BEÜ Fen Bilimleri Dergisi
9 (2), 615-628, 2020

BEU Journal of Science
9 (2), 615-628, 2020

Araştırma Makalesi / Research Article

Çift İndisli Kesirli Fark Dizilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı

Koray İbrahim ATABEY[1*], Muhammed ÇINAR[2]

[1]*Muş Erentürk Öz Şeker Anadolu Lisesi, Muş*
[2]*Muş Alparslan Üniversitesi, Matematik Eğitimi Bölümü, Muş*
(ORCID: 0000-0002-5800-7155) (ORCID: 0000-0002-0958-0705)

Öz
Bu çalışmanın amacı, çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, $(\lambda,\mu)-$ istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro, kuvvetli p-Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmektir.

Anahtar kelimeler: $\lambda -$İstatistiksel yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, Kesirli farklar.

On Statistical Convergence of Difference Double Sequence of Fractional Order

Abstract
The aim of this study is to explore the relationship between statistical convergence, double $\Delta^{\tilde{\alpha}}-(\lambda,\mu)$-statistical convergence, Cesaro, p-strongly Cesaro, De la Vallée-Poussin, p-strongly De la Vallée-Poussin summability in statistical convergence of difference double sequence of fractional order via giving their definitions and to expand the definition of statistical convergence.

Keywords: $\lambda -$Statistical Convergence, Fractional Difference and Statistical Convergence.

1. Giriş

Çift indisli diziler ilk kez Pringsheim [1] tarafından verildi ve Türkiye'de Türkmenoğlu [2] tarafından "Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları" başlığı altında doktora tezi olarak çalışıldı. Fark dizileri kavramı Kızmaz [3] tarafından tanımlandı. Et ve Çolak [4] bu kavramı genelleştirdi. Baliarsingh [5] kesirli fark operatörlerini kullanarak bazı dizi uzaylarını genelleştirdi. Daha sonra Baliarsingh ve Dutta [6], Baliarsingh [7] konuya ilişkin çalışmalar yaptılar. Kesirli fark operatörü kullanılarak dizilerin istatistiksel yakınsaklığı Baliarsingh ve ark., [8] tarafından genelleştirildi.

Bu çalışmanın amacı, çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı, $(\lambda,\mu)-$ istatistiksel yakınsaklık ve Cesaro, kuvvetli p- Cesaro, De la Vallée-Poussin, kuvvetli p- De la Vallée-Poussin toplanabilirlik tanımlarını vererek bunlar arasındaki ilişkileri incelemek ve istatistiksel yakınsaklık kavramını genişletmektir.

2. Ön Bilgiler

Tanım 2.1. $x=(x_k)$ dizi verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-\mathrm{L}|=0$$

*Sorumlu yazar: korayatabey7@gmail.com
Geliş Tarihi: 24.09.2019, Kabul Tarihi: 08.04.2020

ise $x = (x_k)$ dizisi L'ye kuvvetli *Cesaro* toplanabilirdir. Tüm kuvvetli *Cesaro* toplanabilir dizi uzayını [C,1] şeklinde, yani

$$[C,1] = \left\{ x = (x_k) \colon \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - \mathrm{L}| = 0, \text{en az bir L için} \right\}$$

olarak tanımlayacağız [9].

Tanım 2.2. N doğal sayılar kümesi ve X boş olmayan herhangi bir küme olmak üzere

$$f \colon NxN \to X$$
$$(j,k) \to f(j,k) = x_{jk}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna "çift indisli dizi" denir. Çift indisli $x = (x_{jk})$ dizisini

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & \cdots & x_{0k} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{1k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{j0} & x_{j1} & \dots & x_{jk} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz [10].

Tanım 2.3. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle $N_0 \in N$ var ve tüm $j,k \geq N_0$ için $\left|x_{jk} - \mathrm{L}\right| \leq \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisinin *Pringsheim* limiti L dir denir [1].

Tanım 2.4. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. $\forall\, \varepsilon > 0$ için öyle $N_0 \in N$ ve $M_0 \in N$ sayıları var ve tüm $j,m \geq N_0$, $k,n \geq M_0$ için $\left|x_{mn} - x_{jk}\right| \leq \varepsilon$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisine bir *Cauchy* dizisi denir [1].

Tanım 2.5. $\forall\, \varepsilon > 0$ ve $h.h.k$ için $\left|x_k - x_{N_0}\right| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $N_0(\varepsilon) \in N$ varsa, yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n \colon \left|x_k - x_{N_0}\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine *istatistiksel Cauchy* dizi denir [11].

Tanım 2.6. Tüm pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$

koşulunu sağlayan $\lambda = (\lambda_n)$ dizilerinin kümesini Λ sembolüyle göstereceğiz [12].

Bu çalışmada $n_0 \in N = \{1,2,3,\ldots\}$ olmak üzere N_{n_0} kümesini

$N_{n_0} = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots\}$ şeklinde tanımlayacağız.

Tanım 2.7. $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi, pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza giden ve

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$
$$I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$$

koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. Genelleştirilmiş De la Vallée-Poussin ortalaması

$$t_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{j \in I_n} x_j$$

şeklinde tanımlanır. $n \to \infty$ iken $t_n(x) \to$ L gidiyorsa $x = (x_k)$ dizisi L' ye $(\mathrm{V}, \lambda) -$ toplanabilirdir denir [12].

Tanım 2.8. $K \subset N$ olsun ve K'nın $\lambda -$yoğunluğunu

$$\delta_\lambda(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in K\}|$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda_n = n$ olması durumunda K'nın $\lambda -$yoğunluğunu $\delta_\lambda(K)$, K'nın doğal yoğunluğuna dönüşür. Her $K \subset N$ için $(\lambda_n/n) \leq 1$ ise $\delta(K) \ \leq \delta_\lambda(K)$ olur [12].

Tanım 2.9. $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - \mathrm{L}| > \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi L ye $\lambda -$istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_\lambda - \lim_{k \to \infty} x_k = \mathrm{L}$$

şeklinde gösterilir. Tüm $\lambda -$istatistiksel yakınsak dizilerin kümesini S_λ ile göstereceğiz [12].

Tanım 2.10. $x = (x_k)$ bir dizi ve $M > 0$ olmak üzere

$$\delta_\lambda(\{k \leq n : |x_k| > M\}) = 0$$

oluyorsa $x = (x_k)$ dizisi $\lambda -$istatistiksel sınırlıdır denir [13].

Tanım 2.11. $K \subset NxN$ ve $j \leq m$, $k \leq n$ olmak üzere $K(m,n)$ kümesinin elemanlarını (j,k) olarak kabul edelim ve $K(m,n)$ kümesini

$$K(m,n) = \{j \leq m \; ve \; k \leq n : (j,k) \in K\}$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n \to \infty} inf \frac{|K(m,n)|}{mn}$$

ifadesi K kümesinin doğal yoğunluğudur. $\frac{|K(m,n)|}{mn}$ kümesinin limiti tek ise K kümesinin doğal yoğunluğu aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\delta_2(K) = (P) - \lim_{m,n \to \infty} \frac{|K(m,n)|}{mn}$$

[14].

Örnek 2.12. $K = \{(j^2, k^2) : j, k \in N\}$ olarak tanımlarsa K kümesinin yoğunluğu

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{mn} |K(m,n)| \leq \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{mn} \left(\sqrt{m}\sqrt{n}\right) = 0$$

olur [14].

Tanım 2.13. $x = (x_{jk})$ reel terimli çift indisli bir dizi olmak üzere,

$$\delta_2(\{(j,k);\ j \leq m\ ve\ k \leq n : |x_{jk} - \mathrm{L}| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st_2 - \lim_{j,k\to\infty} x_{jk} = \mathrm{L}$$

şeklinde gösterilir. Tüm çift indisli istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_2 ile gösterilir [14].

Tanım 2.14. $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n)$ sonsuza giden, pozitif sayıların azalmayan ve

$$\lambda_{m+1} \leq \lambda_m + 1, \qquad \lambda_1 = 0$$
$$\mu_{n+1} \leq \mu_n + 1, \qquad \mu_1 = 0$$

koşullarını sağlayan iki dizi olsun. $K \subset NxN$ alalım ve K nın (λ, μ) yoğunluğunu

$$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (P) \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{m - \lambda_m + 1 \leq j \leq m, n - \mu_n + 1 \leq k \leq n : (j,k) \in K\}|$$

şeklinde tanımlayacağız.

$\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ olduğu durumda $\delta_{\lambda,\mu}(K)$ yoğunluğu $\delta_2(K)$ yoğunluğuna indirgenir. Her $K \subset NxN$ için $\lambda_m/m \leq 1$ ve $\mu_n/n \leq 1$ ise $\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda,\mu}(K)$ tir [13].

Tanım 2.15. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi, $\forall\ \varepsilon > 0$ için $K \subset NxN$

$$K = \{j \in J_m, k \in I_n : |x_{jk} - \mathrm{L}| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlandığında $\delta_{\lambda,\mu}(K) = 0$ oluyorsa $x = (x_{jk})$ dizisi L' ye (λ, μ) istatistiksel yakınsaktır denir. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (P) \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} |\{j \in J_m, k \in I_n : |x_{jk} - \mathrm{L}| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L sayısına (λ, μ) istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_{\lambda\mu} - \lim_{m,n\to\infty} x_{jk} = \mathrm{L}$ şeklinde gösterilir. Tüm (λ, μ) istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $S_{\lambda,\mu}$ ile gösterilir.

Eğer $\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ ise $S_{\lambda,\mu}$, S_2 ye indirgenir. $\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda,\mu}(K)$ olduğu için $S_{\lambda,\mu} \subset S_2$ kapsaması elde edilir [13].

Tanım 2.16. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi, $\lambda_m\ ve\ \mu_n \in \Lambda$, $I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ ve $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere

$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} x_{jk}$$

toplamına çift indisli diziler için De la Vallée-Poussin ortalaması denir [13].

Tanım 2.17. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olmak üzere;

$$(P) - \lim_{m,n\to\infty} t_{m,n}\big(|x_{jk} - \mathrm{L}|\big) = 0$$

ise $x = (x_{jk})$, L ye kuvvetli $(\mathrm{V}, \lambda, \mu)$ toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $(\mathrm{V}, \lambda, \mu)$ toplanabilir dizilerin kümesini $[\mathrm{V}, \lambda, \mu]$ ile göstereceğiz.
Eğer $\lambda_m = m$, $\mu_n = n$ olduğu durumda kuvvetli $(\mathrm{V}, \lambda, \mu)$ −toplanabilirlik, kuvvetli Cesaro toplanabilirliğe indirgenir [13].

Fark dizileri kavramı ilk kez Kızmaz [3] tarafından 1981 yılında tanımlandı. $x = (x_k)$ kompleks terimli dizi ve $k \in N$ olmak üzere

$$\Delta x = (\Delta x)_k = (x_k - x_{k+1})$$

$\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları Kızmaz [3] tarafından

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\}$$
$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\}$$
$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

olarak tanımlandı ve

$$\|x\|_\Delta = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normuyla birer *Banach* uzayı oldukları gösterildi.

$x = (x_k)$ kompleks terimli dizi ve $k, m \in N$ olsun. Et ve Çolak [4]

$$\Delta^0 x = (x)_k \, , \Delta x = (x_k - x_{k+1})$$
$$\Delta^m x = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$$
$$(\Delta^m x)_k = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$$

olmak üzere yukarıdaki dizi uzaylarını

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\}$$
$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\}$$
$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

uzaylarına genelleştirdiler ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^{m} |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normuyla birer *Banach* uzayı olduklarını gösterdiler.

Tanım 2.18. Gamma fonksiyonu $\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ve α reel sayı olmak üzere;

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

olarak tanımlanır ve α herhangi bir doğal sayı olursa $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$. Örneğin $\Gamma(1) = 1!$, $\Gamma(2) = 1!$, $\Gamma(3) = 2!$, $\Gamma(4) = 3!$ ...

w tüm reel değerli dizi uzayını göstermek üzere $x = (x_k) \in w$, $\alpha \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ve α reel sayı olmak üzere fark operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayacağız;

$$(\Delta^{\alpha}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{i!\,\Gamma(\alpha-i+1)}x_{k+i}$$
$$(\Delta^{(\alpha)}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{i!\,\Gamma(\alpha-i+1)}x_{k-i}$$
$$(\Delta^{-\alpha}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{i!\,\Gamma(1-\alpha-i)}x_{k+i}$$
$$(\Delta^{(-\alpha)}x)_{\mathrm{k}}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{i!\,\Gamma(1-\alpha-i)}x_{k-i}$$

ilk iki operatörün açılımı yapılırsa;

$$(\Delta^{\alpha}x)_{k}=x_{k}-\alpha.x_{k+1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k+2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k+3}+\cdots$$
$$(\Delta^{(\alpha)}x)_{k}=x_{k}-\alpha.x_{k-1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x_{k-2}-\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x_{k-3}+\cdots$$

elde edilir [5]. Δ^{α} ve $\Delta^{(\alpha)}$ için;

i. $\alpha=1$ durumunda Δ^{α} operatörü Kızmaz [3] tarafından tanımlanan

$$(\Delta x)_{k}=(x_{k}-x_{k+1})$$

operatörüne indirgenir.

ii. $\alpha=m\ (m\in N)$ durumunda Δ^{α} operatörü Et ve Çolak [4] tarafından verilen

$$(\Delta^{m}x)_{k}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\binom{m}{i}x_{k+i}$$

operatörüne indirgenir.

Fark operatörlerinde kesirli olan α lar $\tilde{\alpha}$ ile gösterilerek fark operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\Delta^{\tilde{\alpha}}x)_{k}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)}{i!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-i+1)}x_{k+i}$$

[5].

Kesir dereceli fark operatörü çift indisli diziler için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^{2}}{m!\,n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)}x_{j+m,k+n}$$
$$\Delta^{(\tilde{\alpha})}(x_{jk})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^{2}}{m!\,n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)}x_{j-m,k-n}$$
$$\Delta^{-\tilde{\alpha}}(x_{jk})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})^{2}}{m!\,n!\,\Gamma(1-\tilde{\alpha}-m)\Gamma(1-\tilde{\alpha}-n)}x_{j+m,k+n}$$
$$\Delta^{-(\tilde{\alpha})}(x_{jk})=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(1-\tilde{\alpha})^{2}}{m!\,n!\,\Gamma(1-\tilde{\alpha}-m)\Gamma(1-\tilde{\alpha}-n)}x_{j-m,k-n}$$

[7].

3. Bulgular

Tanım 3.1. $x = (x_{jk})$ reel terimli çift indisli bir dizi $K \subset NxN$ ve olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K(m,n) = \{(\mathrm{j},\mathrm{k});\, \mathrm{j} \leq \mathrm{m} \text{ ve } \mathrm{k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani;

$$P - \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn}\left|\{(\mathrm{j},\mathrm{k});\, \mathrm{j} \leq \mathrm{m} \text{ ve } \mathrm{k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi L'ye $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsaktır denir. $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ ile gösterilir. Tüm $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.2. $x = (x_{jk})$ dizisi kompleks terimli çift indisli bir dizi olmak üzere tüm $j,k \in N$ için $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})| < M$ olacak şekilde $M > 0$ var yani $\sup_{j,k\geq 1}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}\right| < \infty$ ise $\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})\right)$ çift indisli dizi sınırlıdır denir. Bütün $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −sınırlı çift indisli dizi uzayını

$$l_\infty{}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}}) = \left\{x = (x_{jk}) : \forall\, j,k \in N \text{ için } \sup_{j,k\geq 1}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}\right| < \infty\right\}$$

şeklinde göstereceğiz.

Yakınsak çift indisli bir dizi aşikar olarak istatistiksel yakınsaktır fakat tersi her zaman doğru değildir ancak çift indisli dizilerin kesirli farklarından oluşan dizinin sınırlı ve istatistiksel yakınsak olması gerekmez. Aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.3. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizi olsun ve $y = (y_{jk}) = (\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk})$ dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$y_{jk} = \begin{cases} 1, & j = m^3, k = n^3 \\ \dfrac{1}{\mathrm{j}+\mathrm{k}}, & \textit{diğer durumda} \end{cases} \quad n,m = 1,2,3,\ldots$$

(y_{jk}) yakınsak olmamasına rağmen istatistiksel yakınsaktır, gerçekten

$$(y_{jk}) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+2} & \frac{1}{1+3} & & 1 & \frac{1}{1+9} & \cdots \\ \frac{1}{2+1} & \frac{1}{2+2} & \frac{1}{2+3} & \cdots & \frac{1}{2+8} & \frac{1}{2+9} & \cdots \\ \frac{1}{3+1} & \frac{1}{3+2} & \frac{1}{3+3} & & \frac{1}{3+8} & \frac{1}{3+9} & \cdots \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & . & & \cdots & & . & \end{bmatrix}$$

olup

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn}\left|\{(\mathrm{j},\mathrm{k});\, \mathrm{j} \leq \mathrm{m} \text{ ve } \mathrm{k} \leq \mathrm{n} : \left|y_{jk} - 0\right| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{m,n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{m}\sqrt[3]{n}}{mn} = 0$$

dır. Dolayısıyla (y_{jk}), 0 'a istatistiksel yakınsaktır, yani $y_{jk} \to 0\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ dır.

Örnek 3.4. $x = (x_{jk}) = \frac{1+(-1)^{j+k}}{2}$ dizisini göz önüne alırsak $x = (x_{jk})$ sınırlıdır, ıraksaktır ve istatistiksel yakınsak değildir. $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ dizisini aşağıdaki gibi açarsak

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{\Gamma(\tilde{\alpha}+1)^2}{m!\,n!\,\Gamma(\tilde{\alpha}-m+1)\Gamma(\tilde{\alpha}-n+1)}x_{j+m,k+n}\right)$$

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \begin{cases} 2^{2\tilde{\alpha}-1} & ,j+k \ \ çift \\ -2^{2\tilde{\alpha}-1} & ,i+k \ \ tek \end{cases}$$

şeklinde ifade edebiliriz. $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ dizisi sınırlıdır fakat ne istatistiksel yakınsak ne de yakınsaktır.

Örnek 3.5. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun ve $\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ aşağıdaki gibi tanımladığımızda

$$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) = \begin{cases} j+k\,, & j=m^2, k=n^2 \ \ m,n \in N \\ \ 0 \ \ , & diğer\ durumda \end{cases}$$

$\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk})$ istatistiksel yakınsaktır fakat sınırlı değildir.
Gerçekten,

$$(\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 8 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\left|\{(j,k); j<m, k<n : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-0\right| > \varepsilon\}\right| \leq \sqrt{m}\sqrt{n}$$

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{mn}\left|\{(j^2,k^2), \mathrm{j} \leq \mathrm{m\ ve\ k} \leq \mathrm{n} : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-0\right| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{m,n\to\infty}\frac{\sqrt{m}\sqrt{n}}{mn} = 0$$

Sonuçlar 3.6. $\tilde{\alpha}$ kesirli bir reel sayı olmak üzere;

- **a.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ve S_2 birbirini içermez.
- **b.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ve ${l_\infty}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ birbirini içermez.
- **c.** $\Delta^{\tilde{\alpha}}(c^2) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ ve bu kapsama kesindir.

Tanım 3.7. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{m,n}\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk} = \mathrm{L}$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L'ye $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −Cesaro toplanabilirdir denir. Tüm çift indisli $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −Cesaro toplanabilir dizilerin kümesini $(C,1,1)(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.8. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{m,n}\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L'ye kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ − Cesaro toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ − Cesaro toplanabilir çift indisli dizi uzaylarını $w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.9. i. $\tilde{\alpha}$ kesirli bir reel sayı ve $0 < p < \infty$ olmak üzere eğer $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right)$ ise $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ dir.

ii. Eğer $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ ve $(x_{jk}) \in l_\infty^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ ise $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right)$ dir.

İspat: i. $K_\varepsilon(p) = \left\{(j,k);\ j \le m, k \le n: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right|^p \ge \varepsilon\right\}$ alalım.

$\varepsilon > 0$ ve $x_{jk} \to \mathrm{L}\ (w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ olsun. $x = (x_{jk})$ dizisi L ye kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}} -$ Cesaro toplanabilir olduğundan;

$$0 = \lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p = \frac{1}{mn} \left(\sum_{(j,k) \in K_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p + \sum_{(j,k) \notin K_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p \right)$$
$$\ge \frac{1}{mn} \left| \left\{(j,k);\ j \le m, k \le n: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right|^p \ge \varepsilon\right\} \right| \varepsilon$$

Böylece $x = (x_{jk})$ dizisi L' ye istatistiksel yakınsaktır.

ii. $M = \sup |\Delta^{\tilde{\alpha}} x| + |\mathrm{L}|$ ve $I_\varepsilon(p) = \left\{(j,k);\ j \le m, k \le n: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \ge (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\right\}$ alalım. $x = (x_{jk})$ dizisi sınırlı istatistiksel yakınsak olduğundan $\forall\ \varepsilon > 0$ ve tüm $m, n \ge N_0$ için öyle bir $N_0 \in N$ vardır ki;

$$\frac{1}{mn} \left| \left\{(j,k);\ j \le m, k \le n : \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \ge (\frac{\varepsilon}{2})^{1/p}\right\} \right| \le \frac{\varepsilon}{2.(\|\Delta^{\tilde{\alpha}} x\|_\infty + \mathrm{L})^p} = \frac{\varepsilon}{2.M^p}$$

olur. Şimdi tüm $m, n \ge N_0$ için;

$$\frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p = \frac{1}{mn} \left(\sum_{(j,k) \in I_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p + \sum_{(j,k) \notin I_\varepsilon(p)} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p \right)$$
$$< \frac{1}{mn}.mn.\frac{\varepsilon}{2M^p} M^p + \frac{1}{mn}.mn.\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde ederiz.

Bu da $x_{jk} \to \mathrm{L}\ (w^2(\Delta_p^{\tilde{\alpha}}))$ anlamına gelir.

Sonuç 3.10. $x = (x_{jk}) \in {l_\infty}^2(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ ve $x_{jk} \to \mathrm{L}\ \left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ ise aynı zamanda $(C,1,1)(\Delta^{\tilde{\alpha}})$'dir. Fakat $x = (x_{jk})$ yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 3.11. $x = (x_{jk})$ bir dizi ve her $k \in N$ için $\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = (-1)^j$ olarak tanımlarsak

$$\lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} = 0$$

olur. Ama $x = (x_{jk})$ istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 3.12. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olsun.$\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle $N_0 \in N$ ve $M_0 \in N$ sayıları var ve tüm $j \ge N_0$, $k \ge M_0$ için

$$\lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{mn} \left| \left\{(j,k); j \le m, k \le n: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk} - x_{N_0 M_0})\right| \ge \varepsilon\right\} \right| = 0$$

oluyorsa $x = (x_{jk})$ çift indisli bir $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

Teorem 3.13. Eğer $x = (x_{jk})$ çift indisli bir $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel yakınsak bir dizi ise $x = (x_{jk})$, $\Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

İspat: Varsayalım ki $\forall\, \varepsilon > 0$ ve $x_{jk} \to L\ \left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)\right)$ olsun. Doğaldır ki hemen hemen tüm $j, k \in N$ için $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve seçilen $N_0, M_0 \in N$ sayıları için $|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Şimdi biz hemen hemen tüm $j, k \in N$ için

$$|\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0})| = |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L + L - \Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0})| < |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{jk}) - L| + |\Delta^{\tilde{\alpha}}(x_{N_0 M_0}) - L|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece $x = (x_{jk}),\ \Delta^{\tilde{\alpha}} -$ istatistiksel *Cauchy* dizisidir.

Tanım 3.14. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizinin kesirli De la Vallée-Poussin ortalaması

$I_n = [n - \mu_n + 1, n]$ ve $J_m = [m - \lambda_m + 1, m]$ olmak üzere
$$t_{m,n}(x) = \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk}$$
şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.15. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi olmak üzere

$$(P) \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \sum_{j \in J_m} \sum_{k \in I_n} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L|^p = 0$$

ise $x = (x_{jk})$, L ye kuvvetli $\Delta^{\tilde{\alpha}}_p -$ De la Vallée-Poussin toplanabilirdir denir. Tüm kuvvetli $(V, \lambda, \mu)(\Delta^{\tilde{\alpha}}_p)$ toplanabilir dizilerin kümesini $[V, \lambda, \mu](\Delta^{\tilde{\alpha}}_p)$ ile göstereceğiz.

Eğer $\lambda_m = m,\ \mu_n = n$ ise kuvvetli $\Delta^{\tilde{\alpha}}_p -$ De la Vallée-Poussin toplanabilirliği, kuvvetli $\Delta^{\tilde{\alpha}}_p -$ *Cesaro* toplanabilirliğe indirgenir, yani $[V, \lambda, \mu](\Delta^{\tilde{\alpha}}_p) = [C, 1,1](\Delta^{\tilde{\alpha}}_p)$ dir.

Tanım 3.16. $x = (x_{jk})$ çift indisli bir dizi, $\forall\, \varepsilon > 0$ için $K \subset NxN$

$$K = \{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}$$

olarak tanımlandığında $\delta_{\lambda,\mu}(K) = 0$ oluyorsa yani;

$$\delta_{\lambda,\mu}(K) = (P) \lim_{m,n \to \infty} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\{j \in J_m, k \in I_n : |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $x = (x_{jk})$ dizisi L ye $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel yakınsaktır denir. $x = (x_{jk})$ çift indisli dizisi $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda, \mu)$ istatistiksel yakınsak ise $st_{\lambda\mu} - \lim_{m,n \to \infty} \Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} =$ L şeklinde yazacağız.

Tüm (λ, μ) istatistiksel yakınsak çift indisli dizilerin kümesini $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ ile göstereceğiz.

$\lambda_m = m,\ \mu_n = n$ olması durumda $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ yerine $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ yazacağız.

$\delta_2(K) \leq \delta_{\lambda,\mu}(K)$ olduğu için $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_2)$ kapsamını elde ederiz.

Teorem 3.17. $\lambda = (\lambda_m)$ ve $\mu = (\mu_n)$, Λ kümesine ait olan iki dizi olsun. Bu takdirde

i. Eğer $x_{jk} \to L\left([V, \lambda, \mu](\Delta^{\tilde{\alpha}}_p)\right)$ ise $x_{jk} \to L\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})\right)$ dır, fakat tersi her zaman doğru değildir,

ii. Eğer $x_{jk} \in l_2^{\infty}(\Delta_2^{\tilde{\alpha}})$ ve $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})\right)$ ise $x_{jk} \to \mathrm{L}\left([\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right)$ ve böylece $x_{jk} \to \mathrm{L}\left([\mathrm{C},1,1](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right)$,

iii. $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})^{\infty} = [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \cap l_2^{\infty}(\Delta_2^{\tilde{\alpha}})$

dir.

Teorem 3.18. $\lambda = (\lambda_m)$, $\mu = (\mu_n)$, $\theta = (\theta_m)$, $\gamma = (\gamma_n)$ dizileri tüm $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört elemanı olsun. Bu durumda;

i. Eğer $\lim\inf_{m,n\to\infty} \frac{\lambda_m\mu_n}{\theta_m\gamma_n} > 0$ (3.1)

ise $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$.

ii. Eğer $\lim\inf_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$ ve $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$ (3.2)

ise $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma})$.

İspat: i. tüm $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulları sağlansın ve $\lim\inf_{m,n\to\infty} \frac{\lambda_m\mu_n}{\theta_m\gamma_n} > 0$ olduğunu kabul edelim.

$J_{m_1} = [m - \lambda_m + 1, m]$, $J_{m_2} = [m - \theta_m + 1, m]$, $I_{n_1} = [n - \mu_n + 1, n]$, $I_{n_2} = [n - \gamma_n + 1, n]$ olarak tanımlanırsa $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olur ve bu nedenle biz her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\} \supset \left\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\left|\left\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\geq \frac{\lambda_m\mu_n}{\theta_m\gamma_n}\frac{1}{\lambda_m\mu_n}\left|\left\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

yazabiliriz. Son eşitsizlikte her iki tarafta *Pringsheim* limit alırsak $(m, n \to \infty)$ $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ elde ederiz.

ii. $x = (x_{jk}) \in \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ ve $\lim\inf_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$, $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$ olduğunu kabul edelim. $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olduğundan tüm $m, n \in N_{n_0}$ ve her $\varepsilon > 0$ için;

$$\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\left|\left\{(j,k): j \in J_{m_2}, k \in I_{n_2}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$= \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\left|\left\{m - \theta_m + 1 \leq j < m - \lambda_m, n - \gamma_n + 1 \leq k < n - \mu_n: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$+ \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\left|\left\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{(\theta_m - \lambda_m)(\gamma_n - \mu_n)}{\theta_m\gamma_n} + \frac{1}{\lambda_m\mu_n}\left|\left\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \left(1 - \frac{\lambda_m}{\theta_m}\right)\left(1 - \frac{\mu_n}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{\lambda_m\mu_n}\left|\left\{(j,k): j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{\theta_m} = 1$, $\lim\inf_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\gamma_n} = 1$ ve $x = (x_{jk}) \in \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ olduğundan eşitsizliğin her iki tarafının $m, n \to \infty$ iken limiti alınırsa $\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu}) \subseteq \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\theta,\gamma})$ elde edilir.

Teorem 3.19. $\lambda = (\lambda_m)$, $\mu = (\mu_n)$, $\theta = (\theta_m)$, $\gamma = (\gamma_n)$ dizileri tüm $m, n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \leq \theta_m$, $\mu_n \leq \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört elemanı olsun.

i. Eğer (3.1) sağlanırsa $[\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$'dir.

ii. Eğer (3.2) sağlanırsa $l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$'dir.

İspat: i. $m,n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \le \theta_m$, $\mu_n \le \gamma_n$ koşulları sağlansın. $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için;

$$\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}}\sum_{k\in I_{n_2}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p \ge \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p$$

yazıp eşitsizliğin sağ tarafını $\lambda_m\mu_n$ ile çarpıp bölersek

$$\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}}\sum_{k\in I_{n_2}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p \ge \frac{\lambda_m\mu_n}{\theta_m\gamma_n}\frac{1}{\lambda_m\mu_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p$$

yazabiliriz. Her iki taraftan limit alır ve (3.1)'i kullanırsak $[\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ elde ederiz.

iii. $x=(x_{jk}) \in l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ ise $x=(x_{jk}) \in l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}})$ dir. Bundan dolayı tüm j,k ler için öyle bir $M>0$ sayısı vardır ki $\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}\right| < M$ olur. $J_{m_1} \subset J_{m_2}$ ve $I_{n_1} \subset I_{n_2}$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve tüm $m,n \in N_{n_0}$ için;

iv.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}}\sum_{k\in I_{n_2}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p \\
&\qquad = \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_2}-J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_2}-I_{n_1}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p + \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p \\
&\qquad \le \frac{(\theta_m-\lambda_m)(\gamma_n-\mu_n)}{\theta_m\gamma_n}M + \frac{1}{\theta_m\gamma_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p \\
&\qquad \le \left(1-\frac{\lambda_m}{\theta_m}\right)\left(1-\frac{\mu_n}{\gamma_n}\right) + \frac{1}{\lambda_m\mu_n}\sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p
\end{aligned}$$

Bu nedenle $l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset [\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ elde edilir.

Sonuç 3.20. $\lambda=(\lambda_m)$, $\mu=(\mu_n)$, $\theta=(\theta_m)$, $\gamma=(\gamma_n)$ dizileri tüm $m,n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \le \theta_m$, $\mu_n \le \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört dizisi olsun. Eğer (3.2) sağlanırsa $l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\lambda,\mu](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset l_2^{\infty}(\Delta^{\tilde{\alpha}}) \cap [\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})$ kapsamasını elde ederiz.

Teorem 3.21. $\lambda=(\lambda_m)$, $\mu=(\mu_n)$, $\theta=(\theta_m)$, $\gamma=(\gamma_n)$ dizileri tüm $m,n \in N_{n_0}$ için $\lambda_m \le \theta_m$, $\mu_n \le \gamma_n$ koşulunu sağlayan Λ kümesinin dört dizisi olsun. Eğer önce (3.2) sonra (3.1) sağlanırsa;
$x_{jk} \to \mathrm{L}\left([\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right) \Rightarrow x_{jk} \to \mathrm{L}\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})\right)$ ve $[\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}}) \subset \Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})$ kapsama kesindir.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $x_{jk} \to L\left([\mathrm{V},\theta,\gamma](\Delta_p^{\tilde{\alpha}})\right)$ olsun. Biz

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in J_{m_2}}\sum_{k\in I_{n_2}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p &\ge \sum_{j\in J_{m_1}}\sum_{k\in I_{n_1}}\left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}\right|^p \\
&\ge \sum_{\substack{j\in J_{m_1}k\in I_{n_1}\\ |\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-L|\ge\varepsilon}}|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}|^p \\
&\ge \left|\left\{(j,k);\, j\in J_{m_1}, k\in I_{n_1}: \left|\Delta^{\tilde{\alpha}}x_{jk}-\mathrm{L}\right|^p \ge \varepsilon\right\}\right|.\varepsilon
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan tüm $m,n \in N_{n_0}$ için

$$\frac{1}{\theta_m \gamma_n} \sum_{j \in J_{m_2}} \sum_{k \in I_{n_2}} |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p \geq \frac{\lambda_m \mu_n}{\theta_m \gamma_n} \frac{1}{\lambda_m \mu_n} \left|\{(j,k); j \in J_{m_1}, k \in I_{n_1}: |\Delta^{\tilde{\alpha}} x_{jk} - \mathrm{L}|^p \geq \varepsilon\}\right|. \varepsilon$$

elde edilir ve (3.1)'den dolayı $x_{jk} \to \mathrm{L}\left(\Delta^{\tilde{\alpha}}(S_{\lambda,\mu})\right)$ ulaşılır.

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada P. Baliarsingh (2016) tarafından tanımlanan çift indisli dizilerin kesir dereceli fark operatörleriyle;

Çift indisli kesirli fark dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını ($\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsaklığı), $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −sınırlılığını, $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel *Cauchy* dizisini, $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −Cesaro toplanabilirliğini, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ − *Cesaro* toplanabilirliğini, $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −De la Vallée-Poussin ortalamasını, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ −De la Vallée-Poussin toplanabilirliğini ve $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda,\mu)$ istatistiksel yakınsaklığı tanımları verildi.

$\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsak çift indisli bir dizinin aynı zamanda $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel *Cauchy* dizisi olduğunu, kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ − *Cesaro* toplanabilir olan çift indisli dizilerin $\Delta^{\tilde{\alpha}}$ −istatistiksel yakınsak olduğunu ve kuvvetli $\Delta_p^{\tilde{\alpha}}$ −De la Vallée-Poussin toplanabilirse $\Delta^{\tilde{\alpha}} - (\lambda,\mu)$ istatistiksel yakınsak olduğu sonuçlarına ulaşıldı.

Yazarların Katkısı

Tüm yazarlar bu makalenin yazılmasında eşit katkı sağlamışlardır.

Çıkar Çatışması Beyanı

Yazarlar arasında herhangi bir çıkar çatışması bulunmamaktadır.

Araştırma ve Yayın Etiği Beyanı

Yapılan çalışmada araştırma ve yayın etiğine uyulmuştur.

Kaynaklar

[1] Pringsheim A. 1900. Zur theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen. Mathematische Annalen, 53 (3): 289-321.
[2] Türkmenoğlu A. 1993. Bazı çift indisli dizi uzayları. Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
[3] Kızmaz H. 1981. On certain sequence spaces. Canadian Mathematical Bulletin, 24 (2): 169-176.
[4] Et M., Çolak R. 1995. On some generalized difference sequence spaces. Soochow J. Math.,21 (4): 377-386.
[5] Baliarsingh P. 2013. Some new difference sequence spaces of fractional order and their dual spaces. Applied Mathematics and Computation, 219 (18): 9737-9742.
[6] Baliarsingh P., Dutta S. 2015. A unifying approach to the difference operators and their applications. Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 33 (1): 49-57.
[7] Baliarsingh P. 2016. On difference double sequence spaces of fractional order. Indian Journal Mathematics, 58: 287-310.
[8] Baliarsingh P., Kadak U., Mursaleen M. 2018. On statistical convergence of difference sequences of fractional order and related Korovkin type approximation theorems. Quaestiones Mathematicae, 41 (8): 1117-1133.
[9] Boos J., Cass F.P. 2000. Classical and modern methods in summability. Clarendon Press.
[10] Burkill J.C., Burkill H. 1980. A Second Course in Mathematical Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, New York.
[11] Fridy J.A. 1985. On statistical convergence. Analysis, 5 (4): 301-313.

[12] Mursaleen M. 2000. λ-statistical convergence. Mathematica Slovaca, 50 (1): 111-115.
[13] Mursaleen M., Çakan C., Mohiuddine S.A., Savaş E. 2010. Generalized statistical convergence and statistical core of double sequences. Acta Mathematica Sinica, English Series, 26 (11): 2131-2144.
[14] Mursaleen M., Edely O.H. 2003. Statistical convergence of double sequences. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288 (1): 223-231.