Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,
Sayı 30 (Temmuz 2011/II), ss. 141-153

Matematik Öğretmen Adaylarının Şekil Örüntülerini Genelleme Süreçleri

Sibel Yeşildere*, Hatice Akkoç**

Özet

Bu araştırmanın amacı matematik öğretmen adaylarının örüntüleri genelleme süreçlerini incelemek ve bu süreçte model kullanımında tercih ettikleri görsel kalıpları belirlemektir. 145 ilköğretim matematik öğretmen adayına lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genellemeye yönelik dört tane açık uçlu problem yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının problemlere verdikleri yanıtlar, örüntüyü genelleme süreçleri ve şekil örüntülerini bu süreçte nasıl kullandıkları analiz edilmiştir. Cebirsel genelleme sürecinin analizinde Radford (2006) tarafından ortaya konulan kuramsal çerçeve kullanılmıştır. Veriler analiz edildiğinde öğretmen adaylarının genelleme sürecinde lineer şekil örüntülerinden lineer olmayanlara göre daha çok yararlandıkları belirlenmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının şekil örüntüsünü nümerik olarak belirterek genelleme yapmaya yatkın oldukları görülmüştür. Bunun yanı sıra verilen örüntüdeki ortak özelliği belirleme bağlamında genelleme yapmaya yardımcı olacak seçimlerde bulunmadıkları, sadece bir sonraki terimi bulmayı sağlayacak şekilde ortak bir özellik araştırdıkları gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Örüntü; model kullanma; genelleme*

Pre-Service Mathematics Teachers' Generalization Processes of Visual Patterns

Abstract

The aim of this study is to investigate pre-service mathematics teachers' generalization processes and models used in these processes. 145 elementary pre-service mathematics teachers were asked four open-ended problems which requires to generalize linear and non-linear pictorial patterns. Pre-service teachers' written responses were analyzed to investigate their generalization processes and how they used pictorial models in these processes. Radford's (2006) framework is used for the analysis. The analysis of data indicated that pre-service teachers used pictorial models more effectively for linear patterns when compared to non-linear patterns. It was also found that they tend to represent pictorial patterns numerically first and then generalize the numerical pattern. In addition to that it was observed that the way they discovered the commonalities among the terms of the patterns were not helpful in generalization process since they looked for commonalities by focusing on the consecutive terms of the patterns.

Keywords: *Pattern; model use, generalization*

* Yrd. Doç. Dr., Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İzmir. e-posta: sibel.yesildere@deu.edu.tr
** Doç. Dr., Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, İstanbul. e-posta: hakkoc@marmara.edu.tr

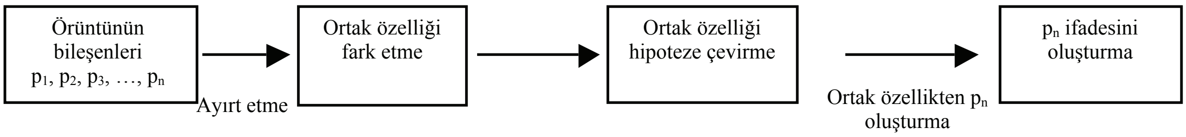
Giriş

Örüntü arama, kavramların birbirine benzer ve birbirinden farklı özelliklerini belirlemeyi ve açıklamayı gerektirdiğinden matematik öğreniminde temel olan becerilerden biridir (Papic, 2007). Matematiğin yapısının anlaşılması için matematiğin içerdiği örüntülerin ve ilişkilerin incelenmesi gerekmektedir (Hargreaves ve diğerleri, 1999). Matematik eğitimi perspektifinden bakıldığında ise ilköğretimin erken basamaklarında somut nesneler arasındaki ilişkilerin örüntü kavramı ile kazandırıldığı görülmektedir (Uygur-Kabael ve Tanışlı, 2010). Ancak örüntüler ve örüntülerin genellenmesi öğrencilerin kavramada güçlük çektiği konular arasında yer almaktadır (Mason, 1996; Orton, 1999). Öğrenciler verilen bir sayı örüntüsünün bir sonraki terimini bulabiliyor ve ardışık terimler arasındaki ilişkiyi keşfedebiliyorken örüntünün kuralını cebirsel olarak ifade etmekte daha da önemlisi örüntünün yapısını cebirsel düşünme sürecinden geçerek keşfedebilmekte zorlanmaktadırlar (Hargreaves, Threlfall, Frobisher, & Shorrockes-Taylor, 1999; Orton & Orton, 1999; Stacey, 1989). Kavram oluşturmada önemli bir bilişsel süreç olan genelleme yapmada etkin rol oynaması örüntü kavramının vurgulanması gereken bir başka önemli yönüdür. Genelleme üst düzey bir bilişsel beceri olarak kabul gördüğü için (Krutetskii, 1976) gerek matematikte gerekse matematik eğitiminde önem verilen bir eylemdir. Matematiktekinden farklı olarak matematik eğitiminde önemli olmasının nedeni, genelleme yapan kişinin düşünme şeklinin ve bilişsel süreçlerinin de dikkate alınmasıdır (Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008). Daha açık bir ifadeyle genellemenin yapılması kadar genelleme yapma sürecinin nasıl gerçekleştiği de matematik eğitimi araştırmalarına konu olmaktadır. Bu bağlamda 'genelleme' ve 'genelleme süreci'[3] çeşitli araştırmacılar tarafından farklı şekillerde tanımlanmış ve açıklanmıştır. Polya (1957) genellemeyi ''bir kavrama ilişkin anlayıştan bu kavramı içeren bir kümeye ilişkin anlayışa geçmek veya sınırlı bir kümeye ilişkin kavrayıştan bu sınırlı kümeyi de içeren daha kapsamlı bir kümeye ilişkin kavrayışa geçmek (s. 108)" olarak tanımlamıştır. Carraher, Martinez ve Schliemann'a (2008) göre genelleme "bazı özellik ve tekniklerin, matematiksel kavramların (veya durumların) genişletilmiş kümesi için de geçerli olmasıdır" (s. 3). Kaput (1999) ise genellemeyi, örnek durum veya durumların ötesinde bir akıl yürütme ve iletişim kurma eylemi gerçekleştirerek örnek durumlar arasındaki ortak özelliklerin belirlenmesi veya açığa çıkarılması, ya da akıl yürütme ve iletişim kurma eylemini örnek durumların ötesinde bir seviyeye, örnek durumlar arasındaki bir örüntüye, yapıya veya ilişkiye taşımak şeklinde tanımlar. Genellemenin ifade edilmesi ise belli bir dil kullanmakla mümkündür. Bu dil matematiksel bir dil olabildiği gibi küçük çocuklarda günlük konuşma dili ya da mimik kullanımı şeklinde de olabilir. Krutetskii (1976) ise genellemenin klasik ancak operasyonel bir tanımını yapmıştır. Genellemenin sayı ya da harf sembolleri kullanılarak en azından iki yönü ile dikkate alınabileceğini söyler: benzer durumların fark edilmesi ve genelleştirilmiş bir çözüm yoluna ya da ispat yoluna hâkim olma. Her iki durum da nesneler, ilişkiler veya işlemler arasında benzer, genel veya gerekli olanı seçerek bir soyutlama yapmayı gerektirir. Genellemenin bu tanımlarının yanı sıra, genelleme sürecinin tanımının yapılması öğrencilerin örüntüleri genelleme sürecindeki zorluklarını irdelemek için işlevsel çerçeveler sunacaktır. Bu yönde bir tanımlama Radford (2006) tarafından yapılmıştır. Radford genelleme sürecini aritmetik genelleme ve cebirsel genelleme olarak iki ayrı bağlamda ele almaktadır. Buna göre tüm terimler için geçerli olacak bir ifade yazmaksızın örüntüye ilişkin birtakım ortak yönlerin fark edilmesi ve bazı ilişkilerin belirtilmesi aritmetik genelleme, örüntüde yer alan ilişkisel yapının fark edilmesi sonucu her terim için geçerli olacak bir ifadenin yazılması cebirsel genellemeyi belirtmektedir.

Radford (2008) bu tanımlamalarda yer alan bileşenlerin yanında, genelleme sürecine ilişkin önemli bir noktaya dikkat çekmekte; notasyonların kullanımının cebirsel düşüncenin oluşumunun başlı başına göstergesi olmadığına hatta harfler kullanılmadan da cebirsel düşünmenin gerçekleşebileceğine işaret etmektedir. Bu noktada şu soru kendini göstermektedir: "eğer cebirsel düşünmenin göstergesi notasyon kullanımı değilse cebirsel genellemeyi aritmetik genellemeden ayıran nedir? (Radford, 2008, s. 84)." Radford (2006) gerçekleştirdiği uzun süreli araştırmalar sonucunda cebirsel genelleme sürecinin

[3] Genelleme ve genelleme süreci makalede ilişkili ancak farklı iki bağlamda ele alınmaktadır. Genelleme (generalisation) örüntünün yapısını taşıyan sözel veya sembolik ifadeyi belirtmek için kullanılmaktadır. Genelleme süreci (generalising) ise bu ifadeyi belirtme aşamasında geçirilen zihinsel sürece işaret etmektedir.

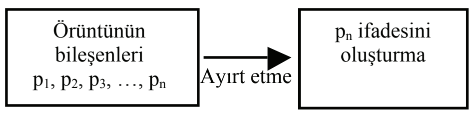
"örüntüdeki terimlerin sahip olduğu ortak özelliği fark etme yeteneğine, bu ortak özelliğin örüntüdeki tüm terimler için geçerli olduğuna ilişkin farkındalığa ve örüntünün herhangi bir terimini bulmayı sağlayacak bir ifadeyi yazabilme yeteneğine dayandığını (s.4)" belirtmektedir. Bu süreç ayrıntılı olarak açıklanacak olursa, cebirsel örüntü genelleme süreci örüntüdeki birkaç terime ait ortak özelliğin fark edilmesi ile başlamaktadır. Bu ilk adımda örüntüdeki terimlere ait neyin benzer neyin farklı olduğu seçimi yapılmaktadır. İkinci olarak ortak özellik ayırt edilerek örüntüdeki tüm terimlere genellenmekte ve bir hipotez oluşturulmaktadır. Son olarak da belirlenen ortak özellikten tüm terimler için geçerli olacak bir genel terim yazılmaktadır. Bu süreç şekil 1'deki gibi özetlenmektedir:



Şekil 1: Cebirsel Örüntü Genelleme Sürecinin Yapısı (Radford, 2008, s. 85)

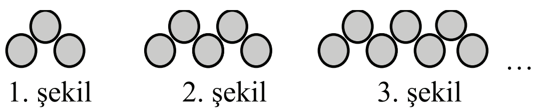
Radford (2008), şekil 1'deki süreçte son okla gösterilen aşama çıkarıldığında yapılan genellemenin aritmetik genelleme olduğunu belirtmektedir.

Radford'un (2006) kuramsal çerçevesinde ön plana çıkan detaylardan biri de genelleme yapma ve tümevarım arasında ayırım olduğuna dair yaptığı vurgudur. Radford bu iki eylem arasındaki farkın gözden kaçırıldığına değinerek, tümevarım yoluyla genel terimin örüntü terimlerinin sahip olduğu ortak özellikten hareketle değil, deneme yanılma yoluyla bulunduğunu belirtmektedir. Bu bağlamda tümevarımda tahmin etme yoluyla ilerlendiğinden cebirsel düşünmenin varlığına rastlanmadığına dikkat çekmektedir. Araştırmacı bu tümevarımı farklı tümevarım çeşitlerinden ayırt etmek için olgunlaşmamış tümevarım ifadesini kullanmaktadır. *Olgunlaşmamış tümevarım* süreci şekil 2'de belirtilmektedir:



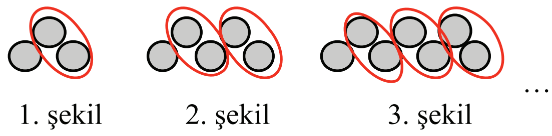
Şekil 2: Olgunlaşmamış Tümevarımın Yapısı (Radford, 2008, s. 86)

Radford'un cebirsel genelleme sürecinin yapısına ilişkin çerçevesi şekil 3-a'da verilen örüntü üzerinde ele alınmıştır.



Şekil 3-a: Şekil Örüntüsü–1

Bu şekil örüntüsünde her terimin kendisinden önceki terimden iki fazla olduğu ortak özellik olarak belirlendiğinde, herhangi bir terimin bulunmasını sağlayacak genel bir ifadenin yazımı mümkün olmadığından, aritmetik genelleme yapılmaktadır. Örüntünün kuralı, rasgele yazılan cebirsel ifadelerin kontrol edilmesi üzerinden bulunmaya çalışıldığında olgunlaşmamış tümevarım kullanılmaktadır. Örüntünün terimleri, terim sayısı ile ilişkilendirilip şekil 3-b'deki gibi gruplandırılsın.



Şekil 3-b: Şekil Örüntüsü–1'in Ortak Özelliğe Göre Gruplandırılması

Bu durumda her şekilde sabit olarak bir daire ve 2'li gruptan 1. şekilde 1 tane, 2. şekilde 2 tane, 3. şekilde 3 tane olduğu yönünde ortak özellik ayırt edilir. Ayırt edilen bu durum "terim sayısının iki katının bir fazlası şeklinde hipotez oluşturmak üzere transfer edilir ve p_n ifadesi hipoteze dayanarak 2n+1 olarak yazılır. Bu süreç cebirsel genelleme sürecidir.

Örüntüleri genelleme süreci çeşitli araştırmacılar tarafından ele alınmış bir araştırma konusu olmasına karşın (örn. Becker ve Rivera, 2006; Carraher, Martinez ve Schliemann, 2008) öğretmen ve öğretmen adaylarının genelleme süreçleri üzerine az sayıda araştırma yapılmıştır. Öğretmen adayları üzerine en kapsamlı araştırma Zazkis ve Liljedahl (2002) tarafından yapılmış, bir grup öğretmen adayının sayı örüntülerini genelleme yapma yolları incelenmiştir.

Bu makalede ilköğretim matematik öğretmen adaylarının lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme süreçleri ve görsel modelleri bu süreçte nasıl kullandıkları incelenmektedir. Öğretmen adaylarını aritmetik veya cebirsel genellemeye götüren süreç derinlemesine analiz edilmekte, genelleme yapmaya mı yoksa (olgunlaşmamış) tümevarıma mı daha yakın oldukları ortaya konulmaktadır. Bu bağlamda bu çalışmada öğretmen adaylarının şekil örüntüleri genelleme sürecinde ortak özelliği nasıl belirlediklerini ortaya koymak, belirledikleri ortak yönün genelleme sürecine ne ölçüde yardımcı olduğunu belirlemek ve nasıl genelleme yaptıklarını tespit etmek amaçlanmaktadır.

Yöntem

Bu araştırmada tarama yöntemi kullanılmıştır. Doğruluğun deneysel olarak kanıtlanabilir olması gereken durumlarda tarama araştırması (survey research) kullanılabilecek yollardan biridir (Babbie, 1990). Tarama yöntemi "eğitimsel, psikolojik ve sosyolojik değişkenler arasındaki ilişkiler, ayırımlar ve örneklerle ilgilenmektedir (Wiersma, 2000: 14)" ve bu yöntem ile 'belli bir zamanda mevcut koşulların doğasını açıklama maksadıyla veri toplanır' (Cohen ve Manion, 1996: 83). Tarama yöntemi kullanılarak öğretmen adaylarının genelleme yapma süreçlerine ilişkin betimsel bir açıklamaya ulaşmak amaçlanmaktadır. Bu bağlamda öğretmen adaylarının genelleme yapmalarındaki doğruluk değil, bu süreçte ortaya çıkan değişkenler ve bu değişkenlerin genelleme yapma sürecine etki etme şekilleri incelenmektedir.

Örneklem

Araştırmanın örneklemini Türkiye'nin batısında yer alan bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 145 son sınıf öğretmen adayı oluşturmaktadır.

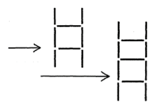
Veri Toplama Aracı

Araştırmada dört açık uçlu problem yoluyla veri toplanmıştır. İlk iki problem lineer, üçüncü ve dördüncü problem lineer olmayan örüntü içermektedir. Birinci problem Stacey'nin (1989), ikinci problem Steele ve Johanning'in (2004) çalışmasından alınmıştır. Bu problemlerde öğretmen adaylarının lineer yapıdaki şekil örüntülerini genelleme süreçlerini ve şekillerden ne ölçüde yararlandıklarını incelemek amaçlanmaktadır. Üçüncü ve dördüncü problem, şekil örüntüsünde yer alan modellerin genelleme sürecinde kullanılma şekillerini belirleme amacıyla hazırlanmıştır. Bu sorular için pilot çalışma yapılmış ve uzman görüşü alınmıştır. Şekil örüntüsü içeren problemler şekil 4'te verilmektedir.

İşlem

Problemler öğretmen adaylarına 2009–2010 öğretim yılının bahar döneminde uygulanmıştır. Öğretmen adaylarına problemler verilmiş ve 60 dakikalık sürede yanıtlamaları istenmiştir. Uygulama öncesinde öğretmen adaylarına problemlerde düşünme şekillerini ortaya koymaları ve problemi çözme şekillerini ayrıntılarıyla açıklamaları yönünde açıklama yapılmıştır.

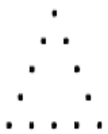
1) 8 kibrit çöpüyle yandaki gibi iki basamaklı bir merdiven yapabiliyorum.



11 kibrit çöpüyle yandaki gibi üç basamaklı bir merdiven yapabiliyorum

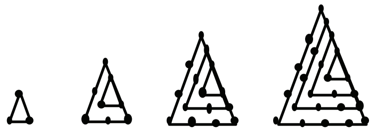
Buna göre 1000 basamaklı merdiven yapmak için kaç tane kibrit çöpü kullanılmalıdır? Düşünme şeklinizi açıklayınız. (Stacey, 1989)

2)



Yandaki şekil 5 nokta üçgenidir. Bu üçgenin her bir kenarında 5 nokta bulunmaktadır. Buna göre n nokta üçgeninde bulunan nokta sayısını cebirsel olarak belirtiniz (NCTM'den akt. Steele ve Johanning, 2004).

3) Bir öğrenci 3, 8, 15, 24, … sayı örüntüsünün kuralını bulmak için aşağıdaki modeli çizer.



a) Bu model kuralı bulmaya yardımcı olur mu? Yanıtınız evet ise nasıl yardımcı olabileceğini açıklayınız. Yanıtınız hayır ise kuralı bulmaya yardımcı olacak bir model nasıl oluşturulabilir?

4) a) 5, 9, 17, 29, … sayı örüntüsünün kuralını bulunuz.

b) Bu örüntü, kuralı bulmayı kolaylaştıracak şekilde model kullanılarak nasıl temsil edilebilir?

Şekil 4: Şekil Örüntüsü Problemleri

Verilerin Analizi

Problemler nitel olarak analiz edilmiştir. Nitel analiz, Radford'un (2006) kuramsal çerçevesinde yer alan temel başlıklardan yararlanılarak oluşturulan kategoriler doğrultusunda gerçekleştirilmiştir: ortak yönü belirleme, hipotez oluşturma ve genel terimi yazma. Öğretmen adaylarının cevapları doğrultusunda ve belirtilen kategoriler bağlamında fark edilen örüntüler tespit edilerek yorumlanmıştır.

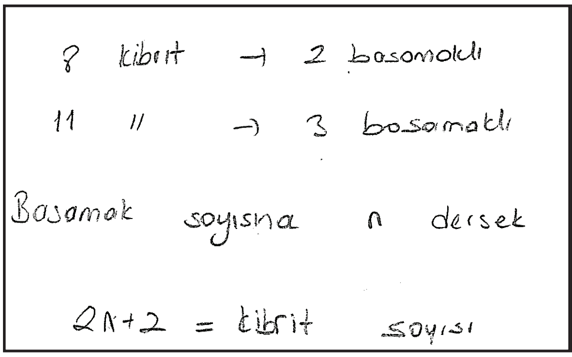
Bulgular

Bu bölümde her bir problemde gerçekleşen genelleme yapma süreci Radford'un (2006) kuramsal çerçevesi doğrultusunda ortak yönü belirleme, hipotez oluşturma ve genel terimi yazma yönünden incelenmektedir.

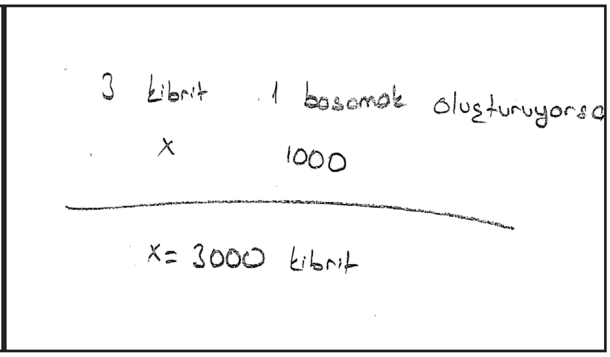
Birinci Problemden Elde Edilen Bulgular

Birinci problemde örüntü ardışık terimler üzerinden değil örüntünün bazı terimleri üzerinden verilmektedir. Problemde öğretmen adaylarından cebirsel bir ifade yazmaları istenmemekte ancak 1000. terimi problemdeki değişkenler arasındaki ilişkiyi fark ederek bulmaları beklenmektedir.

Ortak yönü belirleme bağlamında öğretmen adaylarının % 93'lük oranla merdiven sayısı ve kibrit çöpü sayısı arasındaki ilişkiye odaklandığı gözlemlenmiştir. Öğretmen adaylarının örüntüdeki ortak özelliği merdiven sayısı ile kibrit çöpü arasındaki ilişki üzerinden belirlemesi, örüntüye ilişkin genel bir hipotez geliştirmelerine yardımcı olmuştur. Bununla birlikte öğretmen adaylarının % 9'u örüntüdeki ortak özelliği doğru şekilde belirlemesine karşın ilişkiyi baştaki merdiven sayısını dikkate almayarak hipotezi yanlış şekilde ifade etmiştir. Merdiven sayısı ile kibrit çöpü arasındaki ilişkiye odaklanan örnek cevap şekil 5-a'da, odaklanmayan örnek cevap 5-b'de verilmektedir.



Şekil 5-a: Cevap Örneği–1

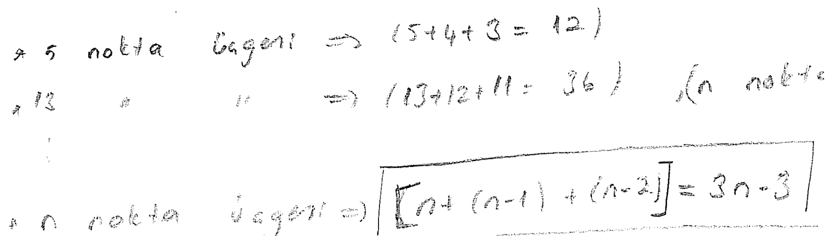


Şekil 5-b: Cevap Örneği–2

Ortak özelliği genel bir ifade yazma yönünde belirleyebilen öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun (% 84) basamak sayısının üç katının 2 fazlası sayıda kibrit çöpü kullanıldığı yönünde hipotez geliştirdikleri ve n basamak sayısı belirtmek üzere kibrit çöpünü veren ifadeyi 3n + 2 olarak yazabildikleri gözlemlenmiştir.

İkinci Problemden Elde Edilen Bulgular

İkinci problemde örüntü görsel olarak açıklanmakta ve genel teriminin bulunması istenmektedir. Örüntüdeki ortak özelliği belirleme yönünden öğretmen adaylarının % 96'sının örüntüye ilişkin hipotez oluşturmaya yardımcı olacak şekilde hareket ettikleri gözlemlenmiştir. Ortak özelliği belirlemede üç yaklaşımın olduğu görülmüştür. Bunlardan ilki görsel modelden yararlanarak örüntüyü sayısal olarak yazma ve sayı örüntüsündeki terimleri düzenleme sonrası ortak özelliğin belirlenmesidir. Bu yaklaşım şekil 6'da verilmektedir.



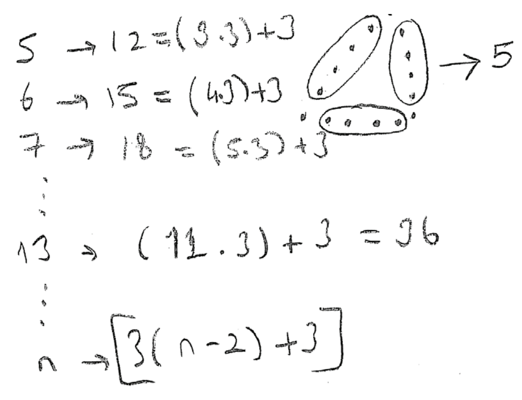
Şekil 6: Sayı Örüntüsündeki Terimleri Düzenleme Yaklaşımı Örneği (2. Problem)

Bu yaklaşımı kullanan öğretmen adayları nümerik olarak bir ortak özellik fark etmiş, bu özelliği 'terim sayısı, terim sayısının 1 eksiği ve terim sayısının 2 eksiğinin toplamı' şeklinde transfer ederek hipoteze çevirmişlerdir. Son olarak bir kenarında n tane nokta bulunan üçgen için genel terimi 3n–3 yazarak genel terimi elde etmişlerdir.

Ortak özelliği belirlemede rastlanan diğer yaklaşım görsel modelden yararlanmadır. Üçgenin her bir kenarındaki nokta sayısı ile terim sayısı ilişkilendirilerek ortak özellik belirlenmektedir. Bu yaklaşıma örnek bir cevap şu şekildedir:

"Nokta üçgeninde kenardaki nokta sayısı artınca toplam nokta sayısı 3 artıyor. Bununla birlikte 3 kenar olduğu için nokta sayısını üç ile çarpıp, köşedeki noktaları iki kere saymış olduğum için, 3 nokta çıkarıyorum.

Bu yaklaşıma sahip başka bir yanıt türü de köşedeki noktaları sabit tutup geri kalan nokta sayısı ile terim sayısını ilişkilendirmektir. Bu yaklaşıma örnek bir cevap şekil 7'de verilmektedir:



Şekil 7: Şekil Örüntüsünden Yararlanma Yaklaşımı Örneği (2. Problem)

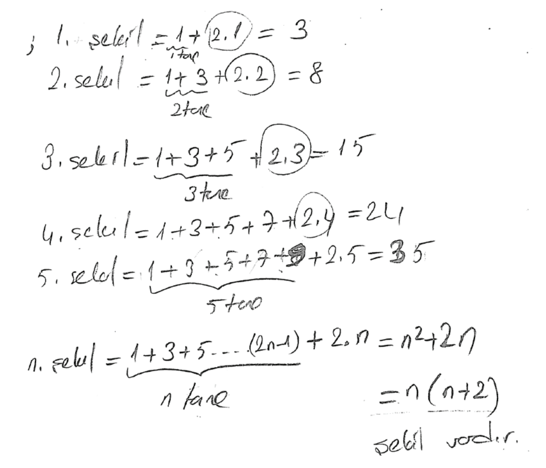
Bu yaklaşımı kullanan öğretmen adayları ortak özelliği model üzerinden, noktaları kendi aralarında gruplandırarak fark etmişlerdir. Şekil 7'de verilen örnek yanıt üzerinden gidilecek olursa, şekil üzerinde yaptıkları gruplandırma sonrasında fark ettikleri ortak özelliği, 'üçgenin köşelerindeki noktalar dışında her kenarda terim sayısının iki eksiği sayıda nokta bulunmaktadır' şeklinde transfer etmişler ve hipotez oluşturmuşlardır. Son olarak bir kenarında n tane nokta bulunan üçgen için genel terimi

3(n–2)+3 yazarak elde etmişlerdir.

Ortak özelliği belirlemede rastlanan üçüncü yaklaşım görsel modelden yararlanılarak örüntünün sayı örüntüsü şeklinde yazılması ve terimlerin 3'er 3'er arttığının belirtilmesidir. Bu yaklaşımı kullanan öğretmen adayları herhangi bir hipotez geliştirmemekte, deneme yanılma yoluyla genel terimi yazmaktadır. Diğer bir ifadeyle genelleme yapma değil, olgunlaşmamış tümevarım kendini göstermektedir. Öğretmen adaylarının kullandığı üç yaklaşım birlikte ele alındığında sadece ilk iki yaklaşımın cebirsel genelleme içerdiğini, son yaklaşımın ise genel terim cebirsel olarak yazılmış olmasına karşın cebirsel genelleme içermediği söylenebilir.

Üçüncü Problemden Elde Edilen Bulgular

Üçüncü problemde öğretmen adaylarının kuralı ikinci derece olan bir örüntünün genel terimini şekil örüntüsü yardımıyla bulmaları beklenmektedir. İlk iki problemdeki lineer sayı örüntülerinin genel terimini araştırırken tüm terimler için geçerli olacak bir hipotez oluşturma yönünde hareket eden öğretmen adayları bu problemde örüntünün bir sonraki terimini bulma eğilimi göstermişlerdir. Öğretmen adaylarının %43'ü ortak özelliği tüm terimler için geçerli olacak bir ifade oluşturma yönünde belirlemiştir. Bu şekilde ortak özellik araştıran öğretmen adaylarının tamamı tek bir yaklaşımı kullanmıştır. Öğretmen adayları şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne çevirmiş ve sayıları ortak bir nokta bulacak şekilde yeniden düzenlemişlerdir. Bu yaklaşıma örnek cevaplar şekil 8'de verilmektedir:



Şekil 8: Sayı Örüntüsündeki Terimleri Düzenleme Yaklaşımı Örneği (3. Problem)

Bu yaklaşımı kullanan öğretmen adayları ortak özelliği yeniden düzenledikleri sayılar üzerinden incelemişlerdir. Ayırt ettikleri bu ortak özelliği transfer ederek 'her sayının terim sayısı kadar ardışık tek sayıların toplamı ile terim sayısının 2 katının toplamı' olduğu yönünde hipotez oluşturmuşlardır. Öğretmen adayları hipotezi kullanarak n. terimi $n^2 + 2n$ olarak bulmuşlardır.

Öğretmen adaylarının %30'u örüntüdeki ortak özelliği bir sonraki terimi bulma ya da istenilen terimi bir önceki terimden hareketle belirleme yönünde ayırt etmiştir. Bu duruma örnek bir cevap şu şekildedir:

'Sayı örüntüsünde 1. terime 5 eklenerek 2. terim bulunmuş, 2. terime ilk terime eklenen sayının 2 fazlası eklenerek 3. terim oluşturulmuştur. Her bir terime, o terim oluşturulurken eklenen sayının 2 fazlasını ekleyerek bir sonraki terimi elde ederiz. Şekil örüntüsünü incelediğimizde de, her bir terimdeki noktaların sayısı arasındaki ilişkinin sayı örüntüsünün kuralıyla aynı olduğunu görürüz.'

Burada fark edilen ortak özellik terimler arası artışa bağlı olduğundan ortak özellik transfer edilip hipoteze çevrilirken de tüm terimlerin bulunmasını sağlayacak genel bir ifadeye ulaştırmamaktadır. Burada cebirsel genellemenin değil, aritmetik genellemenin oluştuğu söylenebilir.

Öğretmen adayları lineer sayı örüntülerinde yüksek yüzdeyle örüntüye ilişkin hipotez oluşturmaya yardımcı olacak ortak özellik aramalarına karşın (1. problemde % 93, 2. problemde % 96), bu örüntü probleminde adayların % 43'ü ortak özelliği tüm terimler için geçerli olacak bir ifade yazacak şekilde belirlemiştir. Dikkat çeken noktalardan bir diğeri de öğretmen adaylarının hiçbirinin 2. problemde olduğu gibi görsel modelden etkili şekilde yararlanmaması, başka bir deyişle ortak özelliği şekil örüntüsü üzerinden araştırmamasıdır. Öğretmen adayları kuralının bulunması daha karmaşık olan bir sayı örüntüsü ile karşılaştıklarında nümerik olarak genel terimi araştırmakta, şekil örüntüsünü etkin olarak kullanmamaktadırlar.

Dördüncü Problemden Elde Edilen Bulgular

Dördüncü problemde öğretmen adaylarının kuralı ikinci dereceden olan bir sayı örüntüsünün genel terimini bulmaları ve bu sayı örüntüsünü temsil edecek bir şekil örüntüsü oluşturmaları beklenmektedir. Şekil örüntüsü şeklinde belirtmelerinin istenmesinin nedeni şekillerin, genel terimi bulmayı kolaylaştıran bir temsil biçimi olduğunu ne ölçüde fark edebildiklerini görmektir. Bu problemde de üçüncü problemden elde edilene benzer bulgulara ulaşılmış, terim sayısı ile terim arasındaki ilişkiyi araştıranların yüzdesi düşmüştür. Öğretmen adaylarının % 45'i sayı örüntüsündeki ortak özelliği ardışık terimler arasındaki artış üzerinden belirlerken, % 24'ü tüm terimler için geçerli olacak bir ifade oluşturma yönünde belirlemiştir. Cebirsel genelleme yapma yönünde ortak özelliği belirleyen öğretmen adaylarının kullandığı tek bir yaklaşım olmuştur. Bu yaklaşım da örüntüyü yeniden düzenleyerek ortak özellik aramadır. Bu yaklaşıma örnek bir cevap şekil 9'da verilmektedir:

1. term = 5

2. terim = 5 + 4.1

3. terim = 5 + 4.1 + 4.2

⋮

n. terim = 5 + 4.1 + 4.2 + 4.3 + ... + 4.(n-1)

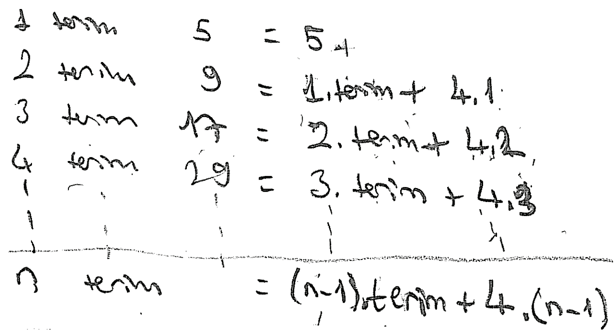
$$5+4\underbrace{(1+2+3 \ldots +(n-1))}$$

$$5+\cancel{4}^{2}.\frac{(n-1).(n)}{\cancel{2}} = 5+2(n^2-n)$$

Şekil 9: Sayı Örüntüsündeki Terimleri Düzenleme Yaklaşımı Örneği (4. Problem)

Bu örnek cevap üzerinden cebirsel genelleme süreci incelenecek olursa, örüntüdeki ortak özellik yeniden düzenlenen sayılar üzerinden belirlenmiştir. Ayırt edilen bu ortak özellik transfer edilerek 'her terim 1'den terim sayısının 1 eksiğine kadar sayının toplamının 4 katının 5 fazlası' olarak hipotez oluşturulmuştur. Hipotez sayı örüntüsünün her terimini bulmayı sağlayacak şekilde kullanılarak n. terim $5+2(n^2-n)$ şeklinde bulunmuştur.

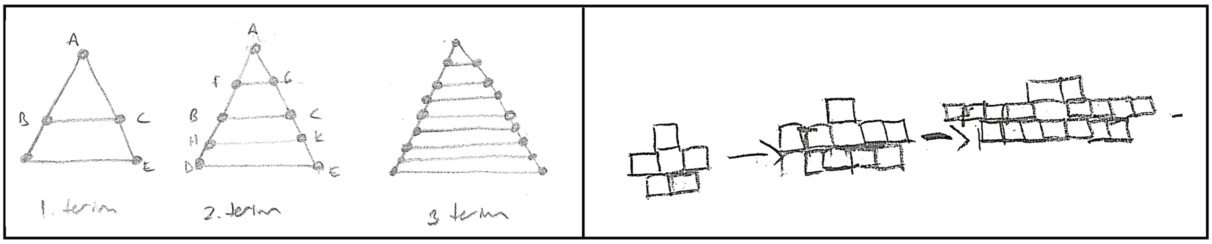
Sayı örüntüsündeki ortak özelliği örüntünün tüm terimlerini bulmayı sağlayacak bir hipotez oluşturma yönünde belirlemeyen öğretmen adayları örüntünün terimlerini bir önceki terimi kullanarak bulma yaklaşımını kullanmışlardır. Bu yaklaşıma örnek bir cevap şekil 10'da verilmektedir:



Şekil 10: Örüntünün Terimlerini Bir Önceki Terimi Kullanarak Bulma Yaklaşımı Örneği

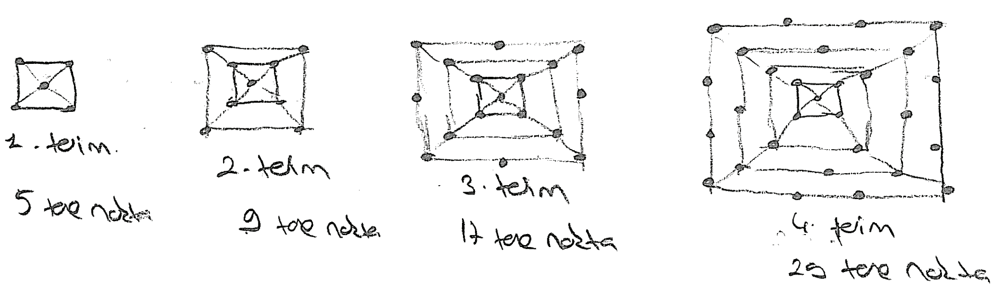
Ortak özellik transfer edilerek genel bir ifadenin yazılmasını sağlayacak hipotez oluşturulamadığından burada cebirsel genellemenin değil, aritmetik genellemenin oluştuğu söylenebilir.

Genelleme yapmada şekillerin kullanımına yönelik inceleme yapıldığında öğretmen adaylarının yanıtlarının iki kategoride toplandığı görülmektedir. Bunlardan ilki sayı örüntüsünü belirtmede yanlış model kullanımıdır. Öğretmen adayları herhangi bir ölçütü göz önüne almaksızın terimi içerecek sayıda şekil kullanarak model ile göstermişlerdir. Bu kategoride olan örnekler şekil 11'de sunulmaktadır:



Şekil 11: Uygun Olmayan Şekil Örüntüsü Örnekleri

Şekillerin kullanımına yönelik diğer yaklaşım da modelin oluşturulması ancak genelleme yapma sürecinde temsil biçimi olarak etkin şekilde kullanılmamasıdır. Bu duruma örnek bir model şekil 12'de sunulmuştur:



Şekil 12: Problem 4 İçin Hazırlanmış Uygun Bir Şekil Örüntüsü Örneği

Öğretmen adaylarının bir temsil biçimi olarak şekil örüntülerinin, genelleme yapma sürecine katkısını fark etmedikleri, nümerik olarak temsil biçiminden daha fazla yararlandıkları gözlemlenmiştir.

Tartışma

Bu çalışmada 145 ilköğretim matematik öğretmen adayının lineer olan ve lineer olmayan şekil örüntülerini genelleme süreçleri ve şekil örüntülerini bu süreçte nasıl kullandıkları incelenmiştir. Bu bölümde, elde edilen bulguların genel bir değerlendirmesi yapılacak ve önerilerde bulunulacaktır. Radford'un (2008) kuramsal çerçevesi kapsamında analiz edilen verilerden elde edilen bulgular öğretmen adaylarının büyük bir çoğunluğunun şekil örüntülerini genelleme sürecinde çeşitli zorluklar çektiklerini ortaya koymuştur.

Öğretmen adaylarının karşılaştıkları ilk zorluk Radford'un da vurgu yaptığı genelleme - tümevarım ayrımı ile ilgilidir. Öğretmen adayları özellikle kuralı ikinci dereceden olan örüntülerin kuralını keşfetmeye çalışırken çoğunlukla deneme yanılma stratejisini kullanmışlardır. Her ne kadar deneme-yanılma stratejisi kullanılarak cebirsel ifadeye ulaşmak mümkün olsa da, Radford'un da belirttiği gibi, cebirsel düşünme sürecinden geçilmediğinden dolayı genelleme değil olgunlaşmamış tümevarım yapma söz konusu olmaktadır. Diğer bir ifadeyle notasyon kullanımı cebirsel düşüncenin oluşumunun başlı başına bir göstergesi değildir. Genelleme sürecinin gerçekleşmesine engel olan en büyük unsur örüntünün terimleri arasında ortak bir özellik keşfetmeden yalnızca deneme-yanılmaya bağlı kalınmasıdır.

Öğretmen adaylarının genelleme süreçlerini incelerken karşımıza çıkan bir diğer nokta örüntünün terimleri arasında ortak bir özellik bulma ile ilişkilidir. Genelleme yapma sürecinde sorun yaşayan öğretmen adaylarının örüntünün tüm terimlerini bulmayı sağlayacak şekilde hipotez kuramadıkları görülmüştür. Bunun temel nedeni de örüntüde fark ettikleri ortak özelliğin bunu yapmaya yardımcı olmamasıdır. Örneğin öğretmen adayları örüntünün kuralını araştırırken örüntünün verilen terimlerinden yola çıkarak sonraki terimleri bulma eğiliminde olmuşlardır. Terimler arası yakalanan ortak özellik önceki terimden yola çıkıp bir sonraki terimi bulmaya yönelik olduğunda bu durum cebirsel değil aritmetik genellemeye götürmektedir. Çünkü cebirsel genelleme için bir sonraki terime yoğunlaşmaktan ziyade terim sayısı ile terim arasında bir ilişkiyi araştırmak ve bu yönde bir ortak özellik keşfetmek gereklidir. Öğretmen adayları terim ile terim sayısı arasındaki ilişkinin daha net görüldüğü lineer örüntülerde ortak özelliği bu şekilde oluştururken, daha karmaşık örüntülerde deneme yanılma üzerine yoğunlaşmışlardır. Bu bağlamda lineer olmayan örüntülerle genelleme yapma sürecinde olgunlaşmamış tümevarım veya aritmetik genellemenin daha çok kullanıldığı görülmektedir.

Bulguların gösterdiği diğer bir husus da öğretmen adaylarının şekil örüntülerini kullanmaları ile alakalıdır. Öğretmen adayları modellerden, örüntüyü nümerik olarak yazmada yararlanmışlardır. Bu bulgu Rico'nun (1996) ve Stacey'nin (1989) çalışmasında da ortaya çıkmış, öğrenciler şekilleri bir ilişki bulma yönünde incelemek yerine sayı örüntüsüne dönüştürmek için kullanmışlardır. Bunun yanı sıra öğretmen adayları örüntünün kuralını bulmaya dair bir hipotez oluşturacak şekilde değil, sadece örüntüyü görselleştirmek için model kullanmışlardır. Başka bir deyişle, modellerin kullanımı örüntüdeki ortak özelliği fark etmeye yönelik olarak etkin bir şekilde gerçekleşmemiştir. Presmeg (1986) öğretmenlerin görsel akıl yürütmeyi bir aksesuar olarak kullanma eğiliminde olduğunu belirtmektedir. Oysa örüntülerin model kullanılarak sunulmasının amaçlarından 'biri sayıların dizilişini geometrik olarak görme ihtiyacı duyanlar için alternatif yaratmaktır' (Orton ve Orton, 1999, s. 120). Bunun yanı sıra örüntüdeki ilişkilerin kolayca görülemediği durumlarda örüntüdeki şekiller etkili bir temsil biçimi olarak karşımıza çıkabilir.

Elde edilen bulgular dikkate alındığında genelleme sürecinin doğru şekilde gerçekleşmesinin başlangıcında örüntüdeki ortak özelliğin doğru şekilde belirlenmemesinin yattığı görülmektedir. Çünkü tespit edilen ortak özellik doğru olmadığı takdirde oluşturulan hipotez tüm terimlerin bulunabilmesini sağlayacak kapsamda olmamakta ve genel terim yazılamamaktadır. Bu bağlamda cebirsel genelleme üzerinde durulurken bu sürece gerekli zamanın ayrılması gerektiği söylenebilir.

Öğretmen adayları matematik öğretim programlarında gerçekleştirilen değişiklikler sonrasında kendi öğrenimleri sırasında öğrenmedikleri konularla karşılaşmaktadırlar. Örüntüler ve genelleme yapma bu konular arasında yer almaktadır. Öğretmen adaylarının kendileri de aynen ilköğretim ve ortaöğretimde ilk kez öğrenenler gibi benzer zorluklardan geçerek deneyim kazanmaktadırlar. Bu nedenle eğitim fakültesindeki öğrenimleri esnasında öğretim programında önemle üzerinde durulan bu gibi konulara ilişkin çalışmaların yapılması ve bu çalışmada da işaret edilen genelleme sürecine analitik yaklaşmalarının sağlanması önerilmektedir.

KAYNAKÇA

Becker, J. R., & Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sa´iz, & A. Me´ndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 95–101). Me´rida, Me´xico: Universidad Pedago´gica Nacional.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. ve Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization, *ZDM Mathematics Education*, 40: 3–22.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). Research methods in education. London: Routledge.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks Taylor, D. (1999). Children's strategies with linear and quadratic sequences, In A. Orton (Eds) *Pattern in the teaching and learning of mathematics*. London: Cassell.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romnberg (Eds.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133–155). Mahway: Lawrence Erlbaum.

Krutetskii, V. A. (1976). The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. (J. Kilpatrick, & I. Wirszup, Trans.) Chicago: University of Chicago Press.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), Approaches to algebra (pp.65–86). Dordrecht: Kluwer.

Orton, A. (1999). Pattern and the approach to algebra. London: Cassell.

Orton, A., & Orton J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Patterns in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104–120). London: Cassell.

Papic, M. (2007). Promoting repeating patterns with young children--more than just alternating colours!. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 12(3), 8–13.

Polya, G. (1957). How to solve it (2nd ed.). Princeton: Princeton University Press.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In J. L. C. S. Alatorre, M. Sa´iz, Iconicity and contraction A. Me´ndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, pp. 2–21). Mexico: Me´rida.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts, *ZDM Mathematics Education*, 40, 83–96.

Rico, L. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 87–102). Valencia: University of Valencia.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.

Steele, D.F.& Johanning, D.I. (2004). A Schematic-Theoretic View of Problem Solving and Development of Algebraic Thinking, *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 65–90

Uygur-Kabael, T., & Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. İlköğretim Online, 9(1), 213–228.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49(3), 379–402.

Summary

Introduction

Generalizing about patterns is thought to be important because the structure of mathematics can be observed by searching for patterns and relationships (Hargreaves et al., 1999). Along with the importance of pattern and generalization for mathematical thinking, the literature points out that, generalizing patterns is a challenging topic for students (Orton, 1999). Students tend to try a rule by looking for a relationship between consecutive terms of the pattern but they have difficulties with finding an algebraic rule for the pattern. Radford (2008) points out an important issue concerning generalization process and emphasizes that the use of notation is not an indication of generalization in and of itself. Radford mentions that generalization could occur by realizing a commonality among terms and this commonality is valid for all terms of the pattern. Radford (2006) offers a theoretical framework to investigate the process of generalizing. This process starts with finding a commonality among a few terms of the pattern. Second step requires generalizing this commonality to all terms and proposing a hypothesis. Finally one needs to find an algebraic expression using the commonality that is valid for all terms of the pattern. An important point that comes into prominence in Radford's framework is the distinction between generalization and induction. He mentions that students find an algebraic expression by trial and error method using induction but they do not focus on a commonality among the terms. He calls this strategy "naïve induction". Using Radford's framework this study investigates how pre-service mathematics teachers find commonalities for pictorial patterns, how they use these commonalities to generalize and how they find an algebraic expression.

Methodology

This study uses survey research method to investigate the processes of generalizing patterns and aims to make descriptive explanations. The sample consists of 145 elementary pre-service mathematics teachers enrolled in a teacher preparation program in a western university of Turkey. The data is collected through four open-ended questions. The first two problems involve linear patterns and the other two problems involve non-linear patterns. The first two problems aim to investigate how prospective teachers generalize linear patterns and how they use pictorial models during this process. Third and fourth problems aim to reveal how participants make use of pictorial models given in the problem in the process of generalizing non-linear patterns. The problems were piloted and expert opinions were considered.

Survey including these four problems was conducted during the spring term of 2009-2010 academic year. Pre-service teachers were allowed an hour to complete the survey. They were reminded to reflect their thinking processes and make detailed explanations as they solved the problems.

Pre-service teachers written responses were qualitatively analyzed. The analysis was conducted using the categories in Radford's (2006) framework: identifying a commonality, establishing a hypothesis and finding an algebraic expression. Using these categories, patterns in pre-service teachers' responses were investigated.

Findings

The findings indicated that pre-service teachers were more successful with linear patterns in identifying a commonality, establishing a hypothesis and finding an algebraic expression when compared to non-linear patterns. For linear patterns, most of the pre-service teachers (% 93 for the first problem and %96 for the second problem) looked for a commonality by focusing on a relationship between the term number and the corresponding term. On the other hand, they focused on the consecutive terms of the pattern for non-linear patterns which did not lead them to develop a hypothesis. In that case, pre-service teachers used naïve induction. Another important finding is concerned with the use of models in generalizing process. Pre-service teachers did not investigate commonalities using pictorial models especially for non-linear patterns. On the other hand, for the second problem, they successfully discovered commonalities by making use of pictorial models.

Discussion

The data obtained in this study revealed pre-service mathematics teachers' difficulties

in generalization process especially for non-linear patterns. These difficulties were interpreted using Radford's (2006) framework. In this framework, identifying a commonality in a pattern is the first phase of generalization process. Pre-service teachers had difficulties in this phase especially for non-linear patterns. As a result of this, they could not establish a hypothesis. In this case, pre-service teachers used trial and error method which is described as naïve induction by Radford.

Pre-service teachers' difficulties with generalization which were investigated under Radford's framework indicate a lack of subject knowledge on a topic that has been newly introduced in the Turkish curriculum. Pattern is a topic which was not experienced by pre-service teachers in their schooling. Therefore difficulties with such topics should be revisited in teacher preparation programs.