşur diyelim. Gerçi 1 nokta varsa bölge tamamıdır, o zaman 1 bölge oluşur diyebilirim oraya. Bölge çemberin kendisi olur sonuçta çizgi çizemediğim için. 2 noktaya 2 demiştik çünkü sonuçta 2’ye bölecek. “n” yi 3 alsak, 3 alarak düşünsek. Deneyelim bakalım (*Şekil 7a)



a) b) c)

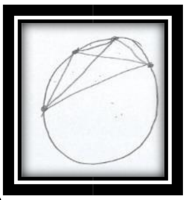
Şekil 7. *ÖA1’in İncelediği Birinci Çember*

Daha sonra “*4 bölge olmuş oldu. Bu soruda da 4 tane için 8 bölge olduğunu söylemiş. Yani ne olmuş oldu acaba 2’nin katları şeklinde mi gitmiş oldu.”* şeklinde sırası ile n=0,1,2 ve 4 noktalarını alarak oluşan bölgeleri hesaplamıştır. Nokta ve bölge sayıları arasında ki ilişkileri inceleyerek “2n” genel kuralı olabileceğini belirtmiştir. Bu varsayımından sonra “*Olur mu ki. 5 tane versek 10 bölgeden çok fazla çıkacak. Acaba 2 kat 2 kat gitse 16 mı? Merak ettim deneyeceğim biraz uzun olacak ama*” diyerek çember üzerinde Şekil 7b deki gibi 5 nokta alarak oluşan bölge saymıştır. Bir müddet düşündükten sonra “*16 tane oldu hep 2 ile çarpılarak gidiyor, diğerinde 32, diğerinde 64 o şekilde muhtemelen gidecek tabi “n” bağlı bir şey görmem lazım benim. Her seferinde 2 katı olarak gidiyor ama 1 için 1, 2 için 2, 3 için 4’ü, 4 için 8’i, 5 için 16 verecek*” şeklinde ifadede bulunmuş Şekil 7c deki gibi kâğıdına yazmıştır. Nokta ve bölge sayısı arasında ki ilişkiyi ise n-nokta için “*2^{n-1} desek. “n” ye 1 verdiğim zaman 2^0 ‘dan 1 gelecek, 2 verdiğimde 2^1 den 2, 3 verdiğim zaman 4, 4 verdiğim zaman 2^3den 8, 5 verdiğimde 16 gelecek. O zaman 2^{n-1} taneymiş*.” Biçiminde açıklamada bulunmuş ve soruyu sonlandırmıştır.

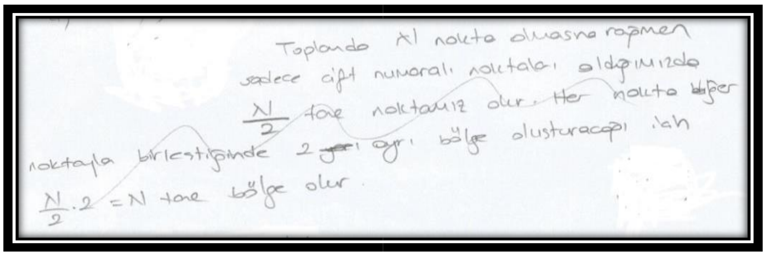
ÖA1’in bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA1 soruyu okuduktan sonra soru ile ilgili bilgi almak açısından araştırmacıya sorular yöneltmiş ve araştırmacı açıklamalarda bulunmuştur. Daha sonra ÖA1 sırası ile n=0,1,2,3 ve 4 noktaları sonucu oluşan bölge sayılarını hesaplamıştır (ilişkilendirme). Bu bölgeler arasında “2n” kuralı olabileceği veya 2’şer kat artacağı (araştırma) varsayımlarında bulunmuştur. Bu varsayımlardan sonra n=5 noktası için oluşan bölge sayısını hesaplamıştır (araştırma) ve nokta sayısı ile oluşan bölge sayılarını kâğıda yazmıştır. Bir müddet kâğıdına bakarak düşünmüş ve 5-nokta için 32, 6 nokta için 64…n-nokta için 2^{n-1} tane bölge oluşacağı (genelleme) yanıtını vermiştir. Görüldüğü üzere, ÖA1 sırası ile n=0,1,2,3,4,5 noktalarını alarak nokta sayısı ile oluşan bölge sayısı arasında bir ilişki aramıştır. Fakat n=0,1,2 için oluşan bölge sayısını şekil çizmeden aklından hesaplamış daha sonra 3. nokta sonucu oluşan bölgeler için kağıdına şekil çizmiştir ve n-nokta için sonucu 2^{n-1} şeklinde genel bir kurala bağlamıştır. Genelleme yaparken kullandığı strateji; örnekler oluşturma, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme, varsayımlarına test etmek için örnekler verme (5. noktayı alması) ve genellemeye ulaşma şeklindedir.

ÖA2'den Elde Edilen Bulgular ve Yorum

ÖA2 soruyu okurken aynı zamanda Şekil 8'deki gibi kâğıdına çember çizerek, çember üzerinde 4 nokta almış ve bu noktaları birleştirmiştir.



a)



b)

Şekil 8. *ÖA2'nin İncelediği Birinci Çember ve Sorunun Çözümü İçin Yazdıkları*

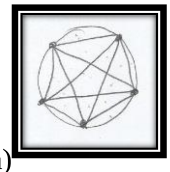
Daha sonra çizmiş olduğu çemberde oluşan bölgeleri sayma sonucu 7 bölgenin oluştuğunu belirtmiştir. Soruda verilen örnek ile kâğıdına çizdiği çemberi kıyaslayarak oluşan bölge sayısı hakkında *"bende 1 tane bölge eksik, seçtiğim noktalara bağlı olarak değişiyor o zaman. Mesela 7 de çıkabiliyor*." açıklamasında bulunmuştur. Araştırmacının "*her noktayı birleştirdiniz mi*" sorusu üzerine ÖA2 kâğıdına tekrar bakarak, "*şurayı birleştirmemişim*." demiş ve soruda verilen örnek ile kendi çemberinde ki bölge sayısını eşit bulmuştur. Daha sonra "*tamam o zaman bu durumda 2 nokta bir bölgeye ayıracak. Pardon 1 nokta bir kere birleştirdiğim de 2 bölgeye ayırmış olacak. Bu geometri dersinde yapıyorduk ya işte noktaları birleştirdiğim zaman düzlemi 2 ayrı parçaya ayırır gibi bir şey diyorduk. Mesela böyle 2 parçaya ayırmış oldu. O zaman her nokta 2 bölgeye ayıracak. Eee Sonuç olarak n-tane diyor, sayımız belli değil. O zaman 2n-olur."* şeklinde açıklamada bulunarak n-nokta için "2n" sonucuna ulaşmıştır. Araştırmacının emin olmak adına aşağıda ki şekilde sorular yöneltmesi üzerine; 253

***ARAŞTIRMACI**: 2n. 2 çarpı "n" mi.*

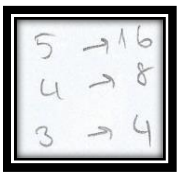
***ÖA2**: hıhı "n" tane nokta var çiftleri aldığımız için yine "n" kadar olur yani "n/2" kadar noktayı birleştirmiş olacağız.*

***ARAŞTIRMACI**: Hmm onu ifade edecek olursak*

şeklinde ÖA2 ile araştırmacı arasında diyalog gerçekleşmiştir. Bu diyalog sonunda ÖA2 Şekil 8b deki gibi kâğıdına açıklamada bulunmuştur. Açıklamasını bitirdikten sonra ÖA2 birden "*dur bir dakika*" diyerek çember üzerinde n=3 nokta almaya karar vermiştir. Bir çember daha çizerek *"Haaa olmadı 3 tane nokta var 4 bölge oldu*." ifadesinde bulunmuştur. Daha sonra Araştırmacının "*3'noktayı denemek nereden aklına geldi. Niye 3'ü denemek istedin*." sorusu üzerine; **"**bilemem *belki bu örnek çift sayı olduğu için, "n" çift sayı olduğu için her biri tek tek birleşiyor ya, çift sayı oldu için iki-iki birleştirdiğimde, belki o yüzden öyle olmuştur yani. Tek bir sayı için ne olur diye düşündüm*." yanıtını vermiştir. Daha önce 3 nokta alarak çizmiş olduğu çember üzerine 2 nokta daha eklemiş ve Şekil 9a deki gibi n=5 nokta için bölgeler oluşturmuştur.



a)



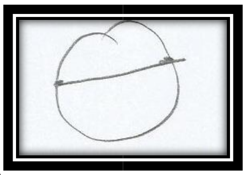
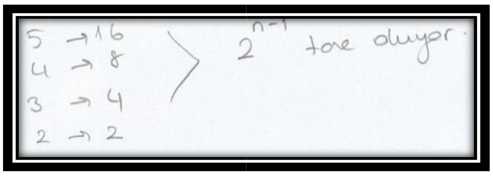
b)

Şekil 9. *ÖA2'nin İncelediği Üçüncü Çember ve İncelediği Nokta Sayısı ve Bölge Sayıları*

Ardından 5 nokta için oluşan bölge sayılarını sayarak 16 bölge oluştuğunu hesaplamıştır. Kâğıdına ise Şekil 9b deki gibi nokta sayısı ile hesaplamış olduğu oluşan bölge sayılarını yazmıştır. Bir müddet düşündükten sonra "*Hmmm 2 üzeri bir şey olabilir o zaman. Buldum 2^{n-1} tane olur*" ifadesinde bulunmuş, yani 2^{n-1} bölge oluşacağını belirtmiştir. İlkyazmış olduğu kuralın ve "2n" sonucunun ise üzerini çizmiştir. Daha sonra araştırmacı ile aralarında aşağıda ki şekilde bir diyalog gerçekleşmiştir.

ARAŞTIRMACI*: yeterli mi peki 3 tane örnek.*

ÖA2*: ben genelde 3 tane ile genellenebilirliğine inanırım. Sonuçta tümevarımda da öyle yapmıyor muyuz? K=1 için, k=n için, k=n+1 için. Bir tane daha veriyim mi? çok olacak o zaman ama 32 tane olacak. Ben 2 nokta için de 2 bölge oluyor,* (Şekil 10a) *onu göstereyim.*

a)  b) 

Şekil 10. *ÖA2'nin İncelediği Dördüncü Çember*

Şeklinde açıklamada bulunmuştur. Son olarak ise almış olduğu noktaları toplu bir biçim de Şekil 10b deki gibi kâğıdına yazarak soruyu sonlandırmıştır.

ÖA2'nin bu sorusundan elde edilen bulguları özetlenirse; ÖA2 soruyu okurken aynı zamanda kâğıdına çember çizerek çember üzerinde 4 nokta almıştır. Oluşan bölge sayısını ilk durumda 7 olarak bulmuştur. Dolayısıyla noktalar farklı yerlerde alınırsa bölge sayısı değişeceği düşüncesini söylemiştir. Araştırmacı ile aralarında geçen diyalog sonucunda herhangi iki noktayı birleştirmediğini fark etmiştir. Bu noktaları da birleştirdikten sonra 4 noktada 8 bölge oluşacağını belirtmiştir. Kendi yapmış olduğu çember ile soruda verilen örnekte oluşan bölge sayılarını karşılaştırmıştır. n=4 noktasından ve oluşan bölge sayısından yola çıkarak 2n şeklinde kural oluşacağını belirtmiştir. Daha sonra birden n=3 nokta için oluşan bölge sayısını hesaplamaya karar vermiştir. Araştırmacı ÖA2'ye birden böyle bir karar almasının nedenini sorunca "*bilemem belki bu örnek çift sayı olduğu için, n çift sayı olduğu için her biri tek tek birleşiyor ya, çift sayı oldu için iki-iki birleştirdiğimde, belki o yüzden öyle olmuştur yani. Tek bir sayı için ne olur diye düşündüm*." (araştırma) şeklinde açıklamada bulunmuştur. Daha sonra kâğıdına çember çizerek sırası ile 3 ve 5 noktaları sonucu oluşan bölge sayılarını hesaplamıştır (ilişkilendirme) Bir müddet düşündükten sonra (araştırma) nokta sayısı ile bölge sayısı arasında ki ilişkiyi 2^{n-1} şeklinde ifade etmiş (genelleme) ve n-nokta için 2^{n-1} tane bölge oluşacağını belirtmiştir. Araştırmacının bunun için "*3 özel nokta denememiz yeterlimi*" sorusu üzerine ÖA2 "*ben genelde 3 tane ile genellenebilirliğine inanırım. Sonuçta tümevarımda da öyle yapmıyor muyuz. k=1 için, k=n için, k=n+1 için. Bir tane daha veriyim mi? çok olacak o zaman ama 32 tane olacak. 2 için de 2 bölge oluyor*" yanıtını vermiştir.

Tüm Katılımcılardan Elde Edilen Bulguların Karşılaştırılması ve Yorum

Bu problemde katılımcıların nokta sayısı ile bölge sayısı arasında ki ilişkiyi kurma süreçleri incelenmiştir. Genelleme özel durumlardan yola çıkarak genel hakkında yargıda bulunabilme becerisidir. Elbette burada alınan özel durumların sayısı net değildir. Bu problemde Mason vd.'nin (2010) ifade ettiği gibi ilk beş durumdan yola çıkılırsa "6 *nokta için 32 bölge oluşacaktır*" şeklinde yanlış bir varsayıma neden olacaktır. Fakat 6'dan az sayıda noktalar alındığında oluşacak bölge sayısı ile alınan nokta sayısı arasında 2^{n-1} genel kuralı oluşmaktadır.

Katılımcılardan Ö2 haricinde diğerlerinin almış oldukları özel noktalar ise hep 6'dan az sayıda olmuştur. Dolayısıyla A1, Ö1, ÖA1 ve ÖA2 genel kuralı oluşturarak n tane nokta için oluşan maksimum bölge sayısını "2^{n-1}" şeklinde belirtmişlerdir. Fakat ÖA1 ve ÖA2 bu genel kuralı söylemeden önce sırası ile "2n" ve "2n, n/2" şeklinde kurallar bulmuşlardır. Daha sonra genellemelerini 2^{n-1} şeklinde değiştirmişlerdir. Ö2 ise "2n" kuralı olduğunu belirterek n tane nokta için "2n" bölge oluşacağı yanıtını vermiştir. Bunun sebebini Ö2'nin soruda belirtilen her noktayı birleştirin ifadesini gerçekleştirmediğinden kaynaklandığı söylenebilir. Katılımcılar bu genellemeye ulaşırken ise almış

254

oldukları nokta sayıları ÖA1 6 farklı nokta diğerleri ise 4 farklı nokta şeklinde olmuştur. Fakat bu noktaları alırken sırası ile aldıkları nokta sayıları A1: 5,4,3,2 -Ö1: 2,3,4,5 -Ö2:4,5,6,7 -ÖA1:0,1,2,3,4,5 -ÖA2:4,3,5,2 şeklindedir. Dikkat çeken durum ise A1'in almış olduğu noktalar azalan şeklinde iken, Ö1,Ö2 ve ÖA1'in almış olduğu noktalar ise artan şeklindedir. ÖA2'nin almış olduğu noktalar arasında ise bir düzen bulunmamaktadır. Fakat katılımcılar genel kurala ulaşırken, kâğıtlarına ÖA2 azalan, diğerleri ise artan şeklinde noktaları sistematik olarak organize etmişlerdir.

Bir başka dikkat çeken durum, A1 dışında ki katılımcıların almış oldukları son noktalar, bulmuş oldukları kurallarının doğruluğunu göstermek için iken, A1'i ise ilişki varsayımından emin olmak için son noktayı denemiştir. Katılımcıların genellemeye ulaşırken kullandıkları stratejiler benzerlik göstermektedir. Tüm bulgular Tablo 2'de özetlenmiştir.

Tablo 2. *Elde edilen bulguların özeti*

Katılımcı	**Sırası ile almış oldukları noktalar**	**İfade edilen Kural**	**Stratejiler**
A1	n=5,4,3,2	2^{n-1}	Örnek oluşturma İlişki varsayımında bulunma Varsayımdan emin olmak için örnek verme Örnekleri sistemli organize etme İlişki arama Kural oluşturma Genelleme
Ö1	n=2,3,4,5	2^{n-1}	Örnek oluşturma Örnekleri sistemli organize etme İlişki arama Kural Kuralı test etme Genelleme
Ö2	n=4,5,6,7	2n	Örnek oluşturma Örnekleri sistemli organize etme İlişki arama Kural Kuralı test etme Genelleme
ÖA1	n=0,1,2,3,4,5	$2n-2^{n-1}$	Örnek oluşturma Örnekleri sistemli organize etme İlişki arama Kural varsayımında bulunma Kuralı test etme Genelleme
ÖA2	n=4,3,5,2	$2n-\frac{n}{2}-2^{n-1}$	Örnek oluşturma Kural varsayımında bulunma (kural oluşturma) Varsayımı test etme Örnekleri sistemleştirme İlişki arama Kural varsayımında bulunma Kuralı test etme Genelleme

Her katılımcı bir genellemeye ulaşmasına rağmen genelleme sürecinde aldığı özel değerlerden de görüldüğü gibi en sorgulayıcı yaklaşan Ö1 olmuştur. ÖA2 ise almış olduğu noktaların kendisine genel bir kural oluşturmak için yeterli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca genel kuralların ispat şekli olan tümevarım ile var olan durumunu ilişkilendirmiştir.

Tartışma ve sonuç

Özelleştirme ve genelleme becerileri arasında önemli bir ilişki vardır. Genelleme sürecinde incelenen örneklerden yola çıkılmaktadır. Bu çalışmanın bulguları katılımcıların 4 veya 5 özel durum sonrasında genelleme yaptıklarını göstermiştir. Ebette Zazkis, Liljedahl ve Chernoff (2007) ifade ettiği gibi bir genelleme oluşturmak için ne tür örneklerin ve kaç örneğin gerekli olduğuna dair kesin bir cevap yoktur. Stylianides ve Stylianides (2008) her kademedeki öğrencilerde amprik doğrulama şemasının yaygın olduğunu, öğrencilerin bu amprik argümanları matematiksel genellemelerin ispatları olarak kabul ettiklerini ifade etmiştir. Lisans öğrencileriyle yaptıkları çalışmada da bilişsel çatışma yapmak amacı ile çember ve noktalar problemini kullanmışlardır. Bu problemle çalıştıktan sonra öğrencilerin yaklaşımlarını gözden geçirmeye ve bu yaklaşımların sınırlamalarının farkına varmaya başladığını ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Stylianides ve Stylianides (2009) öğrencilerin çember ve noktalar problemi için öncelikle n nokta sayısı olmak üzere 2^{n-1} yanıtını verdiklerini ama kısa süre sonra 6 için olmadığını fark ettiklerini ifade etmiştir. Bu aşamadan sonra öğrencilerin örüntüye güvenmek için kaç durumu kontrol etmenin yeterli olacağını sorgulamaya başladıklarını ifade etmiştir.

Bu çalışmanın sonuçları genelleme becerisi kazandırmada seçilen problemler durumlarının önemli olduğu vurgusunu taşımaktadır. Bu birçok çalışma tarafından desteklenmektedir. Zazkis, Liljedahl ve Chernoff (2007) örneklerin seçiminin genelleme yeteneklerini geliştirmede önemli bir rol oynadığını ifade etmiştir. Üstelik öğrencilerin genellemelerini reddetmeye yardımcı olan karşı örneklerin özelliklerini ele almışlar ve yanlış genellemeyle sonuçlanabilecek örnek seçimindeki olası tuzakları örneklendirmişlerdir. Diğer önemi bir bulgu ise katılımcıların cebirsel olarak ifade ettikleri kuralların farklı olmasıdır. Genellemenin bazı durumlarda doğru olması, genellemenin tüm olası durumlar için geçerli olduğunu garanti etmez (Stylianides, 2009). Zazkis, Liljedahl ve Chernoff (2007) belirli özel durumları rahatça çalışabilen öğrencilerin bile genelliği ifade etmekte zorlandığı belirtilmiştir. Zazkis ve Liljedahl (2002) bir örüntüyü tanımak ve onu cebirsel olarak ifade edebilmek arasında önemli bir boşluk olduğunu belirtmişlerdir. Örüntülerin cebirsel genellemesine odaklanan bir öğretim deneyiminin ardından Lee (1996) "büyük *sorunun bir örüntüyü görmede olmadığını cebirsel olarak bir örüntü algılamakta olduğunu*" (s.95) gözlemlemiştir. Bu çalışmanın bulguları, öğretmen öğrencilerin genellemelerini sağlayacak problem çözme deneyimlerini artırmak isteniyorsa problem seçiminin de önemli olduğunu göstermektedir. Nitekim Weinberg (2019) genelleme becerilerini geliştirmek için öğrencilerin genelleme uygulamalarına maruz kalmaları gerektiği fikrini güçlendirmektedir Bu çalışmanın bir başka bulgusu, öğrencinin genelleme davranışının, her bir problem üzerinde ve keşfedilmeyi ve formüle edilmeyi bekleyen temel bir yapıya sahip bir problem sınıfında uzun bir süre çalışabilmesine bağlı olmasıdır. İleride yapılacak çalışmalarda, genelleme gibi daha üst düzey matematiksel davranışlarını daha iyi anlamak için farklı genelleme problemlerinin yer aldığı Sriraman (2004) ifade ettiği gibi boylamsal çalışmaların yapılması önerilebilir.

Bilgilendirme / Acknowledgement:

1- Bu çalışma ikinci yazarın, birinci yazar danışmanlığında yaptığı yüksek lisans çalışmasından üretilmiştir.

2-Çalışmaya katkılarından dolay akademisyen, öğretmen ve öğretmen adaylarına teşekkür ederiz.

3-Makale yüksek lisans tez çalışmasında üretildiği için etik kurulu izni ve/veya yasal/özel izin alınmasını gerektiren bir durum yoktur.

4- Bu makalede araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

KAYNAKÇA

Bills, L., Ainley, J., ve Wilson, K. (2006). Modes of algebraic communication—moving between natural language, spreadsheet formulae and standard notation. *For the Learning of Mathematics, 26*(1), 41–46.

Becker, J. R., ve Rivera, F. (2005). Generalization strategies of beginning high school algebra students. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 121–128. Melbourne: PME.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design*: *Choosing among five approaches*. (2nd ed.). UK: Sage Publications.

Davydov, V. V. (1990). Types of generalisation in instruction: logical and phsycological problems in the structuring of school curricula. In: J. Kilpactrick (Ed.). *Soviet studies in mathematics education*, (2). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In *Mathematical knowledge: Its growth through teaching*. (pp. 61-85). Netherlands: Springer.

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *The Journal of The Learning Sciences*, *16*(2), 221–262.

Garcia-Cruz, J. A., ve Martinon, A. (1998). Levels of genaralizations in linear patterns. *Proceeding of the 22 nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 329-336.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. L. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133–156). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: Universty of Chicago Press. 257

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. (pp. 87–106). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Lobato, J. E. (2006). Alternative perspectives on the transfer of learning: History, issues, and challenges for future research. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(4), 431-449.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa. *Educational Researcher, 32*(1), 17-20.

Malara, N. A. (2012). Generalization processes in the teaching/learning of algebra: students behaviours and teacher role. In Maj-Tatsis B., Tatsis K. (Eds.) *Generalization in mathematics at all educational levels*. 57-90. Wydawnictwo Uniwersitetu Rzeszowskiego, Poland: Rzeszów.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, and L. Lee, (Eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching.* 65-86. Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

Mason J., Burton L., ve Stacey K., (2010). *Thinking mathematically*. London: Addison Wesley.

Mason J ve Pimm D. (1984) Generic examples: seeing the general in the particular. *Journal of Educational Studies 15*(3), 277-289.

Polya, G. (1957*). How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton, N.J: Princeton University Press.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. In P. Brosnan, D. B. Erchickk, & L. Flevares (Eds.). *32nd annual meeting of the North American Chapter of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 37–62, Columbus: PME-NA.

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 205–222.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147–164.

Stacey, K., ve MacGregor, M. (2001). Curriculum reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.). *Perspectives on school algebra*. 141–154. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing generalization. *International Mathematical Virtual Institute Open Mathematical Education Notes*, *6*(1), 41-55.

Stylianides, A. J. (2009). *Breaking the equation "empirical argument = proof."* .Mathematics Teaching, *213, 9-14.*

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2008). Enhancing undergraduate students' understanding of proof. *Electronic proceedings of the 11th Conference on Research in Undergraduate Mathematics,Education* (http://mathed.asu.edu/crume2008/Proceedings/Stylianides&Stylianides_LONG(21).pdf). San Diego, California.

Stylianides, G. J., ve Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Varhol, A., Gunnar O. G. ve Hansen, M. N. (2020). Discovering key interactions. How student interactions relate to progress in mathematical generalization. *Mathematics Education Research Journal*. 1 Mayıs 2020 tarihinde https://doi.org/10.1007/s13394-020-00308-z adresinden erişildi.

Weinberg, P. (2019).Generalizing and proving in an elementary mathematics teacher education program: moving beyond logic. *EURASIA Journal of Mathematics, science and technology education*, 15(9). 1 Ocak 2020 tarihinde https://www.ejmste.com/download/generalizing-and-proving-in-an-elementary-mathematics-teacher-education-program-moving-beyond-logic-7697.pdf adresinden erişildi.

Zazkis, R., ve Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379- 402.

Zazkis, R. Liljedahl, P. ve Chernoff, E. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education*, *40*(1), 131-141.