

## İntegral kavramının öğretiminde konu sıralamasının kavram imgeleri bağlamında incelenmesi; Belirli ve belirsiz integraller

Ali Delice\*, Eyüp Sevimli \*\*

### Özet

Bu çalışmada, integral konusunun yüksek öğretim matematiğindeki konu sırası ele alınmış; programda belirsiz-belirli integral sıralaması ile öğretilmesi önerilen integral konusunun sıralamasında yapılacak değişikliğin, öğrenci kavram tanım ve imgelerine yapacağı etkininin incelenmesi hedeflenmiştir. Araştırma 2008–2010 yılları arasında bir devlet üniversitesinin kimya öğretmenliği programına kayıtlı 1. sınıf öğrencileri ile yürütülmüştür. Çoklu yöntemin kullanıldığı araştırmada yarı deneysel araştırma deseni var olan iki durumun betimlenmesi için kullanılmıştır. Kontrol grubu öğrencileri (n=40), Analiz II dersi kapsamında aldıkları integral konusunu geleneksel programa uygun olarak belirsiz-belirli integral sırası ile işlerken; deney grubu öğrencilerinde (n=40) aynı konu belirli-belirsiz integral sırası ile ele alınmıştır. Çalışma sonuçları, deney grubu öğrencilerinde “alan”, kontrol grubu öğrencilerinde “türevin tersi” imgelerinin baskın olduğunu göstermiştir. Ayrıca, genelleştirilmiş integral problemlerinde, belirli integral imgesi “türevin tersi” olan öğrencilerin yanlış kavramlar üzerinden yanlış sonuçlara ulaştıkları “alan” imgesine sahip öğrencilerin, bu problem tipi için doğru çözümleri daha kolay gerçekleştirdikleri belirlenmiştir. Çalışma, integral konusuna belirsiz integral kavramı ile yapılacak girişin, belirli integral konusundaki imgeleri sınırlandırabileceğine dikkat çekmektedir.

**Anahtar Sözcükler:** Belirli integral, kavram imgesi, konu sıralaması, problem çözme.

## Investigation of concept images in the topical order of teaching integrals; Definite and indefinite integrals

### Abstract

Given the higher education curriculum, which suggests teaching of indefinite integrals before definite integrals, this study aims to investigate the effects of changing the sequence of integral topics on learners' conceptual definition and images. The participants were first year undergraduates registered at chemistry education department of a state university during 2008-2010. The sample was selected using an appropriate sampling technique of nonprobability sampling. As part of the course Analysis II, the tutor taught first indefinite, then definite integrals to the control group of 40 learners using the traditional program; whereas presentation sequence was reversed with the experimental group students as definite then indefinite integrals. The findings indicated that the experimental group students predominantly had the “area” image and the control group had the “inverse of derivative” image. Students in both groups mainly used these concept images when defining the concept and had difficulties in providing the formal definition.

**Key Words:** Definite integral, concept image, topical order, problem solving.

\* Yrd. Doç. Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İstanbul.  
e-posta: alidelize@marmara.edu.tr

\*\* Arş. Gör., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İstanbul.  
e-posta: eyup.sevimli@marmara.edu.tr

## Giriş

Analiz, fonksiyon ve davranışlarını inceleyen yüksek öğretimin çeşitli bölüm ve kademelerinde işlenen bir ders olmakla birlikte; temeli cebir ve trigonometri gibi konulara dayanan bir bilim dalıdır (Ferrini-Mundy ve Graham, 1994). Dersin adı üniversite ve bölümlere göre Genel Matematik I-II, Matematik I-II, Analiz I-II, Analize Giriş I-II gibi farklılıklar gösterse de, içeriği birbirine paraleldir. Bu dersle ilgili bir diğer paralel durum ise dersin öğretim ve öğreniminde çeşitli zorluklar yaşanması ile ilgilidir (Calvo, 1997; Delice ve Sevimli, 2010). Bu zorluklardan biri de analiz dersi kapsamında yer alan konulardaki tanım ve imge bilgisi eksikliğidir (Rösken ve Rolka, 2007). Bir kavrama yönelik zengin imgelerin oluşturulabilmesi, kavram ile ilgili bilişsel yapıların ilişkilendirilmesi ile sağlanabilir (Tall ve Vinner, 1981). Bu noktada ilgili kavramın formal tanımı kadar, bireyin kendi yapılandığı tanımı, kavramın zihinsel resmi, özellikleri, kısaca içe dönük süreçlerin tamamı kavramsal anlamlandırma için önemlidir. İşlem bilgisi gereken problemlerde başarılı olan öğrencilerin, problem çözme süreçlerini analiz edememesi, ilgili kavrama yönelik sınırlı tanım ve imgelerinin olabileceği ile ilişkilendirilmektedir (Vinner, 1991).

Analiz dersi konuları arasında yer alan integral kavramının anlaşılmasındaki güçlük, birçok araştırmacı tarafından kabul edilmektedir (Ferrini-Mundy ve Graham, 1994; Orton, 1983; Rasslan ve Tall, 2002). İşlemsel bilgisi gerektiren problemlerdeki başarıya rağmen, bu bilgilerin yorumlanması yada farklı bağlamlarda kullanılmasının gerektiği durumlarda öğrencilerin çeşitli zorluklar yaşadığı ilgili araştırma sonuçlarından bilinmektedir (Camacho, Depool ve Santos-Trigo, 2004; Orton, 1983). Kuralların, formüllerin, işlemlerin başarıyla gerçekleştirilebildiği birçok soruda, öğrencilerin, bu sürecin arkasında bulunan matematiksel düşünceyi kavrayamamaları, disiplinler arası ilişkilerde zorluk yaşamaları araştırmacılar için ortak problem durumunu oluşturmuştur. Bu bağlamda birçok çalışmanın ortak bulgusu, belirli integral kavramına yüklenen anlamın zenginleştirilmesi gerektiği şeklindedir (Rasslan ve Tall, 2002; Rösken ve Rolka, 2007; Sevimli ve Delice, 2010). Rasslan ve Tall'un (2002) teorik çerçevesinden faydalanılarak oluşturulan çalışmada integral konusunun yüksek öğretim programındaki konu sırası ele alınmıştır. Integral kavramının öğretim sıralamasında yapılacak bir değişikliğin, problem çözme süreçlerine ve

öğrencilerdeki kavram tanım ve imgelerine etkisinin incelenmesi hedeflenmiştir.

## Kavram tanımı ve kavram imgesi

Bir matematiksel kavramın zihinde oluşma sürecini veya öğrencilerin, matematiksel bir kavrama yönelik düşünme stillerini bilişsel (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 1991), yapılandırmacı (Schoenfeld, 1998) veya sosyo-kültürel (Renshaw, 1996) modellerle açıklamaya çalışan farklı yaklaşımlar bulunmaktadır. Tall ve Vinner (1981), bireylerin epistemolojik ve psikolojik olarak farklı özelliklere sahip olduklarını belirterek, aynı kavramların farklı kişiler tarafından farklı şekillerde algılanabildiğini vurgulayan kavram tanımı-kavram imgesi modelini geliştirmişlerdir. Bu modele göre, tüm matematik kavramlarının formal (resmi) ve formal olmayan (kişisel) anlamda çeşitli tanımları mevcuttur. Bu tanımların birçoğu öğrencilere ortaöğretim veya üniversite eğitimi süresince verilmeye çalışılır. Kavram tanımı, kavramı ayrıntıları ile açıkça belirten kelimelerin bütünüdür. Bir matematiksel kavramın formal tanımında kavrama yönelik genel özellik ve bilgiler bulunur ve bu tanım matematik bilim çevresi tarafından kabul gören genel-geçer tanımdır.

Formal olmayan tanım, formal tanımın kişiler tarafından yeniden yapılandırılması ve kişiye özgü yönlerinin ortaya çıktığı durumdur. İster öğrenciye verilmiş olsun isterse öğrenci tarafından yapılandırılmış olsun, kavram tanımı zaman içinde değişim gösterir. Bu şekli ile kişisel kavram tanımı, formal kavram tanımından farklıdır. Bir kavramın öğrenilmesi sürecinde kavram tanımının bilinmesi kadar önemli olan bir diğer başlık, kavrama yönelik zengin imgelerin oluşmasıdır (Vinner, 1991). Kavram imgesi ise kavramla ilgili tüm bilişsel yapıların tanımlarla ilişkilendirilmesi süreci olarak tanımlanabilir. Kavram imgeleri bireyin zihninde oluşan resim, sembol, işlem ya da özellikleri içerir. Öğrenci, uyarılmış kavram imgesini, kendi kelimeleri ile açıklayarak bir kavram tanımı oluşturabilir. Ne var ki, öğrenciler gerek ilgili konularda karşılaştıkları problemlerin çözülmesi sırasında, gerekse çözüme karar verirken tanım kullanımının gerekli olmadığına inanırlar (Tall ve Vinner, 1981).

Vinner (1991) kavram tanımı ile imgesi arasındaki ilişkide birçok farklı geçişin olduğuna dikkat çekmektedir. Bir matematiksel kavramın öğrenilmesinden problem çözme

sürecinde kullanılmasına kadar farklı durumlarda farklı geçişlerden söz edilebilir. Örneğin bir matematiksel kavramla ilk kez karşılaşan bir öğrenci, kavramın tanımından yola çıkarak kavrama anlam yükleyebilir. Bir diğer durumda ise öğrenci, kavramın çağrıştırdığı tüm bilişsel yapılar üzerinden, kavramı en iyi açıklayabilecek nitelikteki kelimeleri seçerek tanımını yapılandırabilir. Ancak problem çözme sürecinde ilişkinin yönü ve bileşenleri değişebilir. Verilen bir görevin tamamlanması sürecinde kavramın tanımından yola çıkılarak, kavram imgesi ile kurulan ilişkiler çıktılarının verimliliği açısından önemlidir (Vinner, 1991). Bazı öğrencilerin problem çözme sürecinde tanımdan çok kavram imgelerinden yararlandıkları, kavram imgelerini de bazı prototip örnekler yoluyla oluşturdukları bilinmektedir (Tall ve Vinner, 1981; Rösken ve Rolka, 2007).

Belirli integral konusu bu bağlamda düşünülecek olursa, alan imgesine sahip olan öğrencilerin diğerlerine kıyasla negatif alan yanılışına daha az düştükleri gözlenmiştir. İntegral kavramı üzerine yapılan birçok çalışmada öğrencilerin kavram tanımına yönelik yaşadıkları zorlukların altı çizilmiştir (Rasslan ve Tall, 2002; Thompson ve Silverman, 2007). Matematik eğitimi alan yazınında belirli integral kavramına yönelik ilk çalışmalardan biri, Orton (1983) tarafından yapılmıştır. Analize giriş seviyesindeki öğrencilerin, belirli integral ile ilgili anlama düzeylerini belirlemeye yönelik yaptığı çalışmada, öğrencilerin işaret belirleme karmaşası üzerinde duran Orton (a.g.e), toplamların limiti düşüncesinin cebirsel anlamda karmaşaya neden olduğunu ifade ederek yaşanan en büyük zorluğun 'negatif alan' olarak nitelendirilen kavram yanılışlarından kaynaklandığını ifade etmiştir. İntegralin sadece alan olarak görülmesinin öğrenim açısından risk taşıdığını söyleyen Calvo (1997), derin anlamlandırma ile kavramın farklı uygulamalarının dikkate alınması gerektiğini vurgulamaktadır. Tall ve Vinner'ın (1981) kavram tanımı ve kavram imgeleri çalışmalarından hareketle, Rasslan ve Tall'de (2002) belirli integral kavramının tanım ve imgeleri arasındaki ilişkisine bakmışlar, belirli integral kavramının tanımını anlamayan öğrencilerin alan hesaplama problemlerini yorumlamada ve disiplinler arası ilişkilendirmelerde zorluk yaşadığına dikkat çekmişlerdir. Ferrini-Mundy ve Graham (1994), ortaöğretim düzeyindeki öğrencileri ele alarak, öğrencilerin daha sonraki matematik eğitimleri için zararlı

olabilecek kuralsal teknikleri öğrendiğini belirtmişler ve bu bilgilerin kavramsal anlamayı etkilediğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin güçlü kavram imgelerine sahip olabilmeleri için, belirsiz integral kavramı ve integral alma kurallarından önce, belirli integral kavramı ile konuya giriş yapılmasını öneren araştırmacılar, belirli integral ile ilgili yapılan hataların temelinde kavram tanımının bilinmemesi ya da yorumlanamamasının yattığını düşünmektedirler (Sevimli ve Delice, 2010; Akkoç ve Kurt, 2008).

Türk Eğitim Sisteminde öğrenciler integral kavramı ile ilk kez ortaöğretim son sınıfında karşılaşır. Ortaöğretim matematik programında yapılan değişiklik ile birlikte 12. Sınıf düzeyinde 4. bölüm başlığı altında incelenen integral kavramı, iki alt öğrenme alanına sahip olup bunlar; belirsiz ve belirli integral kavramına ilişkin kazanımlar. Yüksek öğretimde kullanılan bazı ders kitaplarında olduğu gibi Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında da "*belirsiz integral*" kavramının, "*belirli integral*" kavramından önce verildiği görülmektedir (MEB, 2005).

Bu çalışma, öğrencilerin belirli integral kavramına yönelik tanım ve imgelerine kavram öğretim sırasının etkisi üzerine odaklanmıştır. Araştırma "*integral konusunda, içerik sıralamasında yapılacak değişiklik, öğrencilerdeki belirli integral kavram tanım ve imgelerini etkiler mi?*" sorusu ve "*Öğrencilerin belirli integral konusundaki imgeleri ile problem çözme süreçleri arasında ilişki var mıdır?*" sorusuna cevap aramaktadır.

## **Yöntem**

Çoklu yöntemin kullanıldığı araştırmada yarı deneysel araştırma deseni ile var olan iki durumun betimlenmesi amaçlanmıştır (Patton, 1990). Çalışmada amaç program içeriği sıralamasında yapılacak değişikliğin kavram tanım ve imgelerine etkisini incelemek olduğundan yarı deneysel araştırma deseni kullanılmıştır. Araştırmada kullanılan karma yöntem yaklaşımı nitel paradigma kullanılarak yapılacak ilişkilendirmelerle birlikte bazı istatistiksel bilgilerden yararlanılacağı için nicel paradigma da yer alacağından karma yöntem kullanılmıştır (Cohen, Manion ve Morrison, 2000). Patton'a (1990) göre, nitel ve nicel veriler bir araştırmanın birbirini tamamlayan ve anlamlandıran parçaları olduğundan birlikte kullanılabilirler. Çalışma deneysel durum desenine göre düzenlenmiş olup; çalışma grubu yarı deneysel araştırma

desenine göre seçilmiştir. Kavramın öğretimi sürecindeki içerik sıralaması bu iki grubu birbirinden ayıran temel işlemdir.

### Araştırma grubu

Araştırma 2008–2010 yılları arasında bir devlet üniversitesinin kimya öğretmenliği programına kayıtlı toplam 80 kişilik 1. sınıf öğrencileri üzerinde yürütülmüştür. Çalışma grubu olasılık dışı örnekleme türlerinden, uygun örnekleme tekniğine göre seçilmiştir. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin seçiminde bir önceki dönemde alınan Analiz I dersindeki başarılar dikkate alınmış her bir grupta benzer özellikleri taşıyan öğrencilerin olmasına özen gösterilmiştir. Ayrıca bu öğrencilerin integral konusu ile ilgili benzer ön bilgi seviyelerinde olduklarını tespit etmek için İntegral Yeterlik Testi uygulanmış olup, bu test ve geliştirilmesi ile ilgili sürece bir sonraki bölümde yer verilmiştir.

### Öğrenme Ortamı

Bir deneysel durum çalışmasında araştırma gruplarının ayrıntılı bir şekilde betimlenmesi önem arz etmektedir. Ayrıca deneysel durum deseninde, çalışma kapsamında araştırılan durumların yansımaları üzerine odaklanıldığından araştırma grubunu etkileyebilecek, çalışmanın teorik yapısının dışında kalan değişkenlerin kontrol altına alınması önemlidir. Bu bağlamda her iki grubun öğretim süreci aynı öğretim elemanı tarafından, aynı süre içerisinde, sunuş yolu ile ve herhangi bir yazılım veya materyal kullanılmaksızın gerçekleştirilmiştir. Geleneksel programın uygulandığı 40 kişilik kontrol grubu öğrencileri, Analiz II dersi kapsamında aldıkları integral konusunu “*Belirsiz integral, integrasyon teknikleri, sonlu toplamların limiti, belirli integral ve hesabı, Analizin Temel Teoremi, alan hesapları, dönel yüzeylerin hacimlerinin hesabı, dilimleme yoluyla hacim hesabı, eğri uzunluğu hesabı, genelleştirilmiş integraller*” içerik sırası ile işlemişlerdir. Bu grupta kullanılan ders kitabı, ilgili konuyu teorik olarak ele alan ve daha çok soyut kavramlar (teorem-ispat) üzerinde odaklanan bir kaynaktır.

Aynı sayıdaki deney grubu öğrencileri aynı konuyu, aynı öğretim elemanı tarafından “*Sonlu toplamların limiti, belirli integral ve hesabı, Analizin Temel Teoremi, belirsiz integral ve hesabı, alan hesapları, dönel yüzeylerin hacimlerinin hesabı, dilimleme yoluyla hacim hesabı, eğri uzunluğu hesabı, genelleştirilmiş integraller*” sırası ile işlemiştir.

Bu grupta “Thomas Calculus 1” kitabının Türkçe çevirisi kullanılmıştır. Bu kaynak belirli integralin farklı temsilleri ve günlük hayat örneklerini içermesinin yanı sıra, görsel öğelere de sıkça yer vermesi yönüyle diğer kaynaktan farklılık göstermektedir.

### Veri toplama araçları

Araştırmacının olaylar ve olgular arasında ilişkileri yorumlama ve anlam vermesini kolaylaştıracak çeşitli veri toplama araçları kullanılmıştır. Çalışma grubunun integral konusu ile ilgili ön bilgi düzeylerini belirlemek üzere uygulanan İntegral Yeterlik Testi (İYT), araştırmacılar tarafından oluşturulmuştur. Bu testin geliştirilmesi ve uygulanmasında amaç, deney ve kontrol grubuna seçilen öğrencilerin benzer özellikleri taşıyıp taşımadıklarının belirlenmesidir. Ön bilgi eksikliğinin olmaması, hazır bulunuşluk seviyelerinin yeterli düzeyde olmasının çalışma sonuçlarını anlamlı ve etkili kılacağı düşünülmüştür. İntegral kavramının alt yapısını oluşturacak limit ve türev konularına bu test kapsamında yer verilmiştir. Testin oluşturulması sürecinde aşağıdaki adımlar izlenmiştir. Öncelikle ders kitapları, ders notları, sınav soruları ve olası kavram yanlışlarını dikkate alan çeşitli çalışma testlerinden (Calvo, 1997; Ferrini-Mundy ve Graham, 1994; Orton, 1983) toplanan sorular ile bir havuz oluşturulmuştur. Daha sonra yükseköğretim kimya öğretmenliği bölümündeki Genel Matematik II dersi için Bologna süreci kapsamında integral konusunda belirlenen kazanımlar çerçevesinde hazırlanan belirtke tablosundan yararlanılmış; test 27 soruluk ilk taslak halini almıştır. Bu testin kazanım örneklemini temsil edip etmediği ve hedeflenen davranışları ölçüp ölçmediğini belirlemek için yükseköğretimde görev yapan dört matematik eğitimi uzmanının görüşleri alınmıştır. Görünüş ve kapsam geçerliğine göre değerlendirilen ve yeniden düzenlenen test, farklı bir devlet üniversitesinin kimya bölümündeki 67 öğrenciye uygulanmıştır. Klasik yazılı sınav formatında hazırlanan testin son halinde 20 soru bulunmakta olup, yapılan deneme çalışması sonucunda testin 40 dakika içerisinde cevaplanmasının uygun olacağı düşünülmüştür. İYT’ nin güvenilirliğini belirlemek için de değerlendiriciler arası (inter-rater) güvenilirlik katsayısı hesaplanmış, rastgele seçilen cevap kâğıtlarındaki uzman değerlendirme benzerlikleri, testin güvenilir olabileceği şeklinde yorumlanmıştır.

Öğrencilerin 6 haftalık öğretim süreci sonundaki kavram tanımı ve imgeleri, Rasslan



ve Tall (2002) tarafından geliştirilen İntegral Kavram Testi (İKT) ile değerlendirilmiştir. İKT, öğrencilerin belirli integral konusunda oluşturdukları bilişsel şemaları açığa çıkarmak üzere tasarlanmıştır. Testte kavram tanımına yönelik iki soru bulunurken bu sorulardan biri formal tanımı belirlemeye yönelik ( $\int_a^b f(x)dx$  gösteriminin matematiksel tanımını yapınız); diğeri formal olmayan tanım üzerinden öğrencilerin kavram şemalarına ulaşmak üzere hazırlanmıştır ( $f$  fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığındaki belirli integrali ifadesi sizin için ne anlama gelir). Testte bulunan bir diğer soru ile öğrencilerin genelleştirilmiş integral problemlerindeki çözüm süreçlerinin kavram imgeleri üzerinden analiz edilmesi hedeflenmiştir. Bu bağlamda integrantın tanımsız olduğu bir problem durumunda, öğrencilerin kavram imgelerinin problem çözüme süreçlerine etkisi araştırılmıştır. Test, sözel ifadelerden daha çok denklem ve grafik içerdiğinden, dilsel eşdeğerliği için doktora eğitimini yurtdışında tamamlamış iki uzmanın görüşlerinin yeterli olacağı düşünülmüştür.

### Verilerin analizi

Veri analizinde iki farklı istatistik analiz yöntemi kullanılmıştır. Bunlar kestirimsel ve betimsel istatistik olup, İntegral Yeterlilik Testi'nin analizinde kestirimsel istatistik yönteminden yararlanılmıştır. Çözüm sürecindeki kritik davranışlar üzerinden hazırlanan puanlama cetveli ile İYT, toplam yüz puan üzerinden değerlendirilmiştir. İKT'nin analizinde kullanılan betimsel istatistik yöntemi için çeşitli kodlama ve kategoriler yapılmıştır. Öğrencilerin belirli integral kavramına yönelik imgeleri, İKT'ye verdikleri cevaplardaki ortak özellikler ve ana fikirler dikkate alınarak oluşturulmuştur. İKT'nin analizinde Rasslan

ve Tall'un (2002) değerlendirme adım ve tekniklerinden yararlanılmıştır.

Öğrencilere yöneltilen " $f$ , fonksiyonunun  $[a,b]$  aralığındaki belirli integrali ifadesi sizin için ne anlama gelir" sorusuna eğri altında kalan alan ile ilgili cevap veren öğrenciler "alan" kategorisinde, ters türevi alınabilen fonksiyon ile ilişkili cevaplar "türevin tersi" kategorisinde, nümerik yaklaşımlar "birikimli toplamlar" kategorisinde değerlendirilmiştir. İntegral imgelerine göre beş kategori altında toplanan öğrencilerin, genelleştirilmiş integral problemlerindeki çözüm davranışları analiz edilmiştir. Bu bağlamda her bir imgede yer alan öğrencilerin genelleştirilmiş integral problemindeki çözüm süreçleri ayrı ayrı incelenmiştir. Çözüm süreçlerine göre üç kategori altında gruplandırılan cevapların açık kodlama yöntemiyle yapılan veri analizlerinde aşağıdaki sistem kullanılmıştır. Öğrencilerin yer aldıkları kategoriler rakamla (1,2,3,4,5), alt kategoriler harfle ( $a,b,c$ ) kodlanmış olup; her bir alt kategori öğrencilerin problem çözüme süreçlerine karşılık gelmektedir. Böylelikle imge türlerinin problem çözüme sürecine etkisinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda oluşturulan her bir kategori ve alt kategorilere yönelik bulgular betimlenmiş, bu verilere bir sonraki bölümde yer verilmiştir.

### Bulgular

#### İntegral Yeterlilik Testi bulguları

Deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin integral yeterliliklerine yönelik ön-test puan ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı farklılaşmanın olup olmadığı bağımsız gruplar t-testi ile araştırılmıştır. Deney ve kontrol gruplarının ön test puanlarının, ortalama ve standart sapma değerlerine ilişkin bulgular Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. Deney ve kontrol gruplarının ön test yeterlik puanlarının özellikleri

Gruplar	N	Ortalama	Standart Sapma	sd	t	p*
Deney grubu	40	64.2	12.91			
Kontrol grubu	40	62.8	12.17	78	.466	.651

\*Ortalama farklar 0.05 düzeyinde anlamlıdır.

İYT'den elde edilen puanlar için yapılan t-testi analizinde istatistiksel olarak anlamlı fark bulunmamıştır [ $t(78)=.466, p>.05$ ]. Grupların ön-test yeterlik puanı ortalamaları deney grubu için = 64.2 iken kontrol grubu için = 62.8'dir. İYT puanları, herhangi bir öğretim

sürecine dâhil olmayan öğrencilerin paralel performanslar sergilediğini, birbirine çok yakın ön bilgi düzeylerinin olduğunu göstermiştir. Bu sonuç araştırmanın temel problemi olan "integral konusundaki, program sıralamasında yapılacak değişiklik, öğrencilerin belirli integral

*kavram tanım ve imgesini etkiler mi?*” sorusu için önemlidir. Bundan sonraki süreçte, öğrencilerin belirli integral konusundaki kavram tanım ve imgelerini belirlemek üzere uygulanan İKT'nin bulgularına yer verilmiştir.

### İntegral Kavram Testi bulguları

Çalışma grubundaki öğrencilerin, belirli integral kavram (formal) tanımını yapabilmeye düzeylerini belirlemeye yönelik yöneltilen soruda belirli integralin Riemann tanımını başarılı bir şekilde yapan öğrenci yüzdesi deney grubu için %65; kontrol grubu için %30'dur. Ayrıca deney grubundaki öğrencilerin %10'unun, kontrol grubundaki öğrencilerin %35'inin integral kavramı ile ilgili herhangi bir tanımlama yapamaması bir diğer dikkat çekici bulgudur. Öğrencilerin belirli

integral kavramını tanımlarken yararlandıkları imgelerle ilgili olarak oluşturulan ortak kategorilere ve kodlara Tablo 2'de yer verilmiştir. Belirli integral kavram imgesini belirlemeye yönelik yöneltilen soruya verilen yanıtlar da deney grubunda yer alan öğrencilerin, daha çok “alan” (%43) imgesinden yararlandıkları görülmüştür (Tablo 2). Diğer imge kategorileri sırasıyla “türevin tersi” (%30), “birikimli toplamlar” (%23), “belirli bir aralıktaki değişim” (%10) şeklinde olmuştur. Kontrol grubu öğrencilerinin belirli integral tanımını yaparken daha çok “türevin tersi” (%48) imgesi üzerinde durdukları belirlenmiştir. Kontrol grubu öğrencilerine ait diğer imge kategorileri ise sırasıyla “anlamsız veya boş cevap” (%35), “alan” (%25), “belirli bir aralıktaki değişim” (%20) şeklindedir.

**Tablo 2. Belirli integral kavram tanımı üzerinden oluşturulan ortak kategoriler**

Kategori	İntegral İmgesi	Örnek	Deney %	Kontrol %
Kategori 1	Alan	$f(x)$ fonksiyonun grafiği ile $x$ eksenin sınırladığı alan	43	25
Kategori 2	Türevin tersi	$F(x)'=f(x)$ kuralı ile $\int f(x)dx=F(x)$ işleminin gerçekleştirildiği bir tür hesaplama aracı	30	48
Kategori 3	Birikimli toplamlar	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x_i$ şeklindeki sonsuz toplamların limiti	23	-
Kategori 4	Belirli bir aralıktaki değişim	$[a,b]$ kapalı aralığındaki için $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$	10	20
Kategori 5	Anlamsız veya boş cevap	-	10	35

Yukarıda verilen cevap yüzdelerinin deney ve kontrol grubu için %100'ü aşması, öğrencilerin tanımlama sürecinde birden fazla kavram imgesini kullanmasından kaynaklanmaktadır. İKT cevapları deney grubu öğrencilerinin belirli integral kavramını daha çok alan ile ilişkilendikleri gösterirken (Tablo 2), aynı grupta “belirli bir aralıktaki değişim” imgesine sahip öğrencilerin azınlıkta olduğu (%10) belirlenmiştir. Kontrol grubunda yer alan öğrencilerin yaklaşık yarısı (%48) integral kavramı ile ters türevi alınabilen fonksiyon kavramlarının ilişkisine dikkat çekerken, bu grupta yer alan öğrencilerin hiç birinin integralin nümerik tanımından yararlanmadıkları görülmektedir (Tablo 2). Kontrol grubundaki öğrencilerin anlamsız

veya boş cevapları da, deney grubuna göre belirgin bir farklılık göstermektedir. Tablo 2'ye bakılarak yapılacak yorumlardan biri de hem deney hem de kontrol grubunda bazı baskın imge türlerine rastlanmasıdır. Çalışmaya katılan tüm öğrenciler düşünüldüğünde baskın imgelerin “alan” ve “türevin tersi” olduğu; bu imgelere sahip öğrencilerin çalışma grubunun büyük çoğunluğunu oluşturduğu görülmektedir. Bu bulgu üzerinden öğrencilerin çeşitli ve zengin imgelerinin olmadığı yorumu yapılabilir. Bu bağlamda öğrenciler, baskın olarak kullandıkları imgelere göre sınıflandırılarak kodlanmış; bu kodlama “belirli integral konusundaki imgeler ile problem çözme süreçleri arasında ilişki var mıdır?” sorusunu cevaplamak için kullanılmıştır. Bu

araştırma sorusuna yönelik bulgular aşağıdaki başlıklar altında ele alınmıştır.

Genelleştirilmiş integral problemlerine yönelik çözüm türleri ve kavram imgesi

İKT kapsamında yer alan tanım ve imge dışındaki bir diğer problem türü ise genelleştirilmiş integral problemleridir. Genelleştirilmiş integral problemlerinde, öğrencilerden fonksiyonun süreksizlik noktalarının bulunduğu bir aralıkta integral hesabını yapmaları istenmektedir. Bu bağlamda öğrencilere yöneltilen " $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^4} dx = ?$  Integralini hesaplayınız?" problemi için verilen yanıtlar kategori ve alt kategorilere göre sınıflandırılmış ve ilgili örnekler eşliğinde Tablo 3'te sunulmuştur.

**"a" alt kategorisi:** İntegrant'ın tanımsız olduğu problemde grafik çizerek çözüme ulaşmaya çalışan ya da fonksiyonun süreksiz olduğu noktada, integrali iki parçaya ayırarak inceleyebilen öğrencilerin çözümleri "a" kategorisine alınmıştır.

**"b" alt kategorisi:** Fonksiyonun sürekliliğine dikkat edilmeksizin, ters türev hesabı yapılarak

bulunan sonuçlar "b" çözüm türü kategorisinde değerlendirilmiştir. Bir diğer ifadeyle "b" kategorisi, Analizin Temel Teoremi'nin (ATT) yanlış kullanması kaynaklı cebirsel çözümleri içermektedir.

**"c" alt kategorisi:** Fonksiyonun belirtilen aralıklarda sürekli olmadığı ve dolayısıyla integral hesabının gerçekleştirilemeyeceğini ifade eden öğrenciler "c" çözüm türünde bulunmaktadır.

Belirli integral kavram imgelerine göre kategorilere ayrılan her bir öğrencinin, genelleştirilmiş integral problemlerindeki çözüm türleri karşılaştırılmıştır. Böylelikle kavram imgesinin, problem çözme sürecine olası etkilerinin de incelenmesi hedeflenmiş; deney grubu öğrencileri "D", kontrol grubu öğrencileri "K" ile kodlanmıştır.

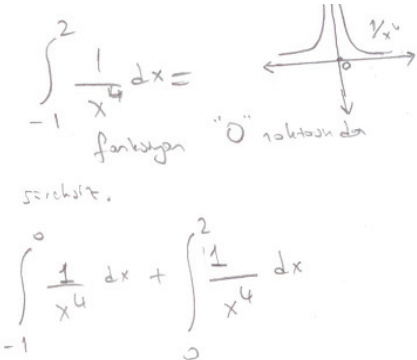
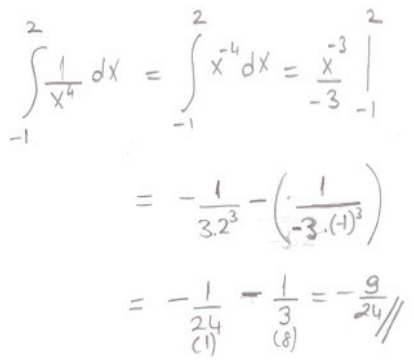
**Kategori 1:**  $f(x)$  fonksiyonun grafiği ile  $x$  ekseninin sınırladığı bölgenin alanı (D:%43, K:%25)

*Kategori 1<sub>a</sub>:* Grafik destekli hesap (D:%22, K:%10)

*Kategori 1<sub>b</sub>:* Cebirsel hesap (D:%16, K:%15)

*Kategori 1<sub>c</sub>:* Hesap yapılamaz (D:%5, K:%-)

**Tablo 3: Genelleştirilmiş integral problemlerinde çözüm türlerine yönelik örnekler**

Grafik destekli hesap	Cebirsel Hesap	Hesap yapılamaz
 <p> <math>\int_{-1}^2 \frac{1}{x^4} dx =</math>                      fonsiyonun "0" noktasında süreksiz.  <math>\int_{-1}^0 \frac{1}{x^4} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^4} dx</math> </p>	 <p> <math>\int_{-1}^2 \frac{1}{x^4} dx = \int_{-1}^2 x^{-4} dx = \left. \frac{x^{-3}}{-3} \right _{-1}^2</math>  <math>= -\frac{1}{3 \cdot 2^3} - \left( -\frac{1}{3 \cdot (-1)^3} \right)</math>  <math>= -\frac{1}{24} - \frac{1}{3} = -\frac{9}{24}</math> </p>	<p> <math>f</math>, fonksiyonu <math>[-1,2]</math> aralığında sürekli olmadığından türevlenemez dolayısıyla integrali hesaplanamaz.                 </p>

Kategori 1'de yer alan deney grubu öğrencilerinin %22'si genelleştirilmiş integral problemlerini grafik yardımıyla çözmeye çalışmış; %16'sı ise integralde alan imgesine sahip olmalarına karşın problemi cebirsel hesap kullanarak çözmeye çalışmışlardır. Öğrenciler, genelleştirilmiş integral türündeki bir problem çözümünde ATT'yi doğru algılayıp yorumlayabilseydiler, 1<sub>a</sub> alt kategorisi de doğru çözümün yapıldığı bir durum olarak değerlendirilebilirdi. Oysa Tablo 3'ün "cebirsel hesap" kategorisi altında görülen örnek çözüm,

ters türevi alınacak fonksiyonun belirtilen aralıktaki sürekliliğine dikkat edilmediğini göstermektedir. Bu yanılgıya düşen öğrenci yüzdesi oldukça yüksektir.

**Kategori 2:**  $F(x) = f(x)$  kuralı ile  $\int f(x) dx = F(x)$  işleminin gerçekleştirildiği bir tür hesaplama aracı (D:%30, K:%48)

*Kategori 2<sub>a</sub>:* Grafik destekli hesap (D:%10, K:%8)

*Örnek:*  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^4} dx + \int_0^2 \frac{1}{x^4} dx$

**Kategori 2<sub>b</sub>:** Cebirsel hesap (D:%20,K:%35)

Örnek:  $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3}$

**Kategori 2<sub>c</sub>:** Hesap yapılamaz (D:%-,K:%5)

Örnek: fonksiyon sürekli olmadığından integral hesaplanamaz.

Kategori 2, belirli integral imgesi türevin tersi olan öğrencilerden oluşmaktadır. Tüm çalışma grubu düşünüldüğünde öğrencilerin en çok tercih ettikleri imge türevin tersi imgesi olmuştur. Bu kategorideki öğrencilerin en sık yer aldıkları alt kategori ise 2<sub>b</sub>'dir. Belirli integrali bir tür ters türev alma işlemi olarak yorumlayan öğrencilerin, genelleştirilmiş integral problemleri çözümünde ATT'yi iyi yorumlayamadıkları belirlenmiştir. Deney grubu öğrencilerinin %20'si kontrol grubu öğrencilerinin %35'i genelleştirilmiş integral problemleri çözümlerinde ATT'yi yanlış kullanmış, dolayısıyla yanlış sonuçlara ulaşmışlardır.

**Kategori 3:** Bu kategoriyi integral imgesi "birikimli toplamlar" olan öğrenciler oluşturmaktadır. Deney grubunun %23'ü bu grupta yer alırken; kontrol grubunda bu kategoride öğrenci bulunmamaktadır. Deney grubu öğrencilerinin %13'ü Kategori 3<sub>a</sub>'da, %7'si Kategori 3<sub>b</sub>'de, %3'ü ise Kategori 3<sub>c</sub>'de yer almaktadır.

**Kategori 4:** Bu kategoriyi integral imgesi "belirli bir aralıktaki değişim" olan öğrenciler oluşturmaktadır. Deney grubunun %10'u kontrol grubunun %20'si bu grupta yer alırken; deney grubu öğrencilerinin %7'si Kategori 4<sub>a</sub>'da, %3'ü Kategori 4<sub>b</sub>'de bulunmaktadır. Kontrol grubunda bu oran Kategori 4<sub>a</sub> için %15, 4<sub>b</sub> için %5'tir.

**Kategori 5:** Anlamsız veya boş cevapların bulunduğu bu kategoride kontrol grubu öğrencilerinin %3'ü Kategori 5<sub>a</sub>, %12'si Kategori 5<sub>b</sub>, %20'si Kategori 5<sub>c</sub> 'de yer alırken; deney grubu öğrencilerinin % 10'u bu kategoride değerlendirilmiştir.

**Tablo 4: Kategori ve alt kategorilere göre öğrenci yüzdesi**

İmge	Alan			Türevin tersi			Birikimli toplam			Değişim			Boş		
Kategori	1 <sub>a</sub>	1 <sub>b</sub>	1 <sub>c</sub>	2 <sub>a</sub>	2 <sub>b</sub>	2 <sub>c</sub>	3 <sub>a</sub>	3 <sub>b</sub>	3 <sub>c</sub>	4 <sub>a</sub>	4 <sub>b</sub>	4 <sub>c</sub>	5 <sub>a</sub>	5 <sub>b</sub>	5 <sub>c</sub>
Deney (%)	22	16	5	10	20	-	13	7	3	7	3	-	-	3	7
Kontrol (%)	10	15	-	8	35	5	-	-	-	15	5	-	3	12	5

Bulgular, yanlış cevaplara en sık rastlanılan kategorinin "2" numaralı kategori olduğunu göstermektedir (Tablo 5). Bir diğer ifadeyle, integral imgesi türevin tersi olan öğrencilerin yanlış kavramlar üzerinden yanlış sonuçlara ulaştıkları gözlenmiştir. Genelleştirilmiş integral türündeki bir probleme verilen cevaplarda doğru kavramları kullanarak doğru sonuca ulaşan öğrencilerin deney ve kontrol grubunda "1" numaralı kategoride oldukları belirlenmiştir. İntegral kavramında eğri altında kalan alan imgesine sahip öğrencilerin, bu problem tipi için doğru çözümlere daha kolay ulaştıkları belirlenmiştir. Kontrol grubu öğrencilerininenyoğunoldukategori2<sub>b</sub> iken; deney grubu öğrencilerine 1<sub>a</sub> kategorisinde daha çok rastlanılmaktadır (Tablo 4). Çalışma grubu öğrencilerinin %61'i b alt kategorisinde, yani çözümü yanlış gerçekleştiren grupta yer almaktadır. Bu problem türünde deney

gurbu öğrencilerinin yaklaşık yarısı (%48), kontrol grubu öğrencilerinin ise üçte ikisi (%67) yanlış çözümler gerçekleştirmişlerdir.

### Tartışma

Bu çalışmada deney grubunu kontrol grubundan ayıran unsur, integral konusunun programdaki işleniş sırasıdır. Bu bağlamda ilk tartışılması gereken bulgu içerik sırasının belirli integral kavram imgeleri etkisi üzerinde olmalıdır. Ders kitapları konu içerik sırasını belirlerken kavramın özel ve genelliğini dikkate almaktadır. Öğreticiler de genelde ders kitabı veya öğretim programındaki sırayı takip etmektedirler (Sevimli, 2009). Ortak görüş genel bilgilerin önce sunulması, daha özel durumların öğretim programında daha sonraki sıralarda ele alınması şeklindedir. Bu bağlamda integral kavramının öğretim sırası düşünülürse; belirsiz integralin ve integral



alma bilgi-becerilerinin programda daha önce yer alması gerektiği söylenebilir (MEB, 2005). Yine Türkiye’de integral kavramının öğretimi sürecinde öğretici rolünü dikkate alan bazı araştırmalar da, öğretici sıralama tercihinin belirsiz-belirli integral şeklinde olduğunu göstermektedir (Delice ve Sevimli, 2010; Akkoç ve Kurt, 2008). Yalnız bu konu sıralaması kavramsal öğrenmeye karşı işlemsel öğrenme, bağlamsal problemlerdeki başarıya karşı rutin işlem başarısı gibi sınırlılıkları da beraberinde getirmektedir. Nitekim çalışma bulguları, deney ve kontrol grubu öğrencilerin farklı imgelerde farklı yüzdelerle yer aldıklarını göstermektedir. Bu farklılık deney grubunda “alan” imgesi, kontrol grubunda ise “türevin tersi” imgesi ile ilişkilidir. Aslında bilişsel yaklaşımlar, son öğrenilen kavramların daha çok hatırlandığını ve önceki bilgilerin daha çabuk unutulduğunu ifade etmektedir (Brookfield, 2005). Oysa bu çalışmada, kontrol grubu öğrencilerinin son öğrendikleri kavram belirli integral ve uygulamaları olmasına rağmen, öğrencilerin büyük çoğunluğu belirli integrali, belirsiz integral üzerinden açıklamaya çalışmışlardır. Bu bağlamda konuya ilk girişin yapıldığı ders içeriğinin, kavramın anlamlandırılması sürecini etkilediği söylenebilir. Eğer integral kavramı ilk derste; türevin tersi, ileri düzeydeki bir hesaplama işlemi ya da kural-formül uygulanması şeklinde tanıtılırsa, öğrenci tanım ve imgeleri de bu açıklamalardan etkilenebilir.

Deney ve kontrol grubu arasında imgelerin dağılımı yönüyle net bir farklılık gözlenirse de imge çeşitliliği anlamında birbirine yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bu bulgunun nedenlerinden birinin, ortaöğretim matematik öğretim programındaki integral kavramının öğretim sırası olduğu düşünülmektedir. Türkiye’deki örgün eğitim sisteminde integral kavramına ilk giriş ortaöğretim 4. sınıf düzeyinde gerçekleşmektedir. Okul ders kitabı ve öğretim programında integral konusuna ait iki alt öğrenme alanı bulunmakta olup bunlar sırasıyla belirsiz ve belirli integral kavramına ilişkin kazanımlardır (MEB, 2005). Ortaöğretim düzeyindeki öğretim programında öncelikle integral alma kuralı, yöntem ve uygulamalarına yer verilirken; konunun kavramsal temellerinden önce kural-sal tekniklerine yer verilmesinin sonraki öğretim süreçlerini de etkilediği düşünülmektedir. Bu yönüyle integral konusuna girişin ilk kez yapıldığı ortaöğretim düzeyi ayrı olarak ele alınmalıdır. Çünkü öğrenciler, integral kavramına yönelik ilk tanım ve imgelere bu düzeyde sahip

olmakta ve imgelerin ileriki dönemlerdeki değişimi zaman alabilmektedir (Sevimli, 2009).

Çalışma kapsamında ele alınan bir diğer bulgu da, belirli integral imgelerinin problem çözme süreçlerini etkilediğidir. Bu bağlamda “türevin tersi” imgesine sahip öğrencilerin eğri altında kalan alan problemlerinde sıkça yanlış çözümler uygulamasında, cebirsel süreçleri izleme eğilimlerinin olduğu söylenebilir. İntegral hesabını ters türevde sınırların yerine yazılması olarak yorumlayan öğrenciler, integrantın belirtilen aralıktaki sürekliliğini dikkate almadan Analizin Temel Teoremi’ni uygulayarak çözüme ulaşmaya çalıştıkları belirlenmiştir. “Alan” imgesindeki öğrencilerin genelleştirilmiş integral problemlerinde grafik temsiline yaralanmaya çalışmaları olumlu olarak değerlendirilebileceği gibi, her belirli integral problemde eğri altında kalan alan yorumuna başvurmaları yanılığa yol açabilir. Belirli integrali tamamen eğri altında kalan alan olarak görmek, diğer cebirsel hesaplamalarda işaret karmaşasına yol açabilir (Camacho, Depool ve Santos-Trigo, 2004). Bu bağlamda hem deney hem de kontrol grubu için önemli olan kazanım, integral konusunda zengin imgelere sahip olmaları ve problem çözme sürecinde doğru imgeyi kullanabilmeleridir.

Çalışma bulgularında ortaya çıkan bir diğer durum da birikimli toplamlar imgesinin yalnızca deney grubundaki bazı öğrencilerce oluşturulmuş olmasıdır. Aynı konunun aynı öğretim elemanı tarafından aynı süre içerisinde verilmiş olmasına karşın, yalnızca deney grubunda bu imgeye rastlanılmış olması, bu gruptaki ilk dersin sonlu toplamların limiti ve Rieman toplamları ilişkisini dikkate alarak başlaması ile açıklanabilir. Sadece konu sıralamasında yapılacak bir değişikliğin bile yeni bir belirli integral imgesinin oluşmasına yardımcı olabileceği gözlenmiştir. Belirsiz integral ile yapılan giriş, öğrencilerin kavram şemalarının cebir işlem becerisi bağlamında oluşmasına neden olmaktadır. İntegrali türevin tersi ya da hesaplanması gereken cebir temelli bir simge olarak algılayan öğrencilerin, kavrama yaklaşımı da işlemsel düzeyde kalmakta, kavramın anlaşılması yönüyle güçlükler yaşandığı çeşitli araştırma sonuçlarından bilinmektedir (Rasslan ve Tall, 2002; Orton, 1983).

### **Sonuç ve Öneriler**

Çalışmadaki genel bulgular dikkate alındığında deney grubu öğrencilerinin kontrol grubu öğrencilerine göre daha zengin integral imgelerine sahip oldukları belirlenmiştir.

Ayrıca integral imgelerinin sınırlılığının problem çözme sürecini olumsuz etkilediği gözlenmiştir. Sadece “alan” imgesine sahip olan öğrencilerin cebirsel hesaplamalarda, sadece “türevin tersi” imgesine sahip olan öğrencilerin de, eğri altında kalan alan ve nümerik toplam hesaplarında yanlış çözüm teknikleri kullanarak yanlış sonuçlara ulaşabileceği bulgularına yer verilmiştir. Belirli integralin Riemann toplamları ile ilgili tanım ve imgelerinin sınırlı olduğuna dikkat

çekilen araştırmada, integral kavramına belirli integral ile yapılacak girişin, integralin farklı tanım ve temsillerine ders içeriğinde yer verilmesinin problem çözme sürecini etkileyebileceğine dikkat çekilmektedir. İntegral konusunun ilk olarak ele alındığı ortaöğretim 4. sınıf düzeyinde, bir bilgisayar cebir sistemi kullanılarak yapılabilecek benzer bir çalışmanın daha farklı ve etkin sonuçlar doğurabileceği düşünülmektedir.

## KAYNAKÇA

- Akkoç, H. ve Kurt, S. (2008). İntegral Kavramına İlişkin Öğrenme Zorlukları ve İntegral Öğretimi. M.F. Özmentar, E. Bingölbali ve H. Akkoç (Ed). Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri. Ankara: PegemA.
- Brookfield, S. (2005). *The Power of Critical Theory for Adult Learning and Teaching*. Maidenhead : Open University Press.
- Camacho, M., Depool, R. ve Santos-Trigo, L. M. (2004). Promoting Students' Comprehension of Definite Integral and Area Concepts Through the Use of Derive Software". *Proceedings of the 26 PME-NA*. Vol 2, pp. 447-454.
- Calvo, C. (1997). *Bases para una propuesta didáctica sobre integrales*. Tesis de Maestría, Universitat Auto`noma de Barcelona.
- Cohen, L., Manion, L. ve Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education (5th ed.)*. London: Routledge.
- Delice, A. ve Sevimli, E. (2010). Öğretmen adaylarının çoklu temsil kullanma becerilerinin problem çözme başarıları yönüyle incelenmesi: Belirli integral örneği. *Kuramdan Uygulamaya Eğitim Bilimleri (KUYEB)*, 10 (1), 111-149.
- Ferrini-Mundy, J. ve Graham, K. (1994). Research in Calculus Learning: Understanding of Limits, Derivatives, and Integrals. *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results*. MAA Notes Number 33, Mathematical Association of America.
- Milli Eğitim Bakanlığı, Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2005). *Ortaöğretim Matematik (9,10,11 ve 12) Sınıflar Dersi Öğretim Programı*. Ankara.
- Orton, A. (1983). Student's understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14(1), 1-18.
- Patton, M. Q. (1990). How to Use Qualitative Methods in Evaluation. London: Sagem.
- Rasslan, S. ve Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. In Cockburn A., & Nardi, E. (Eds.). *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (July 21-26)*, Vol. 4, 89-96, Norwich: England.
- Renshaw, P. (1996). A sociocultural view of the mathematics education of young children. In H. Mansfield, N. Pateman, & N. Bednarz (Eds.), *Mathematics for tomorrow's young children* (pp. 59-78). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Rösken, B. ve Rolka, K. (2007). Integrating Intuition: The Role of Concept Image and Concept Definition for Students' Learning of Integral. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 3, 181-204.
- Sevimli, E. (2009). *Matematik öğretmen adaylarının belirli integral konusundaki temsil tercihlerinin uzamsal yetenek ve akademik başarı bağlamında incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Sevimli, E. ve Delice, A. (2010). İntegral kavram tanımı ve kavram imgesine yüksek öğretim programının etkisinin incelenmesi. *IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulmuş sözlü bildiri*. Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Schoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4 (1), 1 – 94.
- Tall, D. O. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 2, 151–169.
- Thompson, P. W. ve Silverman, J. (2007). The Concept of accumulation in calculus. In M. Carlson ve C. Rasmussen (Eds.).

*Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 117-131).

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic.

## Summary

### Introduction

Several studies report learner difficulties in the comprehension of the integral concept, which is taught as part of the analysis course. The challenges are believed to lie in the limitations of the definition and images of the concept. Orton (1983) stated that the idea of the limit of sums could lead to algebraic confusion; Calvo (1997) argued that treating integrals solely as an area could be risky for learning; and Sevimli and Delice (2010) concluded that rule-based learning could have adverse effects on conceptual understanding. Given the higher education curriculum, which suggests teaching of indefinite integrals before definite integrals, this study aims to investigate the effects of changing the sequence of integral topics on learners' conceptual definition and images.

### Methodology

This study aimed to describe two existing situations using multiple methods in a semi-experimental research design (Patton, 1990). The participants were first year undergraduates registered at chemistry education department of a state university during 2008-2010. The sample was selected using an appropriate sampling technique of nonprobability sampling. As part of the course Analysis II, the tutor taught first indefinite, then definite integrals to the control group of 40 learners using the traditional program; whereas presentation sequence was reversed with the experimental group students as definite then indefinite integrals. Data collection tools were an Integral Proficiency Test (IPT) administered in order to identify prior knowledge of integrals of the sample and an Integral Concept Test (ICT) administered in order to reveal learners' conceptual understanding and images of integrals at the end of teaching. IPT was analyzed using inferential statistics methods, while ICT was analyzed using descriptive statistics with codes and categories.

### Findings

T-test analysis results of IPT scores did not suggest any statistically significant difference [ $t(78)=.466$ ,  $p>.05$ ]. IPT scores indicated that learners in the experimental and control groups had parallel performances and similar prior knowledge. The most significant result of the ICT answers was related to the mathematical definition of definite integral.

In the experimental group, the percentage of trainees who successfully provided Riemann's definition of definite integral was 65%; while it was 30% in the control group. In the experimental group, students linked the concept of integrals mainly with area, while students who had the image of integral as "variation in a function" were relatively less (10%). In the control group, almost half of the students (48%) referred to the relationship between the concept of integral and the concept of inverse derivative function. None of the students in this group benefited from the numerical definition of integral. Following the categorization of learners' conceptual images of the integral concept in both the experimental and control groups, the relationship between these images and problem solving processes were investigated. In generalized integral problems, the students who had the image of integral as the inverse of derivative were observed to obtain wrong solutions using The Fundamental Theorems of Calculus without considering the points where the function is discontinuous. On the other hand, the students who had the image of integral as the area below the curve obtained correct answers more easily in the same type of problems by analyzing the integral in two parts where the function is discontinuous.

There were several deterrents such as error of negative value in integral problems of area calculation; and error of positive value and error of graphical thinking in problems of algebraic calculation. Some relationships between these errors and learners' concept

images were observed. Students who had error of negative area were mostly found in the category of learners who had the image as inverse derivative; and error of positive area and error of graphical thinking were found in the category of learners who had the image of "variation" and "area" respectively.

### Discussion

The findings indicated that the experimental group students predominantly had the "area" image and the control group had the "inverse

of derivative" image. Students in both groups mainly used these concept images when defining the concept and had difficulties in providing the formal definition. We suggest this is due to the presentation sequence of indefinite-definite integrals in the secondary school curriculum and also due to similar teaching methods. This research emphasizes that an introduction to the concept of integrals with the indefinite integral can limit images of the concept of definite integral.

